

Formalismo óptico matricial e aplicações

(Optical matrix formalism and applications)

F.A. Callegari¹, A.A. Freschi

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, Brasil
Recebido em 12/2/2015; Aceito em 25/3/2015; Publicado em 30/9/2015

O formalismo óptico matricial é desenvolvido a partir da aplicação da lei de Snell para descrever a refração de raios óticos numa superfície esférica. A seguir, dito formalismo é aplicado para achar e justificar parâmetros típicos e expressões como distância focal, condição de imagem e aumento lateral para o caso de uma lente esférica fina imersa em ar. Além disso, é estudado o caso de uma lente esférica fina imersa em dois meios óticos com índices de refração diferentes e encontrados os parâmetros e expressões correspondentes para este caso.
Palavras-chave: óptica matricial, lentes finas, foco, aumento lateral.

The optical matrix formalism is developed by applying Snell law to describe the refraction of optical rays in a spherical surface. This formalism is then applied to find and justify typical parameters and expressions as focal distance, image condition and lateral magnification for a thin spherical lenses immerse in air. Also, the case of thin spherical lenses immersed in two media with different refraction index is studied, and the corresponding parameters and expressions are found.

Keywords: matrix optics, thin lenses, focus, lateral magnification.

1. Introdução

No ensino da óptica geométrica, o formalismo matricial nem sempre é utilizado ou, quando ensinado, não é totalmente explorado. Contudo, ele é intuitivo e o seu uso fornece resultados baseados em considerações físicas, ao invés de geométricas. Neste trabalho, é desenvolvido o formalismo óptico matricial aplicando a lei de Snell da refração a uma superfície esférica. A seguir, esse formalismo é utilizado para obter os resultados conhecidos da distância focal, a condição de imagem e aumento lateral para uma lente esférica fina imersa em ar. O estudo é então estendido para o caso mais geral de uma lente fina imersa em dois meios de índice de refração diferentes. Este ultimo caso tem interesse prático mas não é estudado na bibliografia usualmente utilizada.

2. Óptica matricial

A notação utilizada no desenvolvimento do formalismo matricial e a forma final das matrizes correspondem às apresentadas na Ref. [1]. Também será assumida a convenção de sinais da mesma referência, que é a convenção adotada pela maior parte dos textos. Desde que lentes esféricas serão tratadas neste trabalho, vamos analisar primeiro a refração de um raio óptico numa superfície

esférica, como mostrado na Fig. 1.

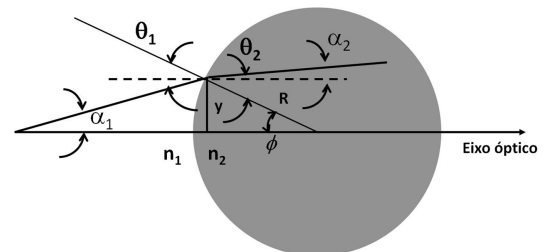


Figura 1 - Diagrama esquemático do exemplo estudado neste trabalho.

Na figura, o raio incidente se propaga num meio com índice de refração n_1 e faz um ângulo α_1 com o eixo óptico. Esse raio é refratado na superfície esférica e transmitido com ângulo α_2 (com respeito ao eixo óptico) em um meio com índice de refração n_2 . A altura, com respeito ao eixo óptico, na qual o raio incidente atinge a esfera é y . Devemos aplicar a lei de Snell, para o qual devemos considerar os ângulos de incidência e refração a respeito da normal à interface. No nosso caso, dita normal está dada pelo raio da esfera, R , o qual faz um ângulo ϕ com o eixo óptico. Chamamos os ângulos de incidência e refração de θ_1 e θ_2 , respectivamente. Aplicando a lei de Snell, temos

¹E-mail: fulvio.callegari@ufabc.edu.br.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (1)$$

Os ângulos θ_1 e θ_2 podem ser escritos como função dos ângulos α_1 , α_2 e o ângulo ϕ como

$$\theta_1 = \alpha_1 + \phi, \quad \theta_2 = \alpha_2 + \phi. \quad (2)$$

Assim, a lei de Snell fica

$$n_1 \sin(\alpha_1 + \phi) = n_2 \sin(\alpha_2 + \phi). \quad (3)$$

A seguir, a aproximação paraxial é aplicada. Em dita aproximação, é assumido que os ângulos θ_1 e $\theta_2 \ll 1$. Como consequência, α_1 , α_2 e ϕ são também muito pequenos, e também $y \ll R$. Nessas condições,

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &\approx \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 &\approx 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{e} \quad \begin{aligned} \sin \alpha_2 &\approx \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 &\approx 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Também, para o ângulo auxiliar ϕ , temos,

$$\begin{aligned} \sin \phi &\approx y/R \\ \cos \phi &\approx 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Desenvolvendo a Eq. (3),

$$\begin{aligned} n_1(\sin \alpha_1 \cos \phi + \sin \phi \cos \alpha_1) &= \\ = n_2(\sin \alpha_2 \cos \phi + \sin \phi \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Substituindo as Eqs. (4) e (6) na Eq. (7), obtemos

$$n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 + y \frac{n_1 - n_2}{R}. \quad (8)$$

Essa expressão descreve a refração de um raio numa superfície curva. Notar que, se a superfície for plana, *i.e.*, R tendendo a infinito, a Eq. (8) se reduz à lei de Snell, escrita na aproximação paraxial. Agora, devemos descrever a variação da altura, y , que um raio sofre na propagação retilínea num meio com índice de refração n_1 . Para isso, consideramos a situação mostrada na Fig. 2.

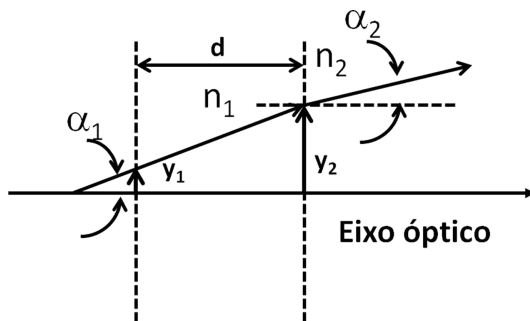


Figura 2 - Cálculo da variação da altura do raio respeito do eixo óptico.

A variação da altura com respeito ao eixo óptico quando o raio percorre uma distância d (no meio com índice n_1), está dada por

$$y_2 = y_1 + d \tan \alpha_1. \quad (9)$$

Na aproximação paraxial, $\alpha_1 \ll 1$, daí, $\tan \alpha_1 \sim \alpha_1$ e a Eq.(8) se reduz a

$$y_2 = y_1 + d \alpha_1. \quad (10)$$

Podemos agora expressar as Eqs. (8) e (10) em forma matricial, definindo o vetor $(n\alpha, y)$.

Para a refração na superfície esférica, temos

$$\begin{pmatrix} n_2 \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_1}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Notar que, aplicando a operação de multiplicação de matrizes, o resultado correspondente ao elemento $n_2 \alpha_2$ equivale à Eq. (8). Já a equação $y_2 = y_1$, confirma que não houve mudança na altura y do raio na refração.

Para o deslocamento do raio, temos

$$\begin{pmatrix} n_2 \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{n_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

onde o resultado correspondente ao elemento $n_2 \alpha_2$ é a lei de Snell (na aproximação paraxial) e o resultado correspondente ao elemento y_2 equivale à Eq. (10).

3. Lente fina imersa em ar

A formulação matricial é muito útil quando temos vários elementos refrativos em cascata. O resultado final é obtido pela multiplicação das matrizes correspondentes a cada elemento. Como um exemplo de aplicação, vamos estudar o caso de uma lente fina, com índice de refração n , imersa em ar, como mostrado na Fig. 3.

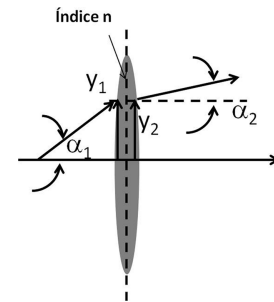


Figura 3 - Lente esférica fina em ar.

Consideramos a luz se propagando da esquerda para a direita. Um raio se propagando no ar, fazendo um ângulo α_1 com respeito ao eixo, atinge a lente num ponto com altura y_1 . A seguir, esse raio abandona a lente num ponto com altura y_2 e com ângulo α_2 . Como temos duas superfícies refratoras, vamos considerá-las separadamente, como ilustra a Fig. 4.

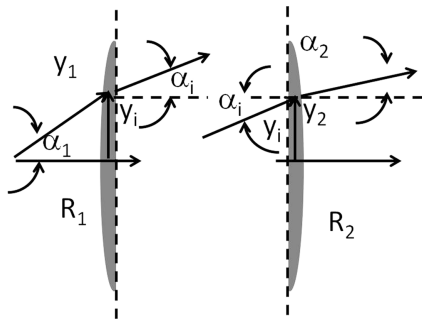


Figura 4 - Lente esférica fina em ar, duas superfícies refratoras.

Os raios de curvatura à esquerda, R_1 , e à direita, R_2 , estão indicados na figura. Ao estarmos considerando lentes finas, a altura do raio, y , não muda devido ao deslocamento do raio no interior da lente, *i.e.*, $y_1 = y_i = y_2$. Agora devemos expressar o vetor $(n_2\alpha_2, y_2)$ como função do vetor $(n_1\alpha_1, y_1)$. Vamos usar o vetor $(n\alpha_i, y_i)$ como intermediário. Para a superfície refratora à direita (com R_2), a Eq. (11) fica

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-n}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha_i \\ y_i \end{pmatrix}. \quad (13)$$

onde $n_2 = 1$, pois temos ar à direita dessa interface. A seguir, deveremos expressar $(n\alpha_i, y_i)$ como função de $(n_1\alpha_1, y_1)$.

$$\begin{pmatrix} n\alpha_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n-1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

onde $n_1 = 1$, já que agora, à esquerda da superfície refratora R_1 , temos ar. A seguir, expressamos o vetor $(n_2\alpha_2, y_2)$ como função do vetor $(n_1\alpha_1, y_1)$, introduzindo a Eq. (14) na Eq. (13) e obtemos

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-n}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n-1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

A seguir, aplicamos simplesmente a operação de multiplicação de matrizes para obtermos

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Onde reconhecemos o elemento da linha 1 e coluna 2 da matriz da Eq. (16) como sendo o negativo do inverso da distância focal da lente, $-1/f$. É bom lembrar aqui que o conceito de foco em lentes finas é introduzido sem demonstração em alguns livros de texto básicos usualmente utilizados, por exemplo as Refs. [2] e [3]. Como saberíamos, a partir do formalismo matricial, do significado desse elemento? Para isso, basta considerar um feixe de raios paralelos ao eixo óptico, *i.e.*, incidindo desde o infinito. Consideremos um desses raios, a uma altura y_1 com respeito ao eixo óptico. A seguir, dito raio é refratado pela lente e se propagará uma distância z à direita, ver Fig. 5.

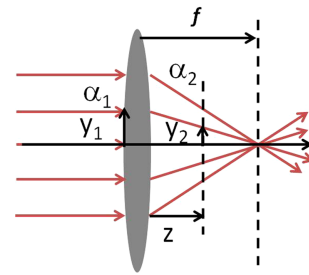


Figura 5 - Raios paralelos incidindo na lente esférica fina em ar.

Vamos aplicar o formalismo matricial ao caso representado na Fig. 5

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

onde a primeira matriz do segundo membro da Eq. (17) descreve o deslocamento, z , do raio, após ter sido refratado pela lente, y_2 é a altura do raio com respeito ao eixo óptico no ponto z . Para simplificar a notação, o elemento 1-2 da matriz correspondente à lente foi substituído por $-1/f$. Observar que a ordem de multiplicação das matrizes é fundamental (lembrar que o produto de matrizes não é comutativo). Como regra, podemos ler a Eq. (17) da direita para a esquerda e pensar no primeiro elemento que o raio incidente, (α_1, y_1) encontra, que é a lente. A seguir, vem o deslocamento através do espaço. Multiplicando matrizes a Eq. (17) fica

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ z & 1 - \frac{z}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Resolvendo para y_2 , temos

$$y_2 = z\alpha_1 + y_1\left(1 - \frac{z}{f}\right). \quad (19)$$

Mas $\alpha_1 = 0$, por termos raios incidentes paralelos ao eixo óptico. Daí a Eq. (19) fica

$$y_2 = y_1\left(1 - \frac{z}{f}\right). \quad (20)$$

A interpretação da Eq. (20) é óbvia agora: se $z = f$, y_2 será igual a zero, independente do valor de y_1 , em outras palavras, a lente focaliza os raios em $z = f$. Foi suposto implicitamente uma lente convergente, *i.e.* $f > 0$ ($R_1 > 0$ e $R_2 < 0$, pela convenção de sinais adotada). Contudo, essa dedução vale também para lentes divergentes. Observar na Eq. (20), se $f < 0$, os raios focam em $z = -f$ (foco virtual).

Outra dedução que pode ser feita agora, a partir do formalismo matricial, é a condição de imagem, *i.e.*, dado um objeto a uma certa distância, s_o , da lente, qual será a distância imagem, s_i ? Em geral isto é resolvido através de considerações geométricas. Contudo, o formalismo matricial nos dá a oportunidade de resolver esse problema através de argumentos puramente físicos.

Podemos considerar cada ponto do objeto como um gerador de ondas esféricas divergentes (i.e, se afastando do ponto objeto). Para formar uma imagem, a lente deve fazer com que essas ondas esféricas divergentes se transformem em ondas esféricas convergentes, e o ponto de convergência será justamente o ponto imagem correspondente ao ponto objeto. Essa ideia está esquematizada na Fig. 6, onde também são representados, além das referidas ondas, alguns raios ópticos perpendiculares às frentes de onda. Os símbolos h_o e h_i representam a altura do objeto e da imagem, respectivamente.

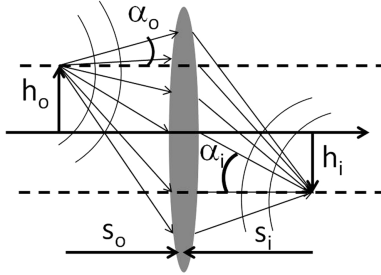


Figura 6 - Formação de imagem a través da lente.

Fazendo a análise matricial, temos

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_o & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_o \\ h_o \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Como já dito, para entendermos equações ópticas matriciais, podemos lê-las da direita para a esquerda. Inicialmente, o raio que sai do objeto, com ângulo α_o e altura h_o , percorre uma distância s_o . A seguir, o raio é refratado na lente. Por último, o raio percorre uma distância s_i , até o ponto imagem correspondente. Fazendo o produto indicado na Eq. (21), obtemos

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s_o}{f}, & -\frac{1}{f} \\ s_i + s_o - \frac{s_i s_o}{f}, & 1 - \frac{s_i}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_o \\ h_o \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Resolvendo a equação para a altura do ponto imagem, h_i , temos

$$h_i = \left(s_i + s_o - \frac{s_i s_o}{f} \right) \alpha_o + \left(1 - \frac{s_i}{f} \right) h_o. \quad (23)$$

A condição de imagem já mencionada envolvendo as ondas esféricas divergentes e convergentes, pode ser expressa matematicamente a partir da Eq. (23). A variação da altura h_i de um ponto imagem (o ponto extremo, por exemplo), deve ser independente do ângulo α_o que corresponde ao conjunto de ângulos com o qual os raios são emitidos no ponto objeto correspondente. Matematicamente

$$\frac{\partial h_i}{\partial \alpha_o} = \left(s_i + s_o - \frac{s_i s_o}{f} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}. \quad (24)$$

Naturalmente surge daí a condição de imagem, também conhecida como equação de Gauss.

Outro resultado que pode ser obtido agora é o do aumento lateral da imagem, definido como

$$M_T = \frac{h_i}{h_o}. \quad (25)$$

Substituindo a condição de imagem, Eq. (24), na Eq. (23), temos

$$h_i = \left(1 - \frac{s_i}{f} \right) h_o. \quad (26)$$

Daí, com ajuda do último termo da Eq. (24) é simples mostrar que

$$M_T = \frac{h_i}{h_o} = \left(1 - \frac{s_i}{f} \right) = -\frac{s_i}{s_o}, \quad (27)$$

o qual já é amplamente conhecido.

4. Lente fina imersa em dois meios ópticos diferentes

O próximo passo é calcularmos a distância focal, a condição de imagem e o aumento lateral para uma lente fina, com índice de refração n , imersa em dois meios com índices n_1 e n_2 (ver Fig. 7).

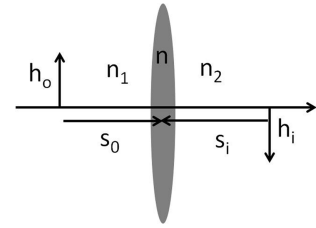


Figura 7 - Lente fina imersa em meios com índices n_1 e n_2 .

Esta situação é de grande interesse prático, por exemplo, nos microscópios de imersão, onde o espaço entre a face externa da objetiva e a amostra (ou a cobertura da amostra) é preenchida com óleo. Isto é feito para aumentar a abertura numérica do microscópio [4].

Aplicando o método matricial, temos

$$\begin{pmatrix} n_2 \alpha_i \\ h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \frac{s_i}{n_2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -\left(\frac{n_2 - n}{R_2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1, & -\left(\frac{n - n_1}{R_1}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \frac{s_o}{n_1}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_o \\ h_o \end{pmatrix}. \quad (28)$$

A Eq. (28), lida da direita para a esquerda, pode ser agora facilmente interpretada. Notar a introdução dos índices de refração correspondentes a cada meio, onde tratamos cada superfície refrativa considerando os índices à esquerda e direita. O raio que sai do ponto objeto, com ângulo α_o e altura h_o , percorre uma distância s_o , no meio com índice n_1 . A seguir, esse raio é refratado na superfície refratora, com raio R_1 , e depois, na

outra superfície com raio R_2 , ambas com índice n (i.e., a lente fina). Por último, o raio percorre uma distância s_i , no meio com índice n_2 , até o ponto imagem correspondente.

Devido à extensão da matriz resultante vamos escrevê-la em forma simbólica como

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_i \\ h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1\alpha_0 \\ h_0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

A seguir, detalhamos cada um dos elementos

$$M_{11} = 1 - \frac{s_0}{n_1} \left(\frac{n-n_1}{R_1} \right) - \frac{s_0}{n_1} \left(\frac{n_2-n}{R_2} \right). \quad (30)$$

$$M_{12} = - \left(\frac{n-n_1}{R_1} \right) - \left(\frac{n_2-n}{R_2} \right). \quad (31)$$

$$M_{21} = \frac{s_i}{n_2} \left[1 - \frac{s_0}{n_1} \left(\frac{n-n_1}{R_1} \right) - \frac{s_0}{n_1} \left(\frac{n_2-n}{R_2} \right) \right] + \frac{s_0}{n_1}. \quad (32)$$

$$M_{22} = \frac{s_i}{n_2} \left[- \left(\frac{n-n_1}{R_1} \right) - \left(\frac{n_2-n}{R_2} \right) \right] + 1. \quad (33)$$

Observar que, se no elemento M_{12} , que corresponde a $-1/f$ no caso da lente fina imersa em ar, fizermos $n_1 = n_2 = 1$, recuperamos efetivamente o inverso da distância focal nesse caso. Identificamos então o elemento M_{12} como sendo o negativo do inverso da distância focal da lente fina imersa nos meios de índices n_1 e n_2 . Evidentemente, isto também pode ser demonstrado aplicando o mesmo raciocínio que nas Eqs. (16-19). Com isto, as Eqs. (30)-(33), podem ser escritas de uma forma mais compacta

$$M_{11} = 1 - \frac{s_0}{n_1 f}. \quad (34)$$

$$M_{12} = -\frac{1}{f}. \quad (35)$$

$$M_{21} = \frac{s_i}{n_2} + \frac{s_0}{n_1} \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right). \quad (36)$$

$$M_{22} = 1 - \frac{s_i}{n_2 f}. \quad (37)$$

O próximo passo será determinar a condição de imagem para este sistema. Para isso, escrevemos a Eq. (29), explicitamente, agora com os elementos expressados como nas Eqs. (33-36)

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_i \\ h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s_0}{n_1 f}, & -\frac{1}{f} \\ \frac{s_i}{n_2} + \frac{s_0}{n_1} \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right), & 1 - \frac{s_i}{n_2 f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1\alpha_0 \\ h_0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Resolvendo a equação matricial (38), para h_i , temos

$$h_i = \left[\frac{s_i}{n_2} + \frac{s_0}{n_1} \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right) \right] n_1\alpha_0 + \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right) h_0. \quad (39)$$

A condição de imagem, como antes, requer que a derivada de h_i com respeito a α_0 seja nula; daí, obtemos

$$\frac{s_i}{n_2} + \frac{s_0}{n_1} \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right) = 0. \quad (40)$$

De onde chegamos a

$$\frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{1}{f}. \quad (41)$$

Notar que, se $n_1 = n_2 = 1$ na Eq. (41), i.e., lente fina imersa em ar, é recuperada a Eq. (24), como esperado.

Podemos também obter a expressão para o aumento lateral, M_T , da lente, introduzindo a Eq. (40), na Eq. (39)

$$h_i = \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right) h_0. \quad (42)$$

Dai, obtemos

$$M_T = \frac{h_i}{h_0} = \left(1 - \frac{s_i}{n_2 f} \right) = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_0}. \quad (43)$$

Onde, mais uma vez, fazendo $n_2 = n_1 = 1$, i.e., lente imersa em ar, recuperamos o resultado esperado, a Eq. (27).

5. Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido o formalismo matricial para propagação de raios ópticos, partindo da lei de Snell da refração aplicada a uma superfície esférica. A seguir, dito formalismo foi aplicado a duas superfícies refratoras em cascata (lente fina) imersa em ar. Foram deduzidas e justificadas as noções de foco e distância focal para a lente. Também, foi deduzida a condição de imagem através de considerações físicas e o aumento lateral da imagem. Por último, foram deduzidas a distância focal, a condição de imagem e o aumento lateral para uma lente fina imersa em dois meios com índices de refração diferentes.

Referências

- [1] E. Hecht, *Optics* (Addison Wesley, 2002), 4th ed.
- [2] Sears e Zemansky, *Física IV, Ótica e Física Moderna* (Pearson, São Paulo, 2005), 10^a ed.
- [3] R.A. Serway e J.W. Jewett, Jr. *Princípios de Física, Volume 4, Óptica e Física Moderna* (Thomson, São Paulo, 2005).
- [4] <http://www.olympusmicro.com/primer/anatomy/objectives.html>.