

Artigos Gerais

Modelagem computacional do tráfego de veículos pela teoria microscópica (*Modeling the flow of vehicles by the macroscopic theory*)

Rudinei Luiz Bogo¹, Liliana Madalena Gramani², Eloy Kaviski³

¹*Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia,
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil*

²*Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil*

³*Departamento Hidráulica e Saneamento, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil*
Recebido em 24/6/2014; Aceito em 16/9/2014; Publicado em 31/3/2015

A necessidade de modelar o fluxo de veículos tem se tornado uma prioridade nos grandes centros urbanos e vias de trânsito em geral. Esse tipo de modelagem pode ser usado como ferramenta para estabelecer novas estratégias, políticas de gerência e controle de tráfego para melhorar a eficiência do sistema de transportes. O tráfego de veículos pode ser representado fisicamente por três escalas: microscópica, macroscópica e cinética. Na modelagem matemática de sistemas físicos complexos, tais como o tráfego, nenhuma representação destas escalas é efetivamente consistente com a física do sistema analisado. Por outro lado, os autômatos celulares vêm se destacando entre os principais modelos computacionais para simulação do tráfego de veículos devido a sua capacidade de representar as principais características do tráfego, utilizando regras simples e baixo custo computacional. A diferença nesse tipo de modelagem é de não envolver nenhum tipo de equação. O principal objetivo deste trabalho é compreender o uso da modelagem computacional no estudo do tráfego de veículos por meio dos autômatos celulares. Isso é feito apresentando um modelo que emprega regras microscópicas na movimentação dos veículos em pista com uma faixa em sentido único. Os resultados obtidos são os gráficos da densidade *vs.* fluxo, conhecido como diagrama fundamental, e da densidade *vs.* velocidade.

Palavras-chave: modelagem do fluxo de tráfego, autômatos celulares.

The necessity to model the flow of vehicles has become a priority in large urban centers and transit routes in general. This type of modeling can be used as a tool to establish new strategies, policy management and traffic control, to improve efficiency in the transport system. The vehicle traffic can be physically represented by three scales: microscopic, kinetic and macroscopic. In mathematical modeling of complex systems, such as traffic, none of these scale representations is effectively consistent with the physics of the system analyzed. On the other hand, cellular automata are distinct among the main computational models for simulation of vehicular traffic due to its ability to represent the principal characteristics of the traffic by using simple rules and low computational cost. The difference is that this type of modeling does not involve any kind of equation. The main objective of this work is to understand the use of computational modeling in the study of vehicular traffic through cellular automata. This is done by presenting a model that employs microscopic rules on movement of vehicles on the track with a single one-way road. The results are expressed through by graphs, flow *vs.* density, known as the fundamental diagram, and density *vs.* velocity.

Keywords: traffic flow modelling, cellular automata.

1. Introdução

A modelagem do fluxo de veículos tem se tornado uma prioridade nos grandes centros urbanos e vias de trânsito em geral. Esse tipo de modelagem pode ser usado como ferramenta para estabelecer novas estratégias, políticas de gerência e controle de tráfego para melhorar a eficiência do sistema de transportes.

Os primeiros estudos sobre teorias do fluxo do tráfego de veículos começaram a ser desenvolvidos na década de 1930, com o trabalho de Bruce Greenshields [1], que relacionou grandezas como: fluxo, densidade e velocidade, e a aplicação da teoria de probabilidades para tentar descrever o fluxo de tráfego [2]. Desde então, vários estudos têm sido feitos na tentativa

¹E-mail: rudi.bogo@gmail.com.

de descrever a relação entre veículos, ruas, semáforos e outros componentes do trânsito, utilizando esses conceitos [3–6].

O fluxo de veículos pode ser representado por três diferentes escalas [7]. Especificamente tem-se:

- Escala Microscópica, onde todos os veículos são analisados individualmente. Neste caso a posição e a velocidade de cada veículo definem o estado do sistema. A modelagem referente a esta abordagem, é feita por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) representando as leis da mecânica newtoniana. A solução desse sistema providencia a descrição das condições do fluxo na estrada.
- Escala Macroscópica, onde o fluxo de veículos é comparado ao fluxo de um fluido descartando totalmente a escala microscópica. Nesta escala o estado do sistema é descrito por quantidades médias localmente calculadas, nominalmente a densidade, o momento linear e a energia cinética dos veículos. Os modelos referentes a esta escala são baseados na teoria hidrodinâmica de fluidos e são descritos por sistemas de equações diferenciais.
- Escala Cinética ou Mesoscópica, onde a identificação da posição e da velocidade dos veículos é feita por uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. Os modelos matemáticos referentes a esta escala são baseados em equações íntegro-diferenciais similares a equação de Boltzmann.

Em geral todas as escalas apresentam vantagens e desvantagens em seu uso. A escala *Microscópica* permite uma descrição mais precisa do estado físico do sistema, entretanto, requer um grande esforço computacional quando o número de veículos é suficientemente alto. Por exemplo, no caso de um tráfego congestionado, quando a densidade é alta. No caso da escala *Macroscópica*, que pode ser associada a teoria hidrodinâmica, tem-se a vantagem da simplicidade computacional e o tempo de processamento. Entretanto, os modelos de primeira ordem obtidos apenas pela equação da conservação da massa, necessitam de uma relação fenomenológica entre a velocidade média e a densidade local. Ainda, ao utilizar esta escala, compara-se o estado físico do sistema ao fluido compressível, o que pode apresentar problemas quando há poucos veículos na pista (baixas densidades). Por fim, a escala *Mesoscópica* ou *Cinética*, baseada na teoria cinética dos gases, tem a vantagem de apresentar características micro e macroscópicas. Todavia, a representação adequada do termo de interação entre veículos presente na equação íntegro-diferencial (tipo-Boltzmann) é a principal dificuldade técnica desta escala.

Na modelagem matemática de sistemas complexos, tais como o tráfego, nenhuma representação de escala é efetivamente consistente com a física do sistema analisado. Por exemplo, um modelo matemático para o tráfego pode conter até 30 mil equações e envolver até um milhão de variáveis, exigindo grandiosos recursos computacionais para a sua utilização. Nas últimas décadas com o avanço do computador, os modelos computacionais têm sido amplamente usados para representar fenômenos complexos, como o tráfego de veículos, por possuírem uma natureza muito mais simples do que as equações diferenciais parciais.

Nesse sentido, os autômatos celulares se destacam entre os principais modelos computacionais para simulação do tráfego de veículos devido a sua capacidade de representar as principais características do tráfego, utilizando regras simples e baixo custo computacional [8–11]. A grande vantagem de utilizar autômatos neste tipo de modelagem é que as regras são totalmente microscópicas, podendo obter resultados macroscópicos do estado físico do sistema, mesmo para altas densidades. Sendo assim, é possível obter modelos que descrevem de forma mais realista tal fenômeno [12, 13]. O principal objetivo deste trabalho é compreender o uso da modelagem computacional no estudo do tráfego de veículos por meio dos autômatos celulares. Isto é feito apresentando um modelo que emprega regras microscópicas na movimentação dos veículos em pista com uma faixa em sentido único. Os resultados obtidos são os gráficos densidade *vs.* fluxo, conhecido como diagrama fundamental, da densidade *vs.* velocidade. Desta forma, o trabalho é organizado com mais cinco seções, descritas brevemente a seguir: Na seção 2. abordam-se os conceitos e definições dos autômatos celulares. Na seção 3. apresenta-se o uso dos autômatos para o tráfego de veículos. Na seção 4. descreve-se o modelo proposto. Na seção 5., resolve-se o modelo e apresentam-se os resultados das simulações. Por fim, a seção 6. apresenta as conclusões e perspectivas para a realização de novos trabalhos.

2. Autômatos celulares

Os autômatos celulares, têm sido muito utilizados em diversos campos de estudos como, por exemplo: em incêndios florestais [14], na biologia [15–17], no reconhecimento de padrões (estatística) [18], no crescimento de câncer [19], para agrupamentos de dados e interações sociais [20], no meio ambiente [21], dinâmica dos fluidos [22] e, também, no foco desse estudo: tráfego de veículos [23].

Numa primeira aproximação, um autômato celular (AC) é um sistema matemático discreto, estudado em diversas áreas, dentre elas, a física. A principal utilização é simular comportamentos complexos a partir de regras simples. Nos ACs, o tempo, o espaço e as variáveis são discretizados em uma grade regular de

células, onde cada célula é um autômato que pode assumir um número finito de estados. O autômato também pode ser chamado de “Máquina de Estados” [24].

Um dos primeiros estudos com modelos de ACs foi realizado por John Von Neuman (1903-1957). Ele propôs um modelo matemático abstrato que simulava as rotinas de um robô, que podia se replicar a partir de um conjunto de peças separadas. Este modelo bidimensional ficou conhecido como *universal copier and constructor*. Na década de 1970, o matemático John Horton Conway popularizou os autômatos celulares com o chamado Jogo da Vida (*game of life*). Este jogo é um modelo bidimensional que simula alterações em populações de seres vivos baseados em regras locais simples [25]. Em 2002, Stephen Wolfram publicou o livro *A New Kind of Science* [26] sobre pesquisas realizadas nas décadas de 1980 e 1990, que trata do uso de ACs unidimensionais para modelar sistemas complexos a partir de mecanismos determinísticos simples.

Conforme [27], os ACs difundiram-se devido a sua capacidade de gerar simulações, obtendo resultados que dificilmente outros métodos que utilizam modelos matemáticos, por exemplo, conseguiriam os mesmos devido à complexidade e implementação computacional.

O estado de cada célula é atualizado a cada iteração, analisando previamente os estados da vizinhança, isto é, as células mais próximas, são caracterizadas em intervalos de tempos discretos. Assim, a medida que o sistema evolui dinamicamente, despontam comportamentos complexos em virtude dessas influências mútuas, caracterizando um sistema complexo. Tal complexidade é observada pelo comportamento dinâmico estocástico dos ACs quando há repetidas atualizações no estado das células, em intervalos de tempos discretos, seguindo as regras iniciais e sujeitos a aleatoriedade [28].

2.1. Definição de autômato celular

Segundo [20], um autômato celular \mathcal{A} é um conjunto d -dimensional $(\chi, \phi, \eta, \delta)$ onde:

- χ é uma grade regular, d -dimensional, formada por células;
- ϕ é um conjunto finito, cujos elementos representam os estados possíveis de cada célula;
- η é um subconjunto finito de χ^d , chamado de *vizinhança* de \mathcal{A} , onde cada elemento $\mathbf{n} \in \eta$ deve ser interpretado como as coordenadas relativas das células vizinhas; ou seja, dada uma célula c localizada em $p \in \chi^d$, a sua vizinhança $\eta(c)$ é o conjunto de células localizadas em $\mathbf{p} + \mathbf{n}$; por simplicidade, supõem-se que $(0, \dots, 0) \in \eta$;
- $\delta : \phi^{k+1} \rightarrow \phi$ é a chamada função de transição local de \mathcal{A} , onde k é a quantidade de células em η .

Além desses 4 (quatro) elementos, são partes importantes na descrição de um autômato celular a definição da condição de contorno e a vizinhança destas células do contorno do domínio considerado. Os conceitos de vizinhança e contorno serão descritos mais adiante. A partir da discretização em uma malha d -dimensional, obtêm-se células regulares que completam todo o espaço formado. A topologia de cada célula deve satisfazer geometricamente os limites de um polígono regular. A Fig. 1 apresenta os principais tipos de grades típicas: quadrada, triangular e hexagonal (ou *honeycomb*). No entanto, a mais usada é a quadrada [18].

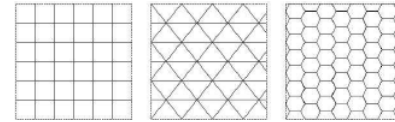


Figura 1 - Diferentes topologias de células de ACs bidimensionais.

Todavia, é necessário considerar alguns fatores importantes para as regras de transição, como: dimensão, vizinhança, contorno, condições iniciais, conjunto de estados possíveis e regras de interação. Chavez e Liang [18] apresentam 3 (três) características fundamentais dos autômatos celulares, descritas por:

- Paralelismo: os estados dos elementos são atualizados simultaneamente;
- Localidade: o novo estado de uma célula é determinado pelo seu estado anterior e pelo estado dos vizinhos;
- Homogeneidade: todas as células aplicam as mesmas regras de evolução.

Considerando as células distribuídas em uma grade bidimensional, define-se a função de transição como

$$a_{i,j}^{(t+1)} = \phi \left[\sum_{m=-r_1}^{r_1} \sum_{n=-r_2}^{r_2} \alpha_{m,n} a_{i+m,j+n}^{(t)} \right], \quad (1)$$

onde $\alpha_{m,n}$ representa o peso de influência da célula $(i+m, j+n)$ na célula (i, j) , sujeita aos parâmetros r_1 (extensão da vizinhança na horizontal) e r_2 (extensão da vizinhança na vertical), t o instante de tempo, $a_{i,j}^{(t)}$ o estado atual da célula (i, j) , e $a_{i,j}^{(t+1)}$ representa o próximo estado da célula (i, j) , dada pelo somatório das células vizinhas.

Em um autômato celular, as funções de transição podem ser de 2 (dois) tipos:

- **Função Determinística:** É uma função onde, dada uma configuração para a vizinhança considerada, existe um único estado possível para a célula analisada;

- **Função Probabilística:** É uma função onde, as regras são definidas pelas probabilidades de ocorrência, ou seja, definidas as regras para a vizinhança existe um conjunto de possibilidades de estados para a célula, que são escolhidos com base nas variáveis aleatórias.

A partir do conjunto de estados que cada célula pode assumir, sendo este um conjunto finito de qualquer tipo de dados ou informações, são atribuídos valores a cada célula para iniciar a simulação. O estado da célula após algumas interações, sendo que o mesmo não tenha influência da configuração inicial, é tido como o resultado desta simulação.

A cada iteração, a função de transição ϕ determina uma nova configuração na grade, $C_t : \chi \rightarrow \eta$ dada por $C_{t+1} = \phi(C_t)$, onde $C_{t+1}(c) = \phi(C_t(i)|i \in \eta(c))$. Esta regra é aplicada a cada iteração da simulação e pela sensibilidade os estados finais podendo assumir grandes variações quando comparados ao estado inicial, justificando a complexidade dos resultados.

Durante a evolução dos ACs, podem ser classificados em 4 (quatro) classes qualitativas (ver Fig. 2), como segue:

- Classe 1: Independentemente da configuração inicial, o AC tende a um estado globalmente homogêneo, por exemplo, todos um (1) ou todos zeros (0) no caso binário;
- Classe 2: Atinge um estado estável formado por estruturas espaciais periódicas estáveis;
- Classe 3: Os sucessivos estados do AC não apresentam estrutura alguma, e sim um comportamento aleatório. A maioria de ACs da classe 3 gera padrões fractais;
- Classe 4: Podem ser geradas estruturas estacionárias, periódicas ou fractais. As estruturas persistentes podem ser também simples, crescentes ou complexas.

Segundo Wolfram, o comportamento universal de um AC e suas características dependem somente da classe a que pertence.

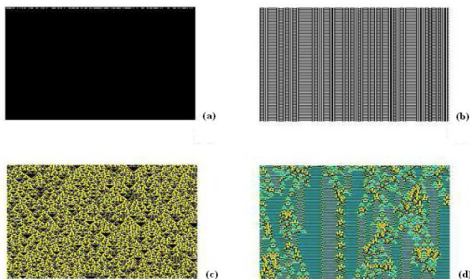


Figura 2 - Padrões espaço-temporais característicos de regras típicas em cada uma das quatro classes de Wolfram. (a) Classe 1, (b) Classe 2, (c) Classe 3 e (d) Classe 4.

2.2. Espaço e dimensão de um AC

Um modelo de autômato celular pode ser de diferentes dimensões. Para a sua criação, primeiramente, define-se uma grade regular como sendo uma discretização do domínio de dimensão d , em que as células preenchem o domínio completamente, e ao ocorrer uma translação da grade em d direções independentes, obtém-se a mesma grade.

Na Fig. 3, tem-se uma representação das d dimensões de um autômato celular \mathcal{A} . Para $d = 1$, existe uma sequência (finita ou não) de autômatos justapostos em linha. O próximo estado de uma célula $c(i)$ depende do seu estado atual e do estado das células vizinhas $c(i - r)$ e $c(i + r)$, onde r é o espaçamento entre as células, também conhecido como raio de vizinhança. Para $d = 2$ tem-se um plano. Nesse caso, uma célula $c(i, j)$ possui, em sua vizinhança, as células $c(i - r, j)$, $c(i, j - r)$, $c(i, j + r)$ e $c(i + r, j)$, sendo que a transição é feita pela célula $c(i, j)$, que está no centro desses elementos. Por fim, para $d = 3$ tem-se um volume.

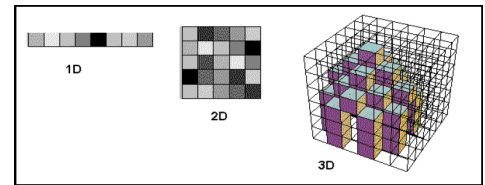


Figura 3 - Autômato Celular em 1D, 2D e 3D, respectivamente.

2.3. Vizinhança e contorno

Em um AC $\mathcal{A} = (\chi, \phi, \eta, \delta)$, a vizinhança de uma célula c , $\eta(c)$, é o conjunto de células da grade que determinarão o próximo estado de c .

Para o caso em que $\chi = 1$, a vizinhança de uma célula c é definida pelas células $(r - c)$ e $(r + c)$, onde r é o espaçamento (raio) entre as células. Assim, se $r = 1$, tem-se os primeiros vizinhos; se $r = 2$, tem-se os segundos vizinhos; e se $r = n$, tem-se os n -vizinhos.

Para o caso em $\chi = n$, existem dois tipos de vizinhanças simples e comuns. A vizinhança de von Neumann e a de Moore, as quais serão definidas a seguir.

Seja c uma célula no ponto x de χ^d , com $x = (x_1, \dots, x_d)$. Considere as normas $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ e $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, d\}$. As definições das duas vizinhanças são as seguintes:

- vizinhança de Von Neumann: $\eta_{VN}(c) = \{z | z \in \chi^d, \|x - z\|_1 \leq r\}$, onde r é o raio da vizinhança;
- vizinhança de Moore: $\eta_M(c) = \{z | z \in \chi^d, \|z - x\|_\infty \leq r\}$, onde r é o raio da vizinhança.

As Figs. 4 e 5 ilustram as vizinhanças de von Neumann e de Moore para os casos em que $r = 1$ e $r = 2$ num plano χ^2 . Por fim, a Fig. 6 apresenta um tipo de vizinhança aleatória.

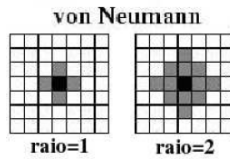


Figura 4 - Vizinhanças de Neumann.

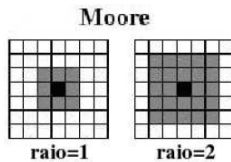


Figura 5 - Vizinhanças de Moore.

Na prática, ao simular uma determinada regra de um autômato celular, o número de células deve ser finito em χ^d . Neste caso, uma célula que está na fronteira não terá a mesma vizinhança que outras células internas. Logo, é preciso definir especificamente uma regra de evolução diferente. Tal regra é conhecida como condição de contorno (ou condição de borda).

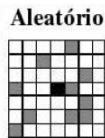


Figura 6 - Vizinhanças aleatórias.

A seguir, definem-se os 3 (três) principais tipos de condições de contorno:

1. Periódica: neste caso, considera-se uma grade onde, para cada dimensão, as bordas estão fundidas. Assim, para $d = 1$, tem-se que a última célula é vizinha da primeira e que a primeira célula é vizinha da última, formando um anel. Para $d = 2$, os lados esquerdo e direito, superior e inferior, estão conectados gerando uma grade toroidal;
2. Reflexiva: é definida de modo que cada célula da borda difunde internamente a grade, de forma a simular uma vizinhança completa;
3. Fixa ou constante: é definida de modo que a vizinhança é completada com células “virtuais” com um valor pré-definido, por exemplo, 0 (zero) ou 1 (um). Estes valores serão mantidos durante a evolução do AC.

A Fig. 7 ilustra as condições de contorno supracitadas para o caso unidimensional. Vale lembrar que, a natureza do sistema que está sendo modelada é que irá definir o tipo de condição de contorno a ser utilizada.

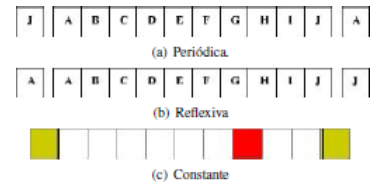


Figura 7 - Condições de contorno.

3. Autômatos celulares para tráfego de veículos

O primeiro modelo de AC usado para modelagem de tráfego de veículos, possivelmente foi proposto por Cremer e Ludvig, em 1986 [29]. No entanto, o uso dos ACs para modelagem do tráfego de veículos começou a difundir-se a partir do modelo proposto por K. Nagel e M. Schreckenberg, conhecido como modelo NaSch, em 1992. A partir desse modelo, vários autores propuseram melhorias ao modelo de Nagel visando torna-lo mais próximo das condições reais de trânsito.

Em um modelo de AC para tráfego tem-se:

- χ , uma grade d -dimensional que representa a via, onde cada célula representa um pequeno trecho da pista. Por exemplo, se $d = 1$, tem-se uma pista com uma faixa. Para representar uma pista com duas faixas, considera-se duas pistas simples unidimensionais e adjacentes;
- ϕ , o conjunto de estados que a célula pode assumir e é composto de informações como: ocupação da célula, velocidade do veículo que a ocupa, tamanho do veículo, entre outras. Essas informações dependem do modelo considerado;
- η , a vizinhança, é um conjunto de células à frente da célula avaliada, no sentido do tráfego.
- δ , a função de transição é o conjunto de regras que decidirá sobre a movimentação dos veículos, e também varia para cada modelo.

A maioria dos trabalhos publicados, consideram para simulação dos modelos, condições de contorno periódicas com um número fixo de veículos [30, 31]. Além disso, utiliza-se o tamanho de cada célula igual a 7,5 m e uma velocidade de $v_{max} = 5$ células por passo de tempo. Cada célula pode ter um estado: vazia ou ocupada. Assim, pode-se concluir que para um passo de tempo $\Delta t = 1$ segundo, um veículo que está com velocidade igual a $v = 1$ célula por segundo, este veículo está a 7,5 m/s ou 27 km/h [32]. Os principais modelos existentes são: modelo regra 184 [26], modelo Fukui-Ishibashi [33] e o modelo pioneiro de NaSch [34].

4. Modelo proposto

No modelo desenvolvido para o tráfego de veículos com pista simples (uma faixa) considera-se uma malha discreta unidimensional de comprimento L como sendo o comprimento de um pequeno trecho da pista. A partir da definição da malha unidimensional (tamanho da pista), faz-se a divisão da malha em n partes iguais. Cada parte é nomeada célula. A cada célula podem ser atribuídos os seguintes valores:

- 0 - célula livre;
- 1 - célula ocupada por um veículo;

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Figura 8 - Exemplo de um vetor pista com 10 posições.

Considerou-se o comprimento de cada veículo $cv = 7,5$ m, o que implica na ocupação média de cada veículo em um engarrafamento mais a distância até o veículo sucessor, e cada passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ s (um segundo). Portanto, um veículo que está com uma velocidade igual a $v = 1$ (uma célula por segundo), está a 7,5 m/s ou 27 km/h. Assim, têm-se as seguintes velocidades:

- $v = 0$ - zero células por segundo: 0 km/h;
- $v = 1$ - uma célula por segundo: 27 km/h;
- $v = 2$ - duas células por segundo: 54 km/h;
- $v = 3$ - três células por segundo: 81 km/h;
- $v = 4$ - quatro células por segundo: 108 km/h;
- $v_{max} = 5$ - cinco células por segundo: 135 km/h;

Observa-se que o valor da velocidade de cada veículo representa o número de células que ele irá se descolar a cada passo de tempo. Logo, se um veículo i estiver com uma velocidade v_i , por exemplo, significa que ele se movimentará v_i células. Isto é, se o veículo i está na posição l_i no instante de tempo t (l_i^t) e sua velocidade é v_i^t , então a nova posição desse veículo no instante de tempo seguinte $t + 1$ é dada por

$$l_i^{t+1} = l_i^t + v_i^t. \quad (2)$$

As regras microscópicas de movimentação para cada veículo foram definidas levando-se em conta a distância (gap) entre o i -ésimo veículo e o veículo a sua frente, considerando a velocidade do i -ésimo veículo no instante de tempo anterior. Neste modelo, todos os motoristas tentam andar sempre na maior velocidade possível (no caso, $v_{max} = 5$) e, eventualmente, com alguma probabilidade $p = prob$, o motorista reduz a velocidade em uma unidade por segundo. Esta última regra

é muito importante para simular tráfegos mais realistas, além de ser utilizada em diversos trabalhos encontrados na literatura. A seguir, definem-se as seguintes regras de movimentação que compõem este modelo:

- Aceleração: se a velocidade do veículo i , v_i , for menor que v_{max} e sua distância para o próximo veículo (gap) for maior que $v_i + 1$, $gap > v_i + 1$, então a velocidade é aumentada em uma unidade, $v_i^{t+1} = v_i^t + 1$;
- Aleatoriedade: com uma probabilidade $p = prob$, definida inicialmente, a velocidade de cada veículo, se maior que 0 (zero), é reduzida em uma unidade ($v_i^{t+1} = v_i^t - 1$);
- Frenagem: se a distância de um veículo até o próximo veículo (gap) for menor ou igual a sua velocidade ($gap \leq v_i$), então ele deve reduzir sua velocidade para $v_i = gap - 1$;
- Atualização da posição: Cada veículo avança v posições, ou seja, $l_i^{t+1} = l_i^t + v_i^t$.

Para implementar o modelo computacionalmente, além destas regras, deve ser fornecido o tamanho da pista L , que definirá o vetor unidimensional “pista”, o número de veículos nv , o comprimento de cada veículo (célula) cv , a probabilidade do motorista reduzir a velocidade $prob$ e calcular a quantidade de células que definirá o vetor *pista*. Na sequência, o vetor pista é preenchido com zeros, indicando que a pista está vazia.

Os veículos são colocados na pista de forma aleatória e sua posição é identificada por meio de um vetor auxiliar definido com tamanho igual ao número de veículos dado inicialmente. A velocidade de cada veículo é designada por meio de um número gerado aleatoriamente e armazenada em um outro vetor. Inicia-se o algoritmo escolhendo um veículo de forma aleatória que está na posição l_i da pista, também definido de forma aleatória. Aplica-se, o conjunto de regras para movimentar o veículo escolhido aleatoriamente.

A cada iteração, o programa calcula a densidade e o fluxo utilizando as seguintes equações

$$\rho = \frac{N^t}{L}, \quad (3)$$

N^t representa o número de veículos, no instante de tempo t , sobre um trecho L da pista. O fluxo é calculado pela seguinte equação

$$J = \frac{\sum v_i^t}{L}, \quad (4)$$

onde v_i^t é velocidade instantânea do i -ésimo veículo no instante t no trecho da pista considerado.

O algoritmo atualiza conjuntamente a posição, a velocidade e o estado da célula. O processo é repetido até que todos os veículos saiam da pista. Pode-se realizar

uma nova simulação com uma configuração inicial diferente. O número de simulações é definido pela variável $nsim$. Como resultados o programa retorna os gráficos densidade *vs.* fluxo e densidade *vs.* velocidade, obtidos a partir das Eqs. (3) e (4).

O algoritmo com as regras de movimentação dos veículos foi implementado em linguagem Fortran 95. As simulações foram realizadas em um computador Intel® Core™ I5 – 240M processor 2.30 GHz, 4 GB memory e 750 HD.

5. Simulações

Considerou-se $prob = 0,3$ com uma pista com 300 células (2,25 km) e densidade variável entre $\rho = 0,00$ a $\rho = 1,00$. Foram realizadas 100 simulações para diferentes configurações iniciais garantindo resultados independentes das condições iniciais.

Na Fig. 9, tem-se o diagrama fundamental obtido conforme o valor do parâmetro estocástico $prob$. Este parâmetro indica a porcentagem dos veículos que podem reduzir a velocidade para um determinado instante

de tempo t .

Analisando a curva que representa o fluxo, quando a densidade $\rho_{crit} \leq 0,2$, tem-se o chamado regime de fluxo livre.

Essa fase permite que os motoristas andem na velocidade desejada e de forma geral, se aproximando da velocidade máxima. Com este comportamento, o diagrama fundamental apresenta um crescimento linear com densidade variando entre $0 < \rho_{crit} \leq 0,2$. Quando $\rho_{crit} > 0,2$, tem-se a região de fluxo congestionado, onde o fluxo diminui aproximando-se de zero, entretanto ainda existe. Nessa fase, a grande concentração de veículos faz com que estes se agrupem em engarrafamentos e um veículo que deixa um destes engarrafamentos encontra outro logo à frente criando o efeito para e anda. Quando $\rho_{crit} = 0,2$, tem-se a mudança de regime de tráfego, conhecida como densidade crítica. Em geral, essa medida depende do parâmetro estocástico $prob$, que representa as situações onde nem todos os motoristas desejam andar na velocidade máxima, mesmo tendo espaço disponível para isso. Quanto maior for o valor de $prob$, menor será a densidade crítica.

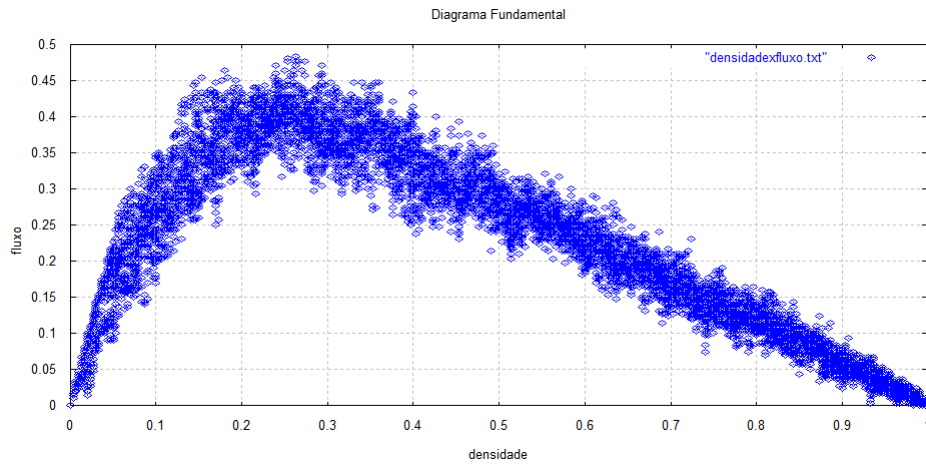


Figura 9 - Diagrama Fundamental para $prob = 0,3$.

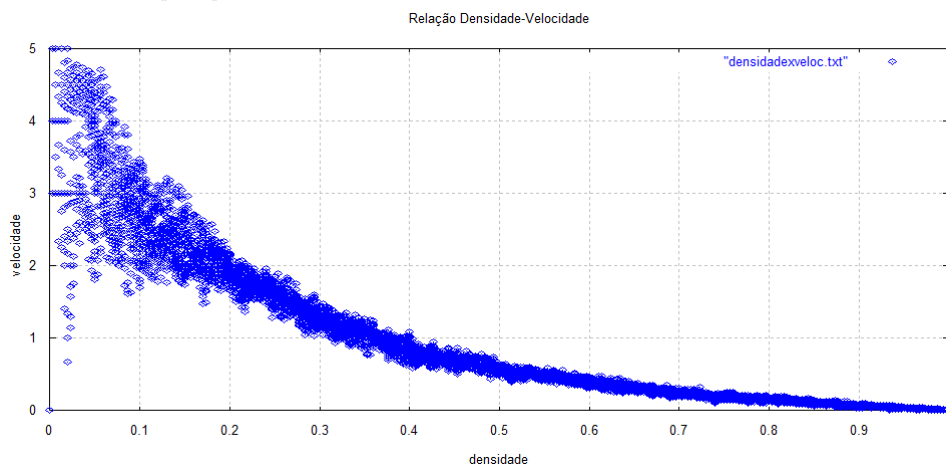


Figura 10 - Densidade *vs.* velocidade, para $prob = 0,3$.

A Fig. 10 mostra como a velocidade varia quando densidade atinge seu valor máximo. Para $\rho < 0.2$, os veículos conseguem andar na velocidade desejada caracterizando o regime de tráfego livre, porém, para $\rho > 0.2$, os veículos ajustam sua velocidade conforme o espaço disponível a sua frente evidenciando o regime de tráfego congestionado.

6. Conclusões

O uso de autômatos celulares para representar sistemas físicos complexos, que envolvem inúmeras variáveis de calibração e parâmetros, é uma excelente ferramenta para obter resultados complexos de uma maneira bastante simples e com poucos recursos computacionais. Simular o tráfego de veículos, seja em vias urbanas ou não, é uma tarefa que exige implementação de muitas variáveis que compõem esse tipo de sistema.

Este artigo apresentou um modelo microscópico de tráfego de veículos baseado em autômatos celulares. O modelo proposto tem a vantagem de apresentar bons resultados com poucas variáveis de calibração. É importante ressaltar que o modelo de pista única é simples, porém, é capaz de capturar as principais características físicas do tráfego de veículos, tais como: fluxo, densidade e velocidade.

Agradecimentos

Agradecemos ao suporte da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- [1] B.D. Greenshields, Proc. Highw. Res. Board **14**, 448 (1935).
- [2] W.F. Adams, J. Inst. Civil Engineers **4**, 160 (1936).
- [3] H. Greenberg, Opns. Res. **7**, 79 (1959).
- [4] M.J. Lighthill and G.B. Whitham, Proc. Roy. Soc. A **229**, 317 (1955).
- [5] D. Helbing, A. Hennecke, V. Shvetsov and M. Treiber, Transpn. Res. Part B **35**, 183 (2001).
- [6] H.M. Zang and T. Kim, Transpn. Res. Part B **39**, 385 (2005).
- [7] L.M. Gramani, *Notas em Matemática Aplicada* (Sbmac, São Paulo, 2010), p. 1295.
- [8] Q.S. Wu, X.B. Li and R. Jiang, The European Physical Journal B **48**, 265 (2005).
- [9] K. Nassaba, Phys. A **369**, 841 (2006).
- [10] M.E. Larraga, J. A. del Rio and A. Mehta, J. Phys. A: Math. Gen. **307**, 527 (2003).
- [11] X. Li, Q. Wu and R. Jiang, Physica A **367**, 479 (2006).
- [12] R. Jiang and Q. Wu, Phys. A **364**, 493 (2006).
- [13] W. Knospé, L. Santen, A. Schadschneider and M. Schreckenberg, J. Phys. A **35**, 3369 (2002).
- [14] V.H.P. Louzada and W.C. Ferreira, Biomatemática-Unicamp **18**, 15 (2008).
- [15] R.A.T. Massahud and C.A. Paixão, Anais do Cnmac **3**, 1122 (2010).
- [16] C.R.K. Ferreira, *Simulação do Espalhamento Geográfico da Doença Meningite Viral Utilizando Autômatos Celulares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2009.
- [17] A.C.S. Vilcarromero, R.S.M. Jafelice and L.C. Barros, Biomatemática **20**, 147 (2010).
- [18] G.C. Chavez and Z. Liang, in: *Anais do IV Workshop em Tratamento de Imagens*, editado por A. Araújo and C.J.S. Oliveira (DCC/UFMG, Belo Horizonte, 2003).
- [19] C.C. Martins, *Autômato Celular Aplicado no Crescimento de Câncer*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2010.
- [20] E.J.A. Alonso, *Autômatos Celulares Generalizados como Modelos de Influência para Agrupamentos de Dados e Interações Sociais*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- [21] R.R. Bastos, *Autômato Celular e suas Aplicações no Meio Ambiente*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pelotas, 2011.
- [22] B.J.N. Wylie, *Application of Two-Dimensional Cellular Automaton Lattice-Gas Models to the Simulation of Hydrodynamics*. Tese de Doutorado, Universidade de Edimburgo, 1990.
- [23] S. Rajeswaran, International Journal of Computer Applications **56**, 30 (2012).
- [24] E.B. Lima, *Modelos Microscópicos Para Simulação do Tráfego Baseado em Autômatos Celulares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, 2007.
- [25] A.L.S. Moraes, *Um Estudo sobre a Aplicação de Autômatos Celulares na Simulação de Fenômenos Ambientais e Aspectos Dinâmicos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de Pelotas, 2007.
- [26] S. Wolfram, *A New Kind of Science* (Wolfram Media, Champaign, 2001).
- [27] L. Gremonini, E. Vicentini, Revista Eletrônica Lato-Sensu - Unicentro **6**, 1 (2008).
- [28] T.C. Silva, *Simulações Computacionais Aplicadas ao Processo de Evacuação de Ambientes: Uma Análise Comparativa de Variantes Geométricas Via Autômatos Celulares Bidimensionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [29] D.A. Rosenblueth and C. Gershenson, Complex Systems Publications Inc. **19**, 305 (2011).
- [30] A. Benyoussef and H. Chakib, Phys. Rev. E **68**, 026129 (2003).
- [31] T. Nagatani, J. Physique A **26**, 781 (1993).
- [32] S. Maerivoet and B. Moor, Physics Reports **419**, 1 (2005).
- [33] H. Fukui and Y. Ishibashi, Journal of the Physical Society of Japan **65**, 1868 (1996).
- [34] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Physique I **2**, 2221 (1992).