Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 39, nº 3, e3701 (2017)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0001

Notas e Discussões

Oscilador harmônico: Uma análise via séries de Fourier

Harmonic oscillator: An analysis via Fourier series

Samuel Rocha de Oliveira*[1]

[1]Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Cidade Universitária Zeferino Vaz, Barão Geraldo, Campinas, SP, Brasil

Recebido em 02 de Janeiro, 2017. Revisado em 03 de Fevereiro, 2017. Aceito em 03 de Fevereiro, 2017.

Mostramos que o método das séries de Fourier para resolver a equação do oscilador harmônico simples foi mal utilizado no artigo "Estados ligados em um potencial delta duplo via transformadas seno e cosseno de Fourier" publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física v. 36, n. 2.
Palavras-chave: oscilador harmônico, séries de Fourier.

We show that the Fourier series method for the solution of the harmonic oscillator equation was misused in the article "Bound states in a double delta potential via Fourier sine and cosine transforms" published in the Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 2.
Keywords: harmonic oscillator , Fourier series.

1. Comentário

A ideia apresentada em [1] é resolver a equação

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w_0^2\, x(t) = 0 \tag{1}$$

com $w_0 > 0$ usando a série (trigonométrica) de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nwt) + b_n \mathrm{sen}(nwt)\right), \tag{2}$$

para funções periódicas de período T em que $w = 2\pi/T$. A substituição de série de Fourier na equação (1), assumindo a **convergência uniforme** para que a diferenciação e o somatório comutem, fornece a seguinte equação:

$$\begin{aligned} &w_0^2\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2w^2 - w_0^2\right) \\ &\times\left(a_n \cos(nwt) + b_n \mathrm{sen}(nwt)\right) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Em virtude da **independência linear** das funções constante w_0^2, $\cos(nwt)$ e $\mathrm{sen}(nwt)$, $n \geq 1$, conclui-se que

$$w_0^2 a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$

pois, por hipótese inicial, $w_0 \neq 0$, e

$$\begin{aligned} &\left(n^2w^2 - w_0^2\right) a_n = 0, \\ &\left(n^2w^2 - w_0^2\right) b_n = 0, \\ &n \geq 1. \end{aligned}$$

O artigo chegou à primeira conclusão com um argumento inconsistente com o método e se precipitou em afirmar $n^2w^2 - w_0^2$, $n \geq 1$ sem levar em consideração que essa equação fixa um único valor para nw, pois w_0 na equação (1) é uma constante dada. A solução correta é como segue. Para $n = \tilde{n}$ se obtém que

$$\tilde{n}^2 w^2 = w_0^2 \tag{4}$$

sendo $a_{\tilde{n}}$ e $b_{\tilde{n}}$ arbitrárias, digamos $a_{\tilde{n}} = A$ e $b_{\tilde{n}} = B$. Por outro lado, para $n \neq \tilde{n}$ se obtém $a_n = 0$ e $b_n = 0$. E assim a solução da equação (1) é

$$x(t) = A\cos(w_0 t) + B\mathrm{sen}(w_0 t). \tag{5}$$

Referências

[1] A.S. de Castro, Revista Brasileira de Ensino de Física **36**, 2701 (2014).

*Endereço de correspondência: samuel@ime.unicamp.br.