

Análise teórica e proposta para determinação experimental do coeficiente de atrito de rolamento em um plano inclinado

(Theoretical analysis and proposal for experimental determination of the coefficient of rolling friction on an inclined plane)

A.V. Andrade-Neto¹, J.A. Leyva-Cruz

Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA, Brasil

Recebido em 21/4/2015; Aceito em 20/6/2015; Publicado em 12/12/2015

Neste trabalho analisamos o rolamento de um corpo sobre um plano inclinado relaxando a hipótese de corpo rígido, isto é, consideramos o corpo como deformável. A partir das equações de movimento obtemos uma expressão analítica para a aceleração do centro de massa do corpo. Mostramos que casos conhecidos na literatura podem ser obtidos como casos particulares da nossa expressão. Adicionalmente, obtemos uma expressão para o coeficiente de atrito de rolamento o qual pode ser calculado a partir de medidas experimentais realizadas num plano inclinado.

Palavras-chave: plano inclinado, rolamento, atrito de rolamento.

In this work we have examined the motion of a body that rolls on an inclined plane, without the assumption of a rigid body. Under these conditions, the body may suffer small deformations. From the equations of motion we obtain an analytical expression for the acceleration of the center of mass. We show that some cases reported in the literature can be obtained as special cases of our expression. In addition, we obtain an expression for the friction coefficient of rolling, which can be calculated from experimental measurements performed on an inclined plane. These results can be used for students of physics to do a deeper analysis of the friction phenomenon associated with rolling bodies.

Keywords: inclined plane, rolling, rolling friction.

1. Introdução

A importância da utilização de atividades experimentais como recurso didático relevante no ensino de física é amplamente reconhecida e, simultaneamente, possibilita um vasto leque de enfoques e possibilidades [1]. Dentre os aspectos que enfatizam essa importância, são apontados o estímulo para uma participação mais ativa dos alunos bem como a criação de situações que concorram para os estudantes refletirem acerca de suas ideias sobre os fenômenos e conceitos físicos,

O plano inclinado é um sistema muito simples e facilmente encontrado em um laboratório didático de física. Apesar de sua grande simplicidade é um sistema de enorme potencial didático, como atestam diversos trabalhos publicados na RBEF [2–4]. Adicionalmente, ele possui um grande interesse histórico pois as leis do movimento uniformemente acelerado, descobertas por Galileo Galilei, foram estabelecidas a partir de experimentos utilizando o plano inclinado, apesar das discussões entre os historiadores da ciência acerca do pa-

pel das atividades experimentais de Galileo [5,6]. De qualquer modo, em uma enquete realizada pela revista *Physics World* entre seus leitores em 2002, o experimento de Galileo do plano inclinado aparece na relação dos dez mais belos experimentos de todos os tempos.

Do ponto de vista teórico, o plano inclinado é tratado em todos os livros de mecânica de física básica, nos quais aparece como um dos primeiros exemplos das aplicações das leis de Newton. Em geral esse sistema aparece na seguinte sequência. Inicialmente considera-se o movimento de um bloco (modelado como uma partícula) em um plano inclinado sem atrito e encontra-se sua aceleração [$a = g \sin \theta$, onde g é a aceleração local da gravidade e θ é o ângulo de inclinação do plano relativamente à horizontal]. Depois, quando se estuda a força de atrito, determina-se a aceleração da partícula no plano inclinado levando-se em conta o atrito entre o plano e a partícula e encontra-se o valor [$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$, onde μ é o coeficiente de atrito cinético]. Finalmente, no estudo de rolamento de corpos rígidos, o plano inclinado também aparece. Nesse

¹E-mail: aneto@uefs.br.

caso a aceleração do corpo rígido é dada pela expressão $[a = R^2/(R^2 + k^2)g \sin \theta]$, onde R é o raio da seção circular do corpo (uma esfera, um cilindro ou um anel) e k é o raio de giração do corpo. Em geral analisa-se uma corrida entre uma esfera, um cilindro e um anel, largados do repouso de uma determinada altura, e conclui-se que a esfera ganha a corrida com o anel chegando em último lugar.

O objetivo do presente trabalho é analisar o movimento de rolamento em plano inclinado, levando em conta o atrito de rolamento, *i.e.*, levando em conta a deformação dos corpos. Com esse procedimento obtemos uma expressão analítica para o coeficiente de atrito de rolamento, cujo valor numérico pode ser determinado experimentalmente.

O presente artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos o desenvolvimento teórico do movimento de rolamento sobre um plano inclinado. Na Seção 3 discutimos experimentos de rolamento em plano inclinado realizados com esfera. Esses experimentos são analisados à luz da teoria desenvolvida na Seção 2. Na Seção 4 apresentamos nossas considerações finais.

2. Rolamento em plano inclinado - Abordagem teórica

As forças que atuam sobre um corpo deformável que rola em um plano inclinado estão indicadas na Fig. 1. Devido à deformação do corpo, o ponto de aplicação da força normal \mathbf{N} será deslocado para frente por uma distância x em relação ao ponto em que \mathbf{N} atua no caso do corpo indeformável (centro de massa do corpo) [7-9].

Aplicando a segunda lei de Newton e considerando um rolamento puro (sem deslizamento) temos que

$$P \sin \theta - F_{at} = Ma_{cm} , \quad (1)$$

onde $P = Mg$ é o módulo da força peso, F_{at} é o módulo da força de atrito, M é a massa do corpo que rola e a_{cm} é a magnitude da aceleração do centro de massa do corpo em relação a um referencial inercial.

A força de atrito exerce um torque sobre o corpo que o faz girar no sentido horário. Tomando esse sentido como positivo e tomando como referência o centro de massa do corpo temos que

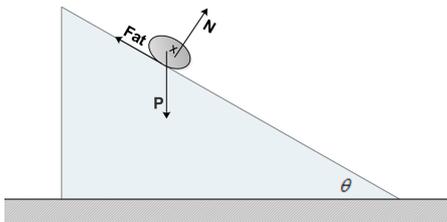


Figura 1 - Forças que atuam sobre um corpo deformável que rola num plano inclinado. A força normal está deslocada de uma distância x em relação à posição de um corpo perfeitamente rígido.

$$F_{at}R - Nx = I\alpha = Mk^2\alpha , \quad (2)$$

onde R é o raio da seção circular do corpo, I é o momento de inércia do corpo e k é o raio de giração (para uma esfera $k^2 = 2R^2/5$, para um cilindro $k^2 = R^2/2$ e para um anel $k^2 = R^2$).

Da Eq. (2) temos que

$$F_{at} = \frac{Mk^2\alpha + xP \cos \theta}{R} . \quad (3)$$

Substituindo a Eq. (3) na Eq. (1) e usando a condição de rolamento puro ($\alpha = a/R$) e a definição de coeficiente de atrito de rolamento ($\mu_r = x/R$) encontramos para a aceleração do centro de massa do corpo

$$a_{cm} = \left(\frac{R^2}{k^2 + R^2} \right) g(\sin \theta - \mu_r \cos \theta), \quad (4)$$

com

$$\frac{R^2}{(R^2 + k^2)} = \begin{cases} \frac{5}{7}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{2}{3}, & \text{para um cilindro} \\ \frac{1}{2}, & \text{para um anel} \end{cases} \quad (5)$$

Alguns casos conhecidos na literatura podem ser obtidos como casos particulares da Eq. (4) conforme descrito a seguir.

(a) Corpo perfeitamente rígido.

Para essa situação temos que $\mu_r = 0$ e obtemos

$$a_{cm} = \left(\frac{R^2}{k^2 + R^2} \right) g \sin \theta . \quad (6)$$

(b) Movimento em um plano horizontal.

Para esse caso $\theta = 0$ e a Eq. (4) torna-se

$$a_{cm} = - \left(\frac{R^2}{k^2 + R^2} \right) g\mu_r, \quad (7)$$

que é a Eq. (18) da Ref. [7].

2.1. Expressão para o coeficiente de atrito de rolamento

Veremos agora como podemos obter uma expressão para o coeficiente de atrito de rolamento a partir da análise do movimento de um corpo que rola em um plano inclinado.

Como o movimento é uniformemente acelerado e considerando que o corpo parte do repouso de uma altura h e percorre uma distância L no plano inclinado (Fig. 2), a velocidade do centro de massa do corpo ao final da distância L é dada pela expressão

$$V_{fcm}^2 = 2a_{cm}L = 2a_{cm} \frac{h}{\sin \theta} = \left(\frac{R^2}{k^2 + R^2} \right) 2gh \left(1 - \frac{\mu_r}{\tan \theta} \right) . \quad (8)$$

Da Eq. (8) obtemos a seguinte expressão para o coeficiente de atrito de rolamento

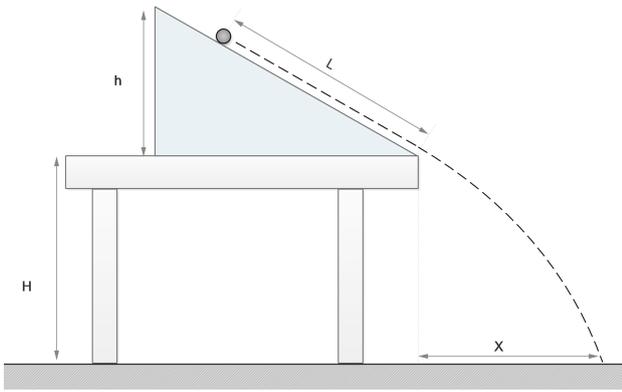


Figura 2 - Esquema da montagem experimental que envolve rolamento num plano inclinado e lançamento oblíquo.

$$\mu_r = \left[1 - \left(\frac{R^2}{k^2 + R^2} \right) \frac{V_{fcm}^2}{2gh} \right] \tan \theta, \quad (9)$$

com

$$\frac{R^2 + k^2}{R^2} = \begin{cases} \frac{7}{5}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{3}{2}, & \text{para um cilindro} \\ 2, & \text{para um anel} \end{cases} \quad (10)$$

Da Eq. (9) vemos que o coeficiente de atrito de rolamento pode ser calculado se conhecemos a altura h no plano inclinado em que a esfera é solta, o ângulo θ do plano e a velocidade do centro de massa da esfera no final do plano inclinado. As grandezas h e θ são facilmente determinadas experimentalmente de forma direta, enquanto V_{fcm} é obtido por método indireto. Na próxima Seção discutiremos algumas maneiras de se determinar V_{fcm} .

3. Experimentos de rolamento de esfera em plano inclinado

3.1. Descrição dos experimentos

Nas Refs. [2] e [4] são apresentados experimentos de rolamento de esfera em plano inclinado, nos quais V_{fcm} é determinada. Esses experimentos serão analisados aqui à luz da teoria desenvolvida acima. Considerando explicitamente o movimento de uma esfera a Eq. (4) fica

$$a_{cm} = \frac{5}{7}g(\sin \theta - \mu_r \cos \theta). \quad (11)$$

E para o coeficiente de atrito de rolamento obtemos da Eq. (9) que

$$\mu_r = \left(1 - \frac{7V_{fcm}^2}{10gh} \right) \tan \theta = \left(1 - \frac{V_{cm}^2}{V_{energia}^2} \right) \tan \theta, \quad (12)$$

onde, conforme Eq. (17) adiante, $V_{energia}^2 = 10gh/7$ é a velocidade determinada admitindo conservação da energia mecânica.

Na Ref. [2] é descrito um experimento que tem como objetivo demonstrar a conservação da energia mecânica de uma esfera rolando em um plano inclinado. Tomando como nível zero de referência para a energia potencial gravitacional o ponto mais baixo do plano inclinado e soltando a esfera do repouso, a energia mecânica inicial é dada por

$$E_{mi} = Mgh. \quad (13)$$

Por sua vez, a energia mecânica final é dada pela expressão

$$E_{mf} = \frac{7}{10}MV_{fcm}^2. \quad (14)$$

A velocidade V_{fcm} foi determinada utilizando-se as equações do lançamento de projéteis (desprezando a resistência do ar). A velocidade inicial do lançamento oblíquo é a velocidade final no plano inclinado e é dada pela equação

$$V_{alcançe} = \frac{X}{\cos \theta} \sqrt{\frac{g}{2(H - X \tan \theta)}}, \quad (15)$$

onde X é o alcance máximo, H é a altura da mesa e θ é o ângulo do plano inclinado (Fig. 2).

Os valores calculados da energia mecânica inicial e final, apresentados na Tabela 3 e Fig. 3 da Ref. [2], claramente mostram que a energia mecânica não se conserva e, mais grave, a energia mecânica final é maior que a inicial. Adicionalmente é determinado o valor do coeficiente de atrito estático entre a esfera e o plano inclinado embora, como os autores afirmam, isso não fizesse parte dos objetivos originais do experimento. Os autores também apontam que o resultado obtido para o coeficiente de atrito estático ($\mu_e = 0.18$) é divergente do valor encontrado por outro método ($\mu_e = 0.3$). A explicação aventada pelos autores do artigo em pauta, em termos de um coeficiente de atrito estático “efetivo”, é artificial e não esclarece a física do problema.

Na Ref. [4] também se descreve um experimento com esfera rolando em um plano inclinado. A velocidade da esfera no final do plano inclinado é determinada por três maneiras diferentes:

(a) Inicialmente utiliza-se cronômetros com sensores digitais para se determinar o tempo gasto pela esfera para percorrer o plano inclinado. A velocidade da esfera é, assim, calculada pela expressão

$$V_{sensor} = \frac{2L}{t}, \quad (16)$$

onde L é o comprimento do plano inclinado.

(b) No segundo método utiliza-se as equações do lançamento de projéteis, conforme descrito acima e obtém-se a Eq. (15).

(c) A terceira maneira utilizada para calcular a velocidade da esfera no final do plano inclinado foi através da conservação da energia mecânica. Se h é a altura em que a esfera é abandonada, tem-se que

$$V_{energia} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}. \quad (17)$$

A Eq. (17) pode também ser obtida via cinemática. Para uma esfera perfeitamente rígida temos que $a_{cm} = (5/7)g \sin \theta$. A partir dessa expressão, a Eq. (17) é facilmente obtida.

3.2. Análise dos experimentos

Da Eq. (12) vemos que se a velocidade final V_{fcm} for calculada pelo método da energia, *i.e.*, se $V_{fcm} = V_{energia}$ então $\mu_r = 0$. Isso é o esperado já que na hipótese de conservação da energia mecânica da esfera está implícito o modelo de corpo perfeitamente rígido, no qual $\mu_r = 0$. Assim, não é surpreendente que em um experimento real, como aquele descrito na Ref. [2], que tenha como objetivo mostrar a conservação da energia mecânica de uma esfera rolando em um plano inclinado, está condenado ao insucesso.

Isso fica mais claro quando analisamos a Eq. (11). Dessa equação vemos que quando adotamos um modelo mais realista (corpo deformável) a aceleração do centro de massa do corpo é menor, em comparação com o modelo de corpo perfeitamente rígido, por um fator $(5/7)g\mu_r \cos \theta$. Uma aceleração menor significa uma velocidade menor. Então, se V_{fcm} é calculada pela Eq. (17), obviamente esse valor está superestimado em relação ao valor real. Isso explicaria porque no trabalho da Ref. [2] foi encontrado um valor para a energia mecânica final maior que o valor inicial.

A Eq. (12) também lança luz sobre os valores das velocidades obtidas via alcance horizontal. Os valores dessa grandeza apresentados na Ref. [4], são cerca de 5 por cento maiores que os valores de velocidade calculados via conservação de energia mecânica. Como podemos ver da Eq. (12), se $V_{fcm} > V_{energia}$ isso implica em $\mu_r < 0$, o que obviamente é um absurdo. A explicação para esse fato vai além da simples consideração de um erro sistemático do experimento. Isso mostra que não se pode desprezar a resistência do ar no cálculo da Eq. (15). Pelo menos em situações que exigem determinação razoavelmente precisa para a grandeza V_{fcm} .

Do exposto acima vemos que podemos estabelecer um critério para o maior valor admissível para a velocidade V_{fcm} . Esse valor é justamente $V_{energia}^2 = 10gh/7$. Se o valor obtido para V_{fcm} for tal que $V_{fcm} > V_{energia}$ isso significa que o método para sua determinação é inadequado ou, no mínimo, tem que ser visto com cautela.

Podemos também determinar o coeficiente de atrito estático. Da Eq. (3) obtemos que a força de atrito sobre a esfera é dada por

$$F_{at} = \frac{2}{7}Mg \sin \theta + \frac{5}{7}\mu_r Mg \cos \theta. \quad (18)$$

A força de atrito estática máxima é dada por

$$F_{est} = \mu_e N = \mu_e Mg \cos \theta. \quad (19)$$

No início do deslizamento podemos igualar as Eqs. (18) e (19) e obtemos

$$\mu_e = \frac{2}{7} \tan \theta + \frac{5}{7}\mu_r. \quad (20)$$

A Eq. (20) explica a discordância entre os valores do coeficiente de atrito estático entre a esfera e o plano inclinado, apontada na Ref. [2].

Vemos, então, que é possível, a partir de experimentos de rolamento em plano inclinado, determinar de forma relativamente simples o coeficiente de atrito de rolamento bem como o coeficiente de atrito estático, via Eq. (12) e Eq. (20), respectivamente.

4. Considerações finais

Neste trabalho discutimos a dinâmica do movimento em um plano inclinado levando em conta o atrito de rolamento, ou seja, consideramos um modelo mais realista que leva em conta a deformação dos corpos.

A partir dos resultados teóricos desenvolvidos aqui, analisamos os resultados disponíveis em trabalhos publicados na RBEF e mostramos que o coeficiente de atrito de rolamento pode ser facilmente calculado a partir de experimentos em plano inclinado.

Como vimos, para se determinar o coeficiente de atrito de rolamento é necessário conhecer a velocidade do centro de massa do corpo ao final da distância L percorrida no plano inclinado. Essa velocidade pode ser determinada se o tempo gasto para percorrer a distância L for conhecida, conforme Eq. (16). Assim, para se obter valores precisos para V_{fcm} é necessário ter à disposição um instrumento confiável para a medida do tempo. Deve-se observar que essa questão (a medida precisa do tempo) remota aos trabalhos de Galileo e foi sua motivação para realizar experimentos em plano inclinado.

Outro ponto importante que deve ser mencionado diz respeito à questão do modelo físico que está sendo utilizado para interpretar (ou obter) os valores determinados a partir do experimento. Nos trabalhos aqui analisados, Refs. [2] e [4], está implícito a utilização de um modelo de corpo perfeitamente rígido. Obviamente, tal modelo tem suas limitações em uma situação real.

É interessante citar que essa situação ilustra de forma relativamente trivial uma famosa frase de Einstein pronunciada num diálogo com Heisenberg sobre a mecânica quântica [10]: “É a teoria que decide o que podemos observar”. Vemos que é o modelo físico utilizado que “decide” o que pode ser medido. Este é um ponto que merece ser destacado mesmo em experimentos didáticos.

Referências

- [1] M.S.T. Araujo e M.L.V.S. Abib, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **25**, 176 (2003)
- [2] W. Silva, C.M. Silva, J.W. Precker, D.D. Silva, I.B. Soares e C.D. Silva, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **25**, 378 (2003).
- [3] C.H. Worner, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34**, 2305 (2012).
- [4] Alcides Goya, Carlos Eduardo Laburú e Paulo Sérgio de Camargo Filho, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **36**, 2502 (2014).
- [5] Michael Segre, *Caderno de Física da UEFS* **6**, 87 (2008).
- [6] Elder Sales Teixeira, *Caderno de Física da UEFS* **9**, 53 (2011).
- [7] A.V. Andrade-Neto, J.A. Cruz, M.S.R. Miltão e E.S. Ferreira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 3704 (2013).
- [8] A.V. Andrade-Neto, *Caderno de Física da UEFS* **12**, 33 (2014).
- [9] V.L.B. de Jesus, D.G.G. Sasaki, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **36**, 3503 (2014).
- [10] Werner Heisenberg, *A Parte e o Todo* (Editora Contraponto, Rio de Janeiro, 1996).