

Modelagem do fluxo de pedestres pela teoria macroscópica

(Modeling the flow of pedestrians by the macroscopic theory)

Marina Vargas¹, Liliana Madalena Gramani, Eloy Kaviski e Fábio André Balbo

¹Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia,
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

²Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

³Departamento Hidráulica e Saneamento, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

⁴Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia,
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Recebido em 24/2/2012; Aceito em 30/4/2012; Publicado em 14/12/2012

A necessidade de modelar o tráfego de pedestres tem se tornado uma prioridade em ambientes por onde os pedestres possam circular. As pesquisas avançam na tentativa de solucionar acidentes relacionados a multidões. Além disso, analisar estruturas para pedestres antes que elas tenham sido construídas tem se tornado uma exigência das autoridades, assim como poder gerenciar o fluxo de pedestres nessas instalações. Para caracterizar este comportamento, surgiram estudos abrangendo teorias da física e da matemática, que analisam o tráfego de pedestres através de modelos descritos por equações diferenciais e íntegro-diferenciais. Neste trabalho apresenta-se um exemplo de modelo para o tráfego, abordando-o sob a escala macroscópica de modelagem do tráfego e sua ligação direta com a física e os modelos hidrodinâmicos. Aplica-se o modelo criado a uma situação de caminhada, onde os resultados foram comparados a outros trabalhos referentes a simulações e observações experimentais sobre o tráfego de pedestres, encontrados na bibliografia.

Palavras-chave: teoria macroscópica, fluxo de pedestres.

The need to model the traffic of pedestrians has become a priority in environments where pedestrians can circulate. The research has advanced in an attempt to solve accidents related to large crowds. Furthermore, analyzing structures for pedestrians before they have been built has become a requirement of the authorities, as well as being able to manage the flow of pedestrians in those facilities. To characterize this behavior, studies have emerged including theories of physics and mathematics, which analyze pedestrian traffic through models described by differential and integral-differential equations. This work presents the macroscopic scale modeling of traffic and its direct connection with physics and hydrodynamic models. The model was applied to a walk situation where the results were compared with other work on the simulations and experimental observations on the pedestrian traffic, found in the bibliography.

Keywords: macroscopic theory, flow of pedestrians.

1. Introdução

Cada vez mais a necessidade de modelar o fluxo de pedestres tem se tornado uma prioridade nas grandes cidades e vias urbanas em geral. Com esse objetivo, surgem pesquisas no campo da matemática, física e engenharia, analisando o pedestre individualmente ou considerando o fluxo de multidões.

O fluxo de pedestres pode ser representado por três diferentes escalas. Especificamente tem-se:

- Escala Microscópica, na qual todos os pedestres são analisados individualmente. Neste caso a posição e a velocidade de cada pedestre define o

estado do sistema como variáveis dependentes do tempo. Muitos autores, entre eles Helbing [1], Johansson, Mathiesen e cols. [2] e outros [3], [4], optam por esta escala devido a um melhor ajuste nas condições envolvidas no modelo. Equações diferenciais ordinárias (EDO), representando as leis da mecânica newtoniana, são uma das ferramentas para representação dos modelos referentes a essa escala.

Incluso nessa escala, os modelos baseados em agentes, que utilizam conceitos de autômatos celulares via método Monte Carlo, tem trazido excelentes resultados quando modela-se a dinâmica

¹E-mail: marina.vargas@gmail.com.

de multidões. Pode-se citar autores como Schadschneider [5,6], Burstedde e cols. [7], Teknomo [8], Macau [9] e Silva [10] dentre outros. Ainda no contexto de agentes, técnicas de inteligência artificial tem sido desenvolvidas para modelar o comportamento de pedestres [11].

- Escala macroscópica, na qual o fluxo de pedestres é comparado ao fluxo de um fluido. Nesta escala o estado do sistema é descrito por quantidades médias localmente calculadas, ou seja, a densidade, a velocidade e o fluxo dos pedestres são considerados como variáveis dependentes do tempo e do espaço. Esta escala tem sido adotada por alguns autores como Venuti e Bruno [12–14], Vargas [15] dentre outros [16], [17]. As equações diferenciais parciais (EDP) são a base dos modelos referentes a essa escala.
- Escala cinética ou mesoscópica, a identificação dos pedestres não é feita de forma individual, mas sim através de uma distribuição apropriada da probabilidade sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. Muitos estudos tem sido desenvolvidos nessa área por pesquisadores como Bellomo, Delitala e Coscia [18], Bonzani e Gramani [19]. As equações integro-diferenciais são a base dos modelos referentes a essa escala.

As três escalas tem vantagens e desvantagens e precisam ser escolhidas dependendo do problema a ser resolvido. Assim, quanto a escala *Microscópica* embora permita uma descrição muito mais precisa do movimento de cada pedestre, requer um grande esforço computacional quando o número de pedestres considerado é muito grande, por exemplo, no caso de multidões (um alto número de indivíduos com características distintas num mesmo ambiente). Já na escala *macroscópica*, ao contrário da *microscópica*, a principal vantagem é que os modelos hidrodinâmicos de primeira ordem são de grande simplicidade computacional e rapidez de processamento, entretanto é necessário introduzir uma relação empírica (fenomenológica) entre a velocidade e a densidade. Dentre as relações empíricas existentes [15], não existe nenhuma que represente o fluxo real de forma precisa, permitindo críticas [20] a esta abordagem. Além disso, ao se utilizar a escala *macroscópica*, assume-se a hipótese do contínuo, sendo adequada quando considera-se o fluxo em altas densidades podendo apresentar problemas para o caso de baixas densidades. Por fim, na escala *cinética* a principal dificuldade técnica da equação íntegro-diferencial é a representação adequada do termo de interação presente nesta equação, tipo-Boltzmann, considerando a hipótese de continuidade na função distribuição.

Neste artigo, o objetivo principal é compreender a mecânica do movimento de multidões de pedestres

como um contínuo por meio de uma abordagem macroscópica, ou seja, utilizando o método euleriano descrito na seção (3.). Isso é feito pois, deseja-se analisar estruturas de caminhada de forma rápida e com um baixo tempo de processamento computacional, sem grandes gastos experimentais.

Desta forma este trabalho conta com mais seis seções descritas brevemente abaixo:

Na seção 2. será abordado a Hipótese do Contínuo. Na seção 3. serão apresentados os conceitos de fenômenos de transporte, descrevendo todos os termos técnicos que serão utilizados neste trabalho, assim como a descrição do movimento de um fluido. Na seção 4. os modelos Hidrodinâmicos de primeira ordem são explicados e discute-se a relação empírica entre a velocidade e a densidade. Na seção 5. descreve-se o modelo a ser trabalhado. Na seção 6. adota-se uma aplicação prática, resolvendo o modelo numericamente através do método das Diferenças Finitas. A seção 7. traz as conclusões e perspectivas para próximos trabalhos.

2. Hipótese do contínuo

Fluidos são compostos por partículas/moléculas em movimento constante, que colidem com bastante frequência, como bolas de bilhar [21].

Em muitos casos, quando trabalha-se com fluido, opta-se pela hipótese do contínuo, pois desta forma é possível analisar uma região como um todo, sem levar em consideração os espaços vazios de qualquer espécie [22].

A classificação dos movimentos de fluidos é feita da seguinte forma:

1. Fluidos não viscosos são aqueles que não oferecem resistência ao cisalhamento:
 - (a) Incompressível são os escoamentos onde as variações da densidade do fluido são desprezíveis.
 - (b) Compressível são os escoamentos com variações da densidade que não podem ser desprezadas.
2. Fluidos viscosos são aqueles que oferecem resistência ao cisalhamento:
 - (a) Laminar são os escoamentos nos quais as partículas fluidas movem-se em camadas, ou lâminas.
 - (b) Turbulento são os escoamentos nos quais as partículas fluidas rapidamente se misturam enquanto se movimentam, ao longo do escoamento devido às flutuações aleatórias no campo tridimensional de velocidades.

Na mecânica do contínuo, deseja-se estudar uma quantidade de volume de fluido contendo um grande

número de partículas, onde seja possível mensurar as manifestações do movimento molecular. As características de cada partícula não são analisadas, sendo o fluido tratado como um meio contínuo. Esse volume de fluido é conhecido como *volume de controle*.

Na hipótese do contínuo é preciso abstrair-se da composição molecular e sua conseqüente descontinuidade, ou seja, por menor que seja uma divisão de um fluido, esta parte isolada deverá apresentar as mesmas propriedades que a matéria como um todo.

Quando faz-se a comparação entre o fluxo de um fluido e o fluxo de pedestres, está se trabalhando com um fluido compressível não viscoso, isto porque as variações de densidade, na estrutura de caminhada utilizada pelos pedestres, precisa ser considerada. Além disso, não é possível supor que o fluido seja viscoso, pois quando estuda-se pedestres sabe-se que não há ligações viscosas entre eles, ou seja, são totalmente separados quando há cisalhamento.

Ao se fazer uma analogia entre o movimento de multidões e o movimento de fluidos utiliza-se os modelos hidrodinâmicos que consideram a teoria dos fenômenos de transporte.

3. Fenômenos de transporte

O estudo de fenômenos de transporte implica em dinâmica dos fluidos, transferências de massa e transferências de calor [21]. Pode-se estudar os fenômenos de transporte por meio de dois enfoques: Lagrangiano ou Euleriano. O primeiro é utilizado quando precisa-se saber o avanço microscópico de cada partícula, para isso é necessário ter o conhecimento de suas velocidades e acelerações. O segundo, Euleriano, descreve o que ocorre em determinado ponto fixo, região fixa ou volume fixo do espaço.

Como na escala macroscópica os pedestres são comparados a um fluido considerado como contínuo, trabalha-se com o método Euleriano. Neste método serão consideradas as quantidades médias localmente calculadas, isto é, a densidade, a velocidade e o fluxo dos pedestres as quais são consideradas como variáveis dependentes do tempo e do espaço.

Alguns termos básicos [23] que serão utilizados posteriormente neste trabalho são especificados a seguir:

(i) *Campos*: Um campo fluido é descrito por velocidades em diferentes pontos do fluido. É provável que diversos campos coexistam numa dada região. Quando trabalha-se com campos, precisa-se saber que pode ser encontrado três tipos de quantidades: escalares, vetoriais e tensoriais. Um tensor é um conjunto ordenado de k quantidades, por exemplo (k_1, k_2, \dots, k_n) . Um vetor e um escalar são casos particulares de tensores, respectivamente de ordem um e zero. Muitas grandezas

físicas são representadas por tensores de primeira ordem, como velocidade, aceleração, dentre outras. Uma distribuição contínua destas quantidades (escalares, vetoriais e tensoriais), descritas em termos de coordenadas espaciais e temporais, constitui um campo. O comportamento de um campo, neste contexto, depende da relação entre suas grandezas fundamentais: massa, velocidade e tempo. A maneira como estas quantidades interagem depende tanto do ponto de vista de um observador, quanto do módulo destas grandezas (e da direção, no caso da velocidade).

- (ii) Uma *linha de corrente* é uma linha imaginária num campo de escoamento tal que, para um dado instante de tempo, a direção da velocidade em qualquer ponto é obtida pela tangente a esta linha em cada ponto. Uma vez que o vetor velocidade é tangente à linha de corrente, a matéria não pode atravessá-la.
 - (iii) Um *filamento de corrente* é uma família de linhas de corrente que formam uma passagem de seção reta infinitesimal.
 - (iv) Um *tubo de corrente* é limitado por um número infinito de linhas de corrente que formam uma superfície finita através da qual não existe escoamento. Caso não haja criação, acúmulo ou destruição de massa no interior do tubo de corrente, todo fluido que entra deve sair.
 - (v) *Volume de controle* é utilizado quando deseja-se focalizar uma região fixa no espaço, assim o problema termodinâmico pode ser resolvido fixando-se a superfície de controle.
 - (vi) A *superfície de controle* é o contorno de um volume de controle, ou seja, o volume de controle se separa da vizinhança através de sua superfície de controle. A superfície de controle pode ser real ou imaginária e pode estar em repouso ou em movimento.
 - (vii) A *Massa* é uma quantidade de matéria do corpo.
- A seguir descreve-se as principais quantidades macroscópicas utilizadas na teoria de tráfego, sendo também utilizadas para o fluxo de pedestres, tais como:
- (viii) A *Massa específica* ou *densidade relativa* é o número de pedestres por unidade de área, denotada por ρ .
 - (ix) A *Velocidade*, no estudo de pedestres, é adotada como uma média das velocidades dos pedestres que passam em um determinado intervalo de tempo. Normalmente é expressa no sistema internacional (SI) em m/s e denotada por u .

- (x) O *Fluxo* é o número de pedestres que passam por uma seção da estrutura/pista por unidade de tempo. A unidade de comprimento deve ser considerada como a largura do passeio ou porção da pista. Em geral, usa-se *ped/m/s* no (SI) e denota-se o fluxo por q .

Essas três variáveis, densidade relativa, velocidade e fluxo, são relacionadas através de uma equação conhecida como a equação fundamental do tráfego

$$q(t, x) = u(t, x)\rho(t, x), \quad (1)$$

e também é válida para o fluxo de pedestres.

3.1. Movimento do fluido euleriano

Adotando o método euleriano, focaliza-se a atenção numa região fixa no espaço sem identificar as partículas da região num dado instante de tempo. Para isso é necessário apenas considerar as coordenadas espaciais como variáveis independentes, em vez de considerá-las dependentes como ocorre no método lagrangiano. Desta forma, representa-se o campo de velocidades, em três dimensões, no método euleriano por

$$\mathbf{E} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad (2)$$

onde as respectivas componentes escalares da velocidade (u_1, u_2, u_3) em coordenadas cartesianas, como funções das coordenadas espaciais e do tempo, são

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x, y, z, t), \\ u_2 &= g(x, y, z, t), \\ u_3 &= h(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (3)$$

As variações infinitesimais da velocidade devem ser expressas em termos de derivadas parciais, pois cada componente é afetada tanto pelo espaço quanto pelo tempo. De acordo com a definição de diferencial total, a variação infinitesimal da velocidade na direção x , da Eq. (3), fica

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy + \frac{\partial u_1}{\partial z} dz + \frac{\partial u_1}{\partial t} dt, \quad (4)$$

ou, usando a regra da cadeia para a derivação parcial para a Eq. (2), tem-se

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (5)$$

Se as componentes das taxas espaciais $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$ da Eq. (5) forem consideradas como as componentes escalares da velocidade do fluido, obtêm-se

$$\dot{E} \equiv \frac{DE}{Dt} = \left(u_1 \frac{\partial E}{\partial x} + u_2 \frac{\partial E}{\partial y} + u_3 \frac{\partial E}{\partial z} \right) + \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (6)$$

onde \dot{E} representa uma derivada total, substancial ou derivada do fluido.

4. Modelos hidrodinâmicos

Os modelos de tráfego podem ser descritos por uma equação fenomenológica ou um sistema de equações composto por equações de conservação da dinâmica dos fluidos. Quando refere-se a um sistema de equações, está-se trabalhando com um modelo hidrodinâmico. Esses modelos podem ser formados por uma ou mais equações de conservação, que são a equação da conservação da massa, a equação da conservação do momento e a equação da conservação da energia. Utilizando apenas uma equação de conservação tem-se um modelo hidrodinâmico de primeira ordem. A vantagem dos modelos hidrodinâmicos de primeira ordem é a sua simplicidade matemática e rapidez computacional. Quando trabalha-se com um sistema composto por duas equações de conservação, está se trabalhando com um modelo hidrodinâmico de segunda ordem. Estes, por sua vez, não apresentam a mesma simplicidade para serem resolvidos matematicamente.

Em geral, para o fluxo de pedestres, os modelos de primeira ordem trazem resultados mais rápidos.

4.1. Modelos hidrodinâmicos de primeira ordem

Os modelos hidrodinâmicos de primeira ordem geralmente consideram a equação da conservação da massa (equação da continuidade), ou seja, a conservação do número de pedestres na estrutura/pista.

4.1.1. Equação da continuidade

O princípio da conservação de massa é de extrema importância para a física, pois é ele que garante que a matéria não será destruída e nem criada em um volume de controle [23].

A equação da continuidade é desenvolvida efetuando-se um balanço de massa sobre um pequeno elemento de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, fixo no espaço, através do qual um fluido [24] esta escoando

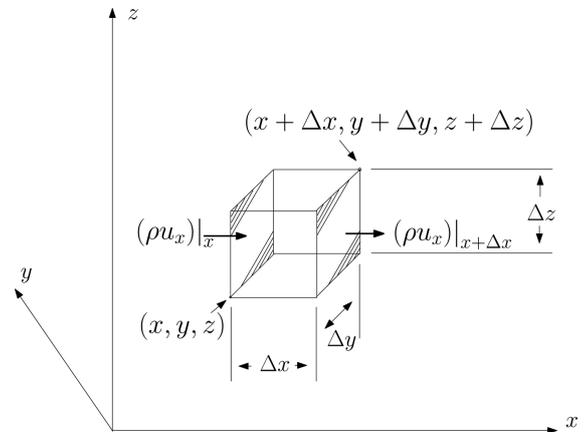


Figura 1 - Elemento de volume.

$$\begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{aumento} \\ \text{de massa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{entrada} \\ \text{de massa} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{saída} \\ \text{de massa} \end{pmatrix}$$

Considere as duas faces hachuradas da Fig. (1). Estas são perpendiculares ao eixo x . A taxa de entrada de massa no elemento de volume através da área hachurada em x é $(\rho u_x)|_x \Delta y \Delta z$, e a taxa de saída de massa através da área hachurada em $x + \Delta x$ é $(\rho u_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Expressões semelhantes podem ser escritas para os outros dois pares de faces, contudo, considerando o balanço de massa unidimensional tem-se

$$\begin{aligned} & \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ & = \Delta y \Delta z \left[(\rho u_x)|_x - (\rho u_x)|_{x+\Delta x} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Dividindo a Eq. (7) por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e tomando o limite quando Δx , Δy e Δz tendem a zero e, além disso, usando as definições de derivada parcial obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_x}{\partial x}, \quad (8)$$

que representa a equação da continuidade.

Para o fluxo de pedestres, essa equação descreve a taxa de variação temporal do número de pedestres por metro quadrado em uma posição fixa do espaço.

4.1.2. Fechamento da equação da continuidade

A equação diferencial (8), com duas variáveis, a densidade ρ e a velocidade dos pedestres u^2 como função do tempo t e do espaço x , deve ser fechada por uma relação matemática entre a velocidade u e densidade ρ , permitindo obter as soluções $\rho(x, t)$ e $u(x, t)$.

Então, considerando-se:

- As propriedades do fluxo local, tem-se uma equação analítica para $u[\rho]$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ u = u[\rho]. \end{cases} \quad (9)$$

- A equação dinâmica para a evolução de u , tem-se uma equação funcional

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f(u[\rho]). \end{cases} \quad (10)$$

O problema da relação entre a velocidade como função da densidade consiste em analisar e interpretar fenomenologicamente o comportamento do sistema.

²Por simplificação de notação denota-se u_x por u

Na verdade, os dados experimentais não permitem assumir uma forma universal para esta relação no fluxo de pedestres, pois qualquer relação utilizada ainda não representa precisamente o fluxo real.

Das diferentes escolhas desta relação, obtêm-se diferentes modelos macroscópicos de primeira ordem.

5. Descrição do modelo

Considera-se como uma estrutura de caminhada para pedestres uma pista de comprimento L metros, por D metros de largura, como mostrado na Fig. (2).

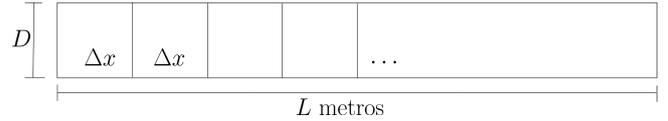


Figura 2 - Pista.

Assume-se a entrada de pedestres durante o processo de caminhada. Portanto a Eq. (8) transforma-se em

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = g(t), \quad (11)$$

onde $g(t)$ é uma função que representa a entrada de pedestres no sistema considerado.

O modelo computacional é gerado para um tempo total de t_t minutos. Para $t = 0$ e $x = 0$ não há pedestres no sistema, ou seja, a condição inicial é $\rho(0, t) = 0$ e $\rho(x, 0) = 0$.

O modelo fenomenológico utilizado para resolver a Eq. (11) foi desenvolvido por Greenshield [25] e trata-se de uma relação linear entre a velocidade e a densidade. Assim o sistema (9) é reescrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = g(t), \\ u = u_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_j}\right), \\ \text{para } 0 \leq \rho \leq \rho_j, \end{cases} \quad (12)$$

onde u_f é a velocidade de fluxo livre e ρ_j é a densidade máxima de pedestres na estrutura de caminhada.

Numa primeira análise tem-se que, a partir do instante inicial, os pedestres começam a entrar pelas laterais desta pista em todos os pontos (para todo x até $x = L$), durante um período de t_κ minutos, com uma média de 1 pedestre a cada t_φ minutos, com $t_\varphi < t_\kappa < t_t$, ou seja, $g(t) = n$, onde n é uma constante e $n = \frac{1}{t_\varphi 60}$ (ped/s). No tempo restante $t_t - t_\kappa$ não entra nenhum pedestre, apenas analisa-se o comportamento do fluxo já existente que segue até todos os pedestres chegarem a posição final, $x = L$.

O sistema (12) será resolvido pelo método das diferenças finitas (MDF). Os dados foram retirados do artigo de Older com dados baseados em Older [26]

onde assume-se que, a velocidade de fluxo livre u_f é de 1,4 (m/s) e a densidade máxima ρ_j é de 4 (ped/m²).

Com esses dados é possível encontrar resultados numéricos para o modelo hidrodinâmico macroscópico ou seja, $\rho(x, t)$ e $u(x, t)$, para o fluxo de pedestres apresentado pelo sistema (12).

6. Método e solução numérica

O método de solução assumido para resolver o modelo hidrodinâmico deste trabalho, é o método conhecido como método das diferenças finitas.

Para que seja possível tratar numericamente as equações diferenciais parciais (EDP), elas devem ser expressas na forma de operações aritméticas que o computador possa executar. Essencialmente, deve-se representar os diferenciais da EDP por expressões algébricas, ou seja, discretizar a EDP.

Quando discretiza-se uma equação pelo método de MDF é necessário determinar cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema. Assim, considere os pontos da malha, também chamados de *nós*, localizados na intersecção das linhas horizontais com as verticais, estando separados entre si por uma distância Δx e Δt , respectivamente, não necessariamente iguais. Os índices i (designa a posição ao longo do eixo x) e k (a linha de tempo a qual o ponto pertence), (ver Fig. (3)), identificam um ponto na i -ésima coluna e na k -ésima linha, respectivamente. Assim, um dado ponto (i, k) possui coordenadas $(x_0 + i\Delta x, t_0 + k\Delta t)$, em que o ponto (x_0, t_0) representa a origem do sistema de coordenadas, tomado aqui como igual a $(0, 0)$.

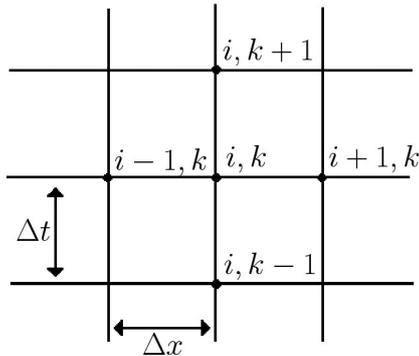


Figura 3 - Região discretizada. Malha computacional bidimensional.

Pode-se pensar nas aproximações de diferenças finitas como o inverso do processo de determinação do limite, utilizado para obter a derivada de uma função f . Considera-se a definição de uma função f contínua

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (13)$$

Tendo a definição da derivada de uma função f contínua, uma aproximação de diferenças finitas para

$\frac{df}{dx}$ é dada pelo lado direito da Eq. (13), sem considerar o limite da expressão. Utilizando-se dois valores de f separados por uma distância (finita) h , a expressão (13) representa uma aproximação algébrica para a primeira derivada de f .

Os pontos mostrados na Fig. (3) representam coordenadas x e t nos quais serão calculados os valores de uma função f . Esses valores serão utilizados na aproximação das derivadas presentes na equação diferencial. Portanto, aproximações de diferenças finitas efetivamente substituem o operador diferencial contínuo (por exemplo, $\frac{d}{dx}$ por uma aproximação discreta, calculada a partir dos valores de f em um número finito de pontos).

As aproximações de diferenças finitas podem ser obtidas de várias formas. Uma das mais comuns é a expansão por série de Taylor.

A expansão da série de Taylor permite estimar o valor da função f em f_1 , conhecendo o valor de f em f_0 . Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ de interesse e que possua derivadas de até ordem n contínuas nesse intervalo, o Teorema de Taylor permite escrever, para todo ponto $x \in [a, b]$.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots + R_n,$$

ou

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots + R_n, \quad (14)$$

em que $\Delta x = x - x_0$ denota o espaçamento das linhas verticais e R_n é o resto, definido como

$$R_n = \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{x_0}, \quad x_0 \in [a, b].$$

Considere a Fig. (4), que mostra alguns pontos de uma malha unidimensional. Os pontos são uniformemente espaçados de $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, onde $x_i = a + i\Delta x$ com $i = 0, 1, \dots, n + 1$.



Figura 4 - Malha de pontos uniformemente espaçados.

Deseja-se determinar a primeira derivada de uma função f no ponto $x_i = i\Delta x$, a qual será denotada por $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i$. Expandindo $f(x_i + \Delta x)$ em série de Taylor em

torno do ponto x_i , tem-se

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \quad (15)$$

em que “...” indica os termos restantes da série de Taylor até o resto R_n . Para garantir a existência das expansões em série de Taylor, considera-se n sempre maior que a maior ordem das derivadas que aparecem nessas expansões. Assim, por exemplo, $n > 3$ na expansão (15).

Após isolar a primeira derivada da Eq. (15), obtêm-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + \left[-\frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i - \dots \right]. \quad (16)$$

Note que, para que seja possível isolar $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i$, todos os termos da série de Taylor foram divididos pelo espaçamento Δx .

A expressão (16) indica que a primeira derivada é igual ao quociente mais os termos da série de Taylor até R_n , que é denominado como *Erro Local de Truncamento* (ELT).

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + O\left(\Delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right).$$

Pode-se simplificar a notação se escrevendo f_i para $f(x_i)$, ou, em geral, $f_{i \pm k}$ para $f(x_i \pm k \Delta x)$. Com isso, a expressão (16) torna-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O\left(\Delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right). \quad (17)$$

A expressão (17) é uma equação de diferenças finitas que representa uma *aproximação de primeira ordem* para a primeira derivada de f , utilizando *diferenças progressivas ou adiantadas*, ou seja,

- é de primeira ordem porque no termo dominante do ELT, Δx aparece elevado à primeira potência.
- é de diferenças progressivas porque, no cálculo da derivada no ponto x_i , foi utilizado um ponto *adiante* de x_i , no caso x_{i+1} .

Uma segunda aproximação de diferenças finitas pode ser obtida a partir da expansão de $f(x - \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \quad (18)$$

Isolando-se a primeira derivada, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O\left(\Delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad (19)$$

que é outra aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de f . Diferentemente da expressão (17), na qual utiliza-se um ponto adiante de x_i , a expressão (19) utiliza o ponto x_{i-1} , ponto que fica *atrás* de x_i . Por essa razão, a expressão (19) é considerada uma aproximação por *diferenças regressivas ou atrasadas*.

Pode-se obter uma aproximação de $O(\Delta x)^2$ para a primeira derivada de f , manipulando convenientemente as expressões em série de Taylor:

Em resumo, considerando as Eqs. (15) e (18) é possível escrever respectivamente

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + O\left(\Delta x^2, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right), \quad (20)$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i - O\left(\Delta x^2, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right). \quad (21)$$

Como o objetivo de se calcular uma aproximação de segunda ordem, combina-se as expansões (20) e (21) de forma a eliminar a segunda derivada de f . Essa derivada é eliminada ao fazer o cálculo

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + O\left(\Delta x^2, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \Delta x} + O\left(\Delta x^2, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right). \quad (22)$$

Note que a aproximação dada pela expressão (22) utiliza os pontos x_{i-1} e x_{i+1} para o cálculo da primeira derivada de f no ponto central, intermediário, x_i . Por essa razão, ela é denominada aproximação por *diferenças centrais*.

O mesmo procedimento é válido para derivadas temporais, ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_k = \frac{f^{k+1} - f^k}{\Delta t} + O\left(\Delta t, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right), \quad (23)$$

em que os índices k e $k + 1$ designam dois níveis temporais, o nível k representa o presente e o nível $(k + 1)$ representa o futuro, sendo f^k conhecida.

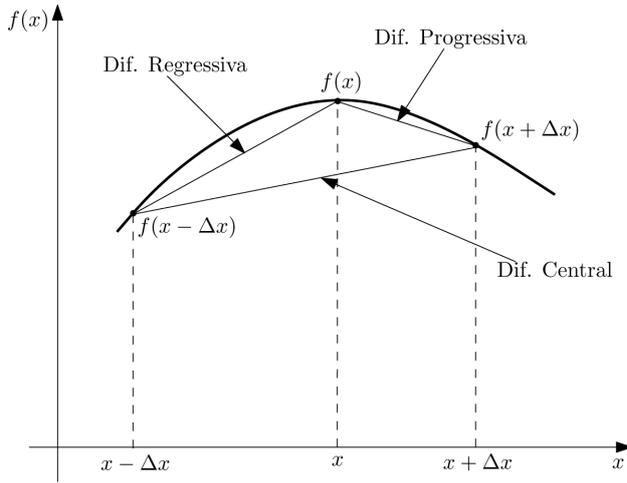


Figura 5 - Pontos utilizados para o cálculo da primeira derivada de f por diferenças finitas.

Dependendo do tipo de diferenças finitas a ser usado na solução de determinado problema, dois diferentes esquemas podem ser elaborados [27]. Se a aproximação por diferenças finitas da derivada espacial for expressa em termos de valores das variáveis no nível de tempo conhecido, as equações resultantes podem ser resolvidas diretamente, para cada ponto de intersecção (x, t) computacional em cada tempo. Este tipo de esquema é chamado de *esquema explícito*. Se, por outro lado, a aproximação por diferenças finitas da derivada espacial for expressa em termos de valores das variáveis na linha de tempo desconhecida, as equações algébricas do sistema inteiro são resolvidas simultaneamente, e o esquema é dito *esquema implícito*.

Os problemas que envolvem diferenças finitas necessitam que seja determinada uma relação entre o intervalo de discretização no espaço Δx e o intervalo de discretização no tempo Δt , como consequência da condição de estabilidade do esquema. Esta relação (normalmente é chamada de condição de Courant-Friedrichs-Lewy - CFL [24]) pode ser formulada da seguinte forma $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda \leq 1$, onde λ é o número de Courant.

É necessário admitir a utilização da condição de Courant representada por λ , com $\lambda = 0, 1$, o que nos fornece $\Delta t = 0, 1\Delta x$.

Assumindo o modelo linear para a velocidade e expressando o fluxo como

$$q = a\rho + b\rho^2, \quad (24)$$

onde $a = u_f$ e $b = -\frac{u_f}{\rho_j}$ o modelo hidrodinâmico do sistema (12) é reescrito como

$$\lambda \left(a(\rho_{i+1}^{k+1}) + b(\rho_{i+1}^{k+1})^2 \right) + \rho_{i+1}^{k+1} = \Omega$$

ou ainda,

$$b\lambda r^2 + (a\lambda + 1)r - \Omega = 0, \quad (25)$$

onde

$$\bullet \Omega = \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_i^{k+1}) + \rho_{i+1}^k + \frac{\Delta t}{2} (g_{i+1}^{k+1} + g_i^{k+1})$$

$$\bullet r = \rho_{i+1}^{k+1}.$$

Com isso pode-se obter resultados computacionais para o fluxo de tráfego de pedestres.

6.1. Resultados

A teoria para o fluxo de pedestres é assumida para valores de $\rho \leq 6 \text{ ped}/\text{m}^2$ [28], devido a impossibilidade física de se alocar um número maior do que esse por metro quadrado. Desta forma, as ilustrações dos resultados nas Figs. 6(a) e 6(b) seguem esse padrão.

Analisando a curva que representa o fluxo, quando a densidade ρ fica maior do que a densidade crítica $\rho_{crit} = 2 \text{ ped}/\text{m}^2$ ($\rho_{crit} < \rho \leq \rho_j$ com $\rho_j = 4 \text{ ped}/\text{m}^2$) o fluxo diminui, aproximando-se de zero quando $\rho = \rho_j$. O fluxo no trecho em que $\rho > 3, 7$, e $\rho < \rho_j$ é pequeno, entretanto ainda existe. Ao se atingir $\rho_j = 4 \text{ ped}/\text{m}^2$, tem-se que a densidade é máxima, porém nota-se na Fig. 6(a) que a velocidade para $\rho_j = 4 \text{ ped}/\text{m}^2$ é mínima e sendo assim, o fluxo é mínimo.

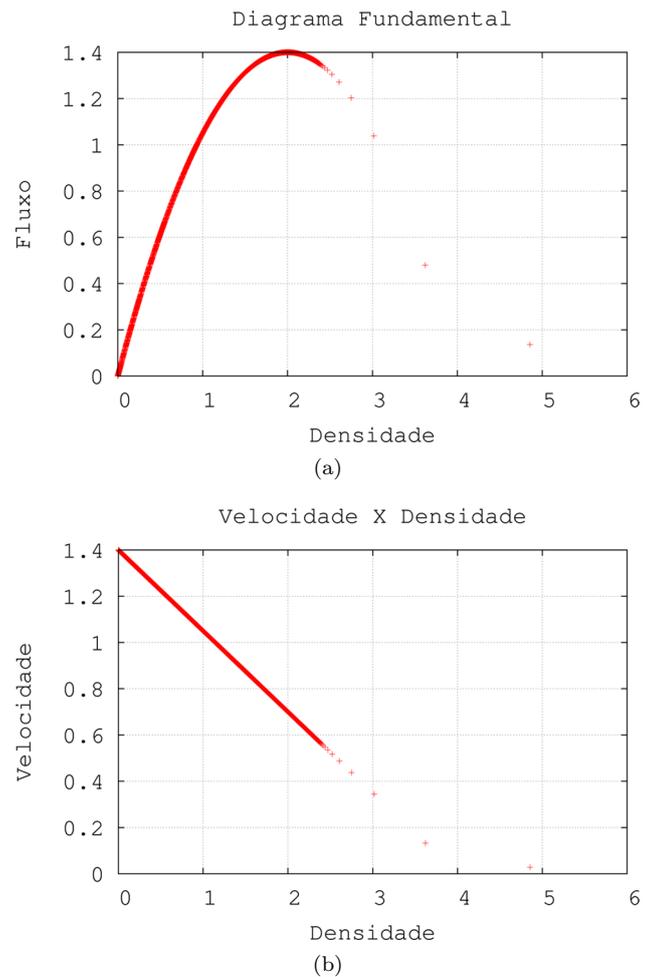


Figura 6 - Diagramas fundamentais.

Da análise da Fig. 6(a), observa-se que quando a densidade atinge valores superiores a ρ_{crit} ocorre uma descontinuidade no gráfico. Quando faz-se ajustes em gráficos experimentais [29], como pode-se observar na Fig. 7, após um certo valor para a densidade, a função de ajuste não se adéqua perfeitamente aos dados devido a uma alta dispersão destes naquela região.

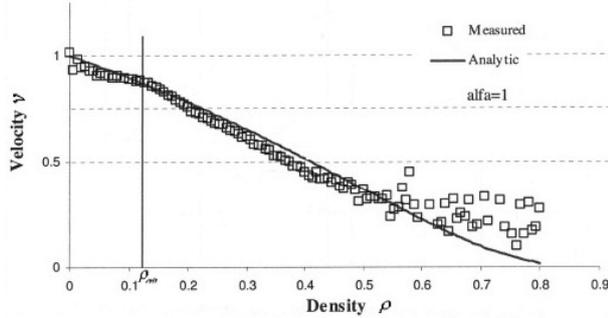


Figura 7 - Resultados experimentais de acordo com a Ref. [29].

O mesmo se dá quando faz-se a análise da Fig. 6(b). De acordo com os dados experimentais [30] apresentados na Fig. 8, observa-se que a partir da densidade crítica ρ_{crit} , há uma mudança de fase. Assim, entre $0 \leq \rho \leq \rho_{crit}$ tem-se a fase de fluxo livre e entre $\rho_{crit} < \rho \leq \rho_j$ tem-se a fase de fluxo congestionado.

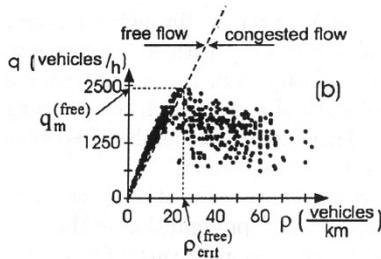


Figura 8 - Resultados experimentais de acordo com a Ref. [30].

Observa-se na Fig. 8, obtida experimentalmente para veículos, que na fase de fluxo congestionado não se pode garantir continuidade da função. Embora os dados sejam obtidos para veículos, Venutti e Bruno [13] e Tanaboriboon [31], defendem a analogia entre estes resultados e os resultados experimentais para diagramas representativos para pedestres. Essa observação sobre dados experimentais também foram verificadas nos nossos resultados, tanto na Fig. 6(a), gráfico da densidade pela velocidade, quanto na Fig. 6(b), que representa o diagrama fundamental.

7. Conclusões

Em problemas de mecânica dos fluidos existem MDF muito testados, que solucionam uma grande variedade de situações, com amplas vantagens sobre os outros métodos. Li [32] afirma e prova que o MDF é consistente, convergente e incondicionalmente estável. Através de testes numéricos realizados por ele,

verificaram-se que os máximos erros relativos que podem ocorrer nos valores dos fluxos máximos estimados, são sempre menores do que 0.5% (testes realizados para $0.02 \text{ (m/s)} \leq dt/dx \leq 2 \text{ (m/s)}$).

Os modelos resolvidos por aproximações de diferenças finitas se aproximaram dos resultados experimentais encontrados na literatura. Os resultados por MDF implícito podem ser tranquilamente comparados e validados com os modelos de Fruin [33], Older [26], Virkler [34] e tantos outros.

Foi possível através deste artigo fazer contribuições para as pesquisas de fluxo de pedestres, pois o modelo analisado pode ser utilizado como uma primeira análise de estruturas de caminhada que precisem ser rapidamente testadas, sem a necessidade de grandes gastos experimentais e utilizando-se de um baixo tempo de processamento computacional. Quando o modelo foi aplicado a estrutura de caminhada/pista, observou-se que a densidade crítica ρ_{crit} foi atingida com muita rapidez. Isso se deve as entradas admitidas para a pista (entradas em todos os pontos da caminhada) e o tamanho da pista. Considerando menos entradas, ou um número menor de pedestres entrando por minuto, esse crescimento de ρ até chegar a ρ_{crit} seria mais lento. Também pode-se afirmar que o modelo hidrodinâmico foi fechado com uma relação fenomenológica adequada e muito utilizada na bibliografia de tráfego [25], porém, sabe-se que muitos estudos tem sido realizados [13], [15] para que se possa encontrar uma relação fenomenológica universal que represente o fluxo considerando as características dos pedestres vistos como partículas de um fluido contínuo.

Agradecimentos

Agradecemos as revisões dos amigos do nosso Grupo de Tráfego e ao suporte da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- [1] D. Helbing and P. Molnár, *Phys. Rev. E* **51**, 4282 (1995).
- [2] D. Helbing, A. Johansson, J. Mathiesen, M.H. Jensen and A. Hansen, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 168001 (2006).
- [3] S. Hoogendoorn, W. Daamen and R. Landman, *Pedestrian and Evacuation Dynamics* (SpringerLink, Berlin, 2005), p. 253.
- [4] S.P. Hoogendoorn and P.H.L. Bovy, *Transportation Research Record* **1776**, 201 (2001).
- [5] A. Schadschneider, *Pedestrian and Evacuation Dynamics* (Springer, New York, 2002), p. 75.
- [6] A. Schadschneider and A. Seyfried, *Cybernetics and Systems: An International Journal* **40**, 367 (2009).
- [7] C. Burstedde, A. Kirchner, K. Klauk, A. Schadschneider and J. Zittartz, *Pedestrian and Evacuation Dynamics* (Springer, New York, 2002), p. 87.

- [8] K. Teknomo and M.R.E. Estuar, *International Journal of Psychological Research* **1**, 23 (2010).
- [9] I.Y. Sumida and E.E.N. Macau, in: *III Workshop dos Cursos de Computação Aplicada do INPE - WORCAP*, São José dos Campos, 2003, editado por G.J.F. Banon, F.M. Ramos, R.R. Rosa and J.D.S. Silva (MCT/INPE, São José dos Campos, 2003).
- [10] T.C. Silva, *Simulações Computacionais Aplicadas ao Processo de Evacuação de Ambientes: Uma Análise Comparativa de Variantes Geométricas Via Autômatos Celulares Bidimensionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [11] M.C. Toyama, *Uma Abordagem Multiagente para Dinâmica de Pedestres*. Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2006.
- [12] F. Venuti and L. Bruno, *Comptes Rendus Mécanique* **12**, 739 (2007).
- [13] F. Venuti and L. Bruno, *Comptes Rendus Mécanique* **4**, 194 (2007).
- [14] F. Venuti and L. Bruno, *Physics of Life Reviews* **6**, 176 (2009).
- [15] M. Vargas, *Modelagem Matemática para o Tráfego de Pedestres*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2010.
- [16] D. Bauer, S. Seer and N. Brändle, in: *Proceedings of the Summer Computer Simulation Conference - SCSC 2007*, San Diego, 2007, editado por Society for Computer Simulation International (San Diego, 2007), p. 1035.
- [17] C. Chalons, *SIAM J. Sci. Comput.* **29**, 539 (2007).
- [18] N. Bellomo, M. Delitala and V. Coscia, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **12**, 1801 (2002).
- [19] I. Bonzani and L.M.G. Cumin, *Computers and Mathematics with Applications* **9**, 2418 (2008).
- [20] C.F. Daganzo, *Fundamentals of Transportation and Traffic Operations*. (Elsevier, New York, 1997).
- [21] R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002).
- [22] W. Filho, *Fenômenos de Transporte para Engenharia* (LTC, Rio de Janeiro, 2006).
- [23] L. Sissom and D.R. Pitts, *Fenômenos de Transporte* (Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988).
- [24] A.O. Fortuna, *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações* (Edusp, São Paulo, 2000).
- [25] B.D. Greenshield, *Highway Research Board Proceedings* **14**, 448 (1935).
- [26] S.J. Older, *Traffic Engineering and Control* **10**, 160 (1968).
- [27] G. Castanharo, *Aplicação de Modelos Hidrodinâmicos no Contexto de Previsão de Afluências a Reservatórios*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2003.
- [28] W. Daamen, *Modelling Passenger Flows in Public Transport Facilities*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, 2004.
- [29] I. Bonzani and L. Mussone, *Mathematical and Computer Modelling* **37**, 1435 (2003).
- [30] B.S. Kerner, *The Physics of Traffic* (Springer, New York and Berlin, 2004).
- [31] Y. Tanaboriboon, S. Hwa and C. Chor, *Journal of Transportation Engineering* **112**, 229 (1986).
- [32] R.M. Li, *Mathematical Modelling of Response from Small Watershed*. Tese de Doutorado, Colorado State University, 1974.
- [33] J. Fruin, *Highway Research Record* **355**, 1 (1971).
- [34] M. Virkler and S. Elayadath, *Transportation Research Record* **1438**, 51 (1994).