

# Uma discussão sistemática sobre as cordas cósmicas e o modelo de vórtices abelianos proposto por Nielsen e Olesen

A systematic discussion on the cosmic strings and abelian vortex model proposed by Nielsen and Olesen

M. S. Maior de Sousa<sup>\*1</sup>, A. Alves de Lima<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Roraima, Centro de Educação, Colégio de Aplicação, Boa Vista, RR, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Formação de Professores, Cajazeiras, PB, Brasil

Recebido em 04 de Setembro, 2017. Revisado em 20 de Outubro, 2017. Aceito em 02 de Novembro, 2017.

Devido à grande gama de aplicações e efeitos do modelo de vórtices abelianos de Nielsen e Olesen nas mais diversas áreas da física, que vai desde a matéria condensada até efeitos astrofísicos, faz-se necessário alguma obra na literatura que aborde este tema de forma simples e sucinta para que o estudante de graduação tanto em física, como de áreas afins, tenha a possibilidade de conhecer e compreender os mecanismos associados a este modelo de vórtices que o indicam como um forte candidato à fonte para os defeitos topológicos tipo corda cósmica propostos por Vilenkin. Levando em consideração que este tema fica concentrado apenas majoritariamente nas pós-graduações em física, não sendo tão acessível a estudantes de graduação, desenvolvemos este trabalho fazendo uma pequena revisão sistemática no âmbito dos vórtices abelianos e como tais objetos influenciam o espaço-tempo a sua volta quando aplicados à Relatividade Geral.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, Teoria de Campos, Gravitação, Vórtices Abelianos.

Due to the wide range of applications and effects of the Abelian vortex model of Nielsen and Olesen in the areas of physics, ranging from condensed matter to astrophysical effects, some work in the literature is necessary to approach this topic in a simple and succinct way that the undergraduate student in both physics and related areas has the possibility to know and understand the mechanisms associated with this vortex model that indicate him as a strong candidate for the source for the topological defects proposed by Vilenkin. Taking into account that this subject is concentrated only in postgraduate studies in physics, and is not so accessible to undergraduate students, we have developed this work by making a small systematic review in the scope of abelian vortices and how these objects influence space-time their when applied to General Relativity.

**Keywords:** General Relativity, Field Theory, Gravitation, Abelian Vortex.

## 1. Introdução

De acordo com a teoria do Big Bang, o universo está se expandindo e resfriando-se. Durante sua expansão, as quebras espontâneas das simetrias fundamentais levaram o universo a sofrer uma série de transições de fase. Nos modelos de física de altas energias, a formação dos defeitos topológicos, causados por essas transições, tais como paredes de domínio, monopolos e cordas cósmicas, entre outras, estão previstas a ocorrerem segundo a referência [1, 2].

A corda cósmica está entre os tipos de defeitos topológicos mais estudados, embora recentes observações da radiação cósmica de fundo tenham descartado-a como fonte primária para as perturbações da densidade primordial. Tal defeito, ainda sim serve como uma das contribuições dessa perturbação. Este tipo de defeito serve também como uma possível fonte para explicar um número considerável de efeitos astrofísicos, tais como: rajadas de raios gama, onde a escala de energia da corda

na qual a simetria é quebrada, em uma escala de energia da ordem de  $10^{14}$  GeV, explica a taxa, a duração e a fluência das rajadas de raios gama, [3]; emissões de ondas gravitacionais de alta frequência, que tem como consequência dessas emissões o conjunto estocástico de ondas gravitacionais geradas por uma rede cosmológica de loops não gaussiana [4] e a geração de raios cósmicos de altas energias [5], onde os raios cósmicos de partículas de altas energias podem ter sido originadas durante o processo de colapso e/ou aniquilação de defeitos topológicos associados com as teorias da grande unificação.

Na Física da Matéria Condensada é bem conhecido que supercondutores excluem quase que completamente qualquer campo magnético externo se este for menor que um valor crítico (efeito Meissner) [6]. Contudo, para supercondutores do tipo 2, que são formados por materiais em que a transição para o estado supercondutor é gradual, com a presença de um estado intermediário, se o campo externo for aumentado até um certo valor maior que o valor crítico, tal campo externo atravessa este supercondutor em uma forma de tubo de fluxo magnético.

\*Endereço de correspondência: [mikael.souto@ufr.br](mailto:mikael.souto@ufr.br).

A estes fenômenos damos o nome de vórtices de fluxo magnético que, por sua vez, são quantizados.

A possibilidade da existência teórica de tais vórtices foi primeiramente demonstrada por Abrikosov [7]. Ele mostrou que estes ocorrem naturalmente como soluções para a teoria de Ginsburg-Landau de supercondutividade na presença de um campo magnético externo. Seguindo esta teoria, a existência de tais objetos foi verificada experimentalmente, e muitas de suas propriedades foram rigorosamente investigadas em [6].

Alguns anos depois, Nielsen e Olesen [8] mostraram, partindo do modelo de teoria de campos relativístico com quebra espontânea de simetria, mais especificamente do modelo de Higgs abeliano interagindo com um campo de calibre, que este sistema apresenta soluções com simetria cilíndrica carregando um fluxo magnético. Estas configurações correspondem às soluções de vórtices.

A análise da influência deste sistema na geometria do espaço-tempo foi realizada por Garfinkle [9] e Laguna [10]. Em seus trabalhos os autores acoplaram o tensor energia-momento, associado ao modelo de Nielsen-Olesen, às equações de campo de Einstein. Nesse sentido, eles mostraram que o vórtice possui uma estrutura interna caracterizada pelo fluxo magnético não-nulo que corre ao longo da mesma, cuja extensão é determinada pela escala de energia na qual a simetria é quebrada. Dois comprimentos de escala aparecem naturalmente, um relacionado com a extensão do fluxo magnético que, por sua vez, é proporcional ao inverso da massa do campo vetorial,  $m_v$ , campo este, que adquire massa devido ao mecanismo de Higgs. E o outro associado com o inverso da massa do campo escalar,  $m_s$ , este último, como sendo uma medida do ponto onde o campo escalar decai para o seu valor de vácuo. Além do mais, os autores também analisaram a geometria do espaço-tempo e verificaram que assintoticamente a superfície perpendicular ao vórtice corresponde ao espaço-tempo de Minkowski menos uma fatia, acarretando um espaço com um déficit angular.

Uma solução de vórtice especial que satisfaz o limite BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfield) [11, 12], apresenta as massas do campo escalar e do campo de calibre iguais, isto é,  $m_s = m_v$ . Para este caso, Linet [13] foi capaz de encontrar uma solução exata para o tensor métrico, que é determinada em termos da densidade de energia da corda cósmica. Neste limite, a superfície perpendicular à linha da solução de vórtice, tem uma estrutura cônica e, o espaço-tempo ao seu redor, corresponde ao espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada.

À grandes distâncias, o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica possui, em sua origem e no plano ortogonal à disposição deste objeto, uma topologia cônica com um déficit de ângulo planar proporcional à densidade linear de massa desta corda cósmica. Na teoria quântica de campos, a topologia não trivial desse objeto induz valores esperados no vácuo (VEVs)<sup>1</sup> não nulos para os observáveis

físicos. Estes efeitos de polarização do vácuo<sup>2</sup>, na teoria quântica de campos, induzidos por uma estrutura cônica, foram alvos de muitos trabalhos publicados. Na análise específica para o VEV do tensor energia-momento  $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ , por exemplo, podemos observar vários trabalhos publicados, levando em consideração o caso para campos escalares [14–19] e campos fermiônicos [20–24] interagindo com campos vetoriais [24]. Outro observável físico induzido, devido à presença desse defeito, é a densidade de corrente e carga, que servirá como fonte para as equações de Maxwell. Tal objeto, considerando campos fermiônicos, são vistos em [25–28]. Neste trabalho estamos usando a notação  $\hbar = c = 1$ .

## 2. Relatividade Geral e o espaço-tempo

Antes de entendermos a ligação entre os vórtices abelianos, propostos por Nielsen e Olesen, e os defeitos topológicos tipo corda cósmica proposto por Vilenkin, devemos revisitar, primeiramente, como é descrita a estrutura do espaço-tempo da Relatividade Geral que foi proposto por Einstein.

Uma das revoluções na física moderna ocorreu devido às ideias de Albert Einstein, em 1915, a respeito de como a estrutura do espaço e do tempo eram afetadas devido à presença de matéria e de energia. Para formular matematicamente estas ideias, Einstein dotou o espaço de uma métrica. Toda informação geométrica a respeito do espaço-tempo estaria contida nesse objeto matemático chamado, formalmente, tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ . Em outras palavras, a distribuição de matéria e energia diz como deve ser a geometria do espaço-tempo [29]. A equação proposta por Einstein para a teoria da Relatividade Geral é dada segundo a expressão abaixo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (1)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci obtido a partir do tensor de Riemann,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  é o escalar de curvatura,  $G$  é a constante da gravitação universal de Newton e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia momento. De modo a introduzir a ideia da estrutura métrica do espaço-tempo, iremos revisar brevemente os conceitos básicos necessários, como referencial inercial e intervalo de eventos [29].

Em um referencial inercial  $S$ , temos o elemento de linha  $ds$  sendo infinitesimal e possuindo um intervalo de tempo próprio (evento), é dado, usando as coordenadas  $(t, x, y, z)$ , por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \quad (2)$$

que é um invariante por transformações de Lorentz [29, 30].

Mas se considerarmos um sistema de referência não-inercial, o elemento de linha não será dado, em geral,

<sup>1</sup>Um valor esperado no vácuo, pode ser entendido pelo leitor como o valor esperado de algum observável físico no estado de menor energia.

<sup>2</sup>A polarização do vácuo pode ser interpretada como uma modificação nos níveis quânticos do estado de menor energia de uma teoria.

pela soma dos quadrados das diferenciais das coordenadas. Neste caso, para um melhor entendimento, vamos considerar um evento num referencial girante, em torno do eixo  $z$ , cuja frequência angular de rotação seja  $\omega$ . Seja  $(t', x', y', z')$  as coordenadas desse novo referencial  $S'$ , então as transformações gerais de coordenadas entre os referenciais  $S$  e  $S'$  são dadas da seguinte forma

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y &= x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z &= z' . \end{aligned} \tag{3}$$

Deste modo, o elemento de linha tomará a forma expressa pela equação

$$\begin{aligned} ds^2 &= [1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 + 2\omega dt(y'dx' - x'dy') \\ &- (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) . \end{aligned} \tag{4}$$

Vemos, portanto, que o elemento de linha não é somente a soma ou a diferença dos quadrados das coordenadas diferenciais. A equação (2) pode ser colocada na forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \tag{5}$$

onde definimos o quadri-vetor posição por  $x^\mu = (t, -\vec{r})$ , e o tensor métrico,  $\eta_{\mu\nu}$ , por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Em geral, quando os sistemas de coordenadas não-inerciais são usados, o elemento de linha incluirá termos que são produtos das diferenciais de coordenadas diferentes. Deste modo podemos escrever o elemento de linha da seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu , \tag{6}$$

onde  $g_{\mu\nu}(x)$  representa um conjunto de dez funções das coordenadas de espaço e tempo, sendo este tensor simétrico, ou seja,  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . O sistema descrito por (6) é chamado de curvilíneo e corresponde a um sistema de referência acelerado. As funções  $g_{\mu\nu}$  contém todas as propriedades geométricas do espaço-tempo. Para o caso em que tratamos de referenciais inerciais apenas temos que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

Einstein mostrou que referenciais acelerados são equivalentes a campos gravitacionais, de modo que os efeitos gravitacionais serão descritos pelo tensor métrico,  $g_{\mu\nu}(x)$ . Neste caso, a gravitação pode ser entendida como um desvio na métrica do espaço-tempo plano. Além do mais, esta métrica não é fixada arbitrariamente, mas dependerá da distribuição de matéria local.

De fato, esta equivalência é verificada apenas localmente. Em um sistema não-inercial, dada uma métrica  $g_{\mu\nu}(x)$ , podemos sempre reduzi-la globalmente à forma de Galileu, (5), por meio de uma transformação adequada de coordenadas. Por outro lado, um campo gravitacional não pode ser eliminado globalmente por uma transformação de coordenadas e a métrica só pode ser reduzida à forma plana (Minkowski) apenas numa região

finita muito pequena do espaço, ou seja, localmente. Quando tal situação ocorre, o espaço-tempo é chamado de espaço-tempo pseudo-Riemanniano. Uma variedade pseudo-Riemanniana é uma variedade diferenciável equipada com um tensor métrico de ordem  $(0, 2)$ -diferenciável, simétrico, que é não-degenerado em cada ponto da variedade não sendo obrigado a ser um tensor positivo definido. As variedades pseudo-Riemannianas generalizam o conceito de variedade Riemanniana, neste sentido.

### 3. Corda cósmica

Uma corda cósmica é um objeto que pode ser obtido a partir de uma distribuição infinitamente concentrada de matéria, com densidade linear de massa  $\mu$ . No caso de uma certa distribuição estar localizada sobre o eixo  $z$ , o tensor energia-momento, em coordenadas cilíndricas, é dado por

$$T^\mu{}_\nu = \mu \text{diag}(1, 0, 0, 1)\delta^{(2)}(\vec{r}) , \tag{7}$$

onde  $\delta^{(2)}(\vec{r})$  é a função delta de Dirac em duas dimensões.

Geometricamente, um defeito topológico pode ser caracterizado por um espaço-tempo cuja métrica associada a este defeito possui o correspondente tensor de Riemann-Christoffel nulo em todos os pontos, menos no defeito, isto é, o espaço-tempo tem singularidade cônica. Em outras palavras, ele pode ser caracterizado por um tensor de curvatura que é proporcional a uma função delta com suporte no defeito.

Queremos que a distribuição (7) gere uma geometria com simetria cilíndrica. Ou seja, nosso objetivo é encontrar uma solução para as equações de Einstein que descreva o campo gravitacional de uma corda cósmica, retilínea, homogênea e estática que tem densidade linear de massa  $\mu$  situada ao longo do eixo  $z$ . Neste sentido, a corda não possuirá nenhuma dependência com o tempo, logo é um invariante temporal. Admitiremos também uma simetria da corda em relação ao ângulo azimutal, e por fim que a mesma se mantenha invariante por “boosts”. Desta forma, o elemento de linha mais geral, em coordenadas cilíndricas, que apresenta tal simetria e mantém invariância por transformações de “boosts” ao longo do eixo  $z$ , é dado por

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - dr^2 - B^2(r)d\phi^2 - A^2(r)dz^2 . \tag{8}$$

Seja a equação de Einstein da relatividade geral dada segundo (1), substituindo (7) em (1) e calculando os símbolos de Christoffel referentes à métrica (8), obtemos um conjunto de equações diferenciais não lineares dadas por

$$\begin{aligned} R^t_t = R^z_z &= \frac{1}{A(r)} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{A(r)B(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dB(r)}{dr} \\ &- \frac{1}{A^2(r)} \left( \frac{dA(r)}{dr} \right)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

$$R_r^r = \frac{2}{A(r)} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{B(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} \quad (10)$$

$$R_\phi^\phi = \frac{1}{B(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} + \frac{2}{A(r)B(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dB(r)}{dr} \quad (11)$$

Resolvendo este conjunto de equações, obtemos as seguintes condições

$$\frac{dA(r)}{dr} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{B(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} = -8\pi G\mu \quad (12)$$

cujas soluções fornece o seguinte elemento de linha [2] [16]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(1 - 4G\mu)d\phi^2 - dz^2, \quad (13)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton. Redefinindo o termo angular do elemento de linha, dado por (13), de tal forma que tomamos  $\phi' = \phi/q$ , onde escrevemos o déficit de ângulo planar da forma  $q^{-1} = (1 - 4G\mu)$ , recaímos numa métrica de Minkowski dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi'^2 - dz^2, \quad (14)$$

onde a coordenada angular varia no intervalo de  $[0, 2\pi/q]$ , de modo que o espaço-tempo agora é localmente plano exceto em  $r = 0$ , isto é, sobre o defeito. Este elemento de linha, do ponto de vista global, corresponde ao espaço-tempo de Minkowski menos um pedaço subtendido pelo ângulo  $8\pi G\mu$ . A quantidade  $G\mu$  tem grande importância na teoria de cordas, pois, ela caracteriza a intensidade da interação gravitacional e seu valor, obtido a partir de Teorias de Grande Unificação, é compreendida da ordem de  $10^{-6}$  conforme exibido em [31, 32]. Então o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica tem a forma de um cone no plano perpendicular à corda. Sendo plano, ele satisfaz às equações de Einstein em toda região onde  $T^{\mu\nu} = 0$ .

O efeito da corda é portanto, introduzir um déficit no ângulo azimutal dado por  $\Delta\phi = 8\pi G\mu$  no que resulta que a superfície  $t = \text{constante}$  e  $z = \text{constante}$  tem geometria de um cone ao invés de um plano, o qual será pontiagudo no limite da estrutura interna da corda indo para zero. Neste caso, o espaço-tempo correspondente é cônico e melhor descrito em coordenadas cilíndricas devido à simetria do problema.

A geometria acima descrita apresenta muitas características interessantes, tais como:

- Ausência de potencial gravitacional newtoniano, embora isto não implique na ausência de efeitos gravitacionais. Isto é, uma partícula colocada na presença de uma corda cósmica não será atraída por ela, qualquer que seja a ordem de grandeza da densidade de massa da corda, o que é bastante diferente do previsto pela corda de matéria da gravitação de Newton, em outras palavras, as cordas cósmicas possuem um potencial gravitacional nulo [33];
- Déficit de ângulo planar igual a  $\Delta\phi = 8\pi G\mu$  [33];

- Pode atuar como lente gravitacional, ou seja, devido à natureza cônica do espaço-tempo ao redor da corda cósmica, podem ser formadas imagens duplas de objetos localizados atrás da corda em relação a um observador [2];
- Análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm, que se dá devido ao movimento de partículas teste no espaço-tempo de cordas cósmicas através do estudo de geodésicas [34];
- Auto-interação eletrostática [13] que surge devido ao campo gravitacional induzir uma curvatura no espaço-tempo e, esta curvatura, por sua vez, provoca distorções nas linhas de campo do potencial eletrostático gerado por uma partícula carregada, fazendo com que esta partícula sofra uma força finita sobre si mesma.
- O análogo de uma corda cósmica, em Matéria Condensada, chama-se desclinação, sendo um tipo de defeito muito comum em cristais. Vale ressaltar que a teoria geométrica de defeitos de Katanaev e Volovich [35] demonstra a equivalência deste ferramental matemático abordado à desclinação, encarando as propriedades geométricas, como a curvatura que o defeito produz no meio, incorporando-a na métrica da variedade. Deste modo, pode-se estudar e prever o comportamento das partículas movendo-se neste meio com defeito servindo como um laboratório onde podemos visualizar experimentalmente as teorias da Gravitação em cristais, por exemplo [36].

A imagem da fig.1, ilustra o déficit de ângulo planar, no plano  $(r, \phi)$  ortogonal à disposição da corda cósmica. Pois, segundo a métrica apresentada em (8), a corda cósmica que preserva a simetria de boost ao longo do eixo  $z$  deve estar disposta nesta mesma direção.

#### 4. Vórtices Abelianos

Para descrevermos as cordas cósmicas idealizadas, ou seja, cordas cósmicas estáticas, com distribuição de matéria infinita concentrada ao longo do eixo  $z$  e cuja a estrutura interna pode ser desprezível, usaremos o modelo de Nielsen-Olesen. Neste sentido, acoplado o tensor energia-momento, associado a esta teoria, às equações de

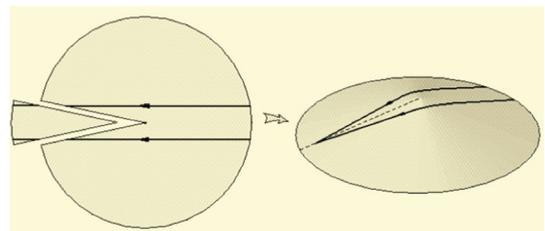


Figura 1: Déficit de ângulo planar do espaço-tempo.

campo de Einstein da Relatividade Geral, estudamos a influência deste modelo na geometria do espaço-tempo. De fato, Laguna [10] e Garfinkle [9] fizeram isto e, em seus trabalhos, eles mostraram que o espaço-tempo gerado pelo modelo de Nielsen-Olesen era equivalente ao espaço-tempo gerado por uma corda cósmica. Assim, para um melhor entendimento a respeito da natureza de uma corda cósmica se faz necessário entender um pouco sobre modelos em teoria de campos com quebra espontânea de simetria, como ocorre com o modelo proposto por Nielsen-Olesen.

#### 4.1. A respeito do formalismo lagrangiano

Vamos introduzir, primeiramente, alguns conceitos úteis na formulação da teorias de campos. Começemos com a grandeza denominada densidade lagrangiana, indicada pela letra  $\mathcal{L}$ , onde para campos de matéria representados por funções  $\varphi(\vec{x}, t) \equiv \varphi(x)$ , é dada por  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$ , isto é, esta densidade é um funcional dos campos e suas respectivas derivadas.

A lagrangiana associada à esta teoria pode ser obtida a partir da integração espacial da densidade  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$ . Assim temos,

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}. \tag{15}$$

A ação  $S$  pode ser obtida pela integração da lagrangiana com respeito ao tempo que, por sua vez, leva a integração da densidade de lagrangiana no espaço-tempo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \tag{16}$$

Determinamos as equações dinâmicas de movimento, ou simplesmente equações de Euler-Lagrange, através do princípio variacional da mínima ação, ou seja,  $\delta S = 0$ , logo temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0, \tag{17}$$

onde vemos, de acordo com a equação acima, a conhecida equação de movimento de Euler-Lagrange para campos.

Esta formulação de densidade lagrangiana para campos é construída de tal forma que seja invariante por transformações de Lorentz. Além disso, admitiremos, deste ponto em diante, que esta densidade também será invariante perante outros tipos de transformações ditas transformações de gauge (ou também chamadas de transformações de calibre).

Vamos supor a seguinte transformação sobre os campos de matéria

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x), \tag{18}$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária real. Deste modo, a derivada dos campos se transforma da seguinte maneira

$$\partial_\mu \varphi(x) \longrightarrow \partial_\mu \varphi'(x) = e^{i\alpha} \partial_\mu \varphi(x). \tag{19}$$

Tais transformações nos campos e nas suas derivadas são ditas como sendo transformações de gauge de primeira espécie (ou global). Isto é necessário para a construção de uma lagrangiana para estes campos, invariante por estas transformações. A transformação da densidade de lagrangiana dar-se-á da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) &\longrightarrow \mathcal{L}'(\varphi'(x), \partial_\mu \varphi'(x)) \\ &= \mathcal{L}(e^{i\alpha} \varphi(x), e^{i\alpha} \partial_\mu \varphi(x)). \end{aligned} \tag{20}$$

Neste caso, dizemos que o grupo de simetria da teoria é o grupo Abelian  $U(1)$ , que caracteriza as transformações unitárias nos campos, geradas por um único parâmetro. O grupo  $U(1)$  pode ser interpretado como o grupo de rotações ao longo do círculo de raio unitário. Neste caso o grupo apresenta apenas um único gerador e os elementos deste grupo podem ser genericamente representados por  $g = \exp(i\epsilon\alpha)$ , sendo “ $e$ ” o gerador do grupo e  $\alpha$  um parâmetro que pode ou não depender do ponto  $x^\mu$ . Além do mais, escolhe-se o parâmetro  $\alpha$  infinitesimal tal que (18) possa ser reescrita aproximadamente como

$$\varphi'(x) \approx (1 + i\epsilon\alpha)\varphi(x) \longrightarrow \delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x), \tag{21}$$

onde identificamos  $i\epsilon\alpha\varphi(x) = \delta\varphi(x)$ .

Como  $\mathcal{L}$  é invariante para uma transformação qualquer de gauge global, ou seja,  $\delta\mathcal{L} = 0$ , teremos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) = 0. \tag{22}$$

Do fato de que  $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$  e usando (17) e (21) em (22) encontramos que

$$\partial_\mu \left( i\epsilon\alpha\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) = 0. \tag{23}$$

Assim, podemos dizer que existe uma corrente de Noether, ou seja, uma corrente conservada,  $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ , associada a esta invariância, onde

$$J^\mu(x) = i\epsilon\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))}. \tag{24}$$

Podemos definir uma carga conservada da seguinte forma

$$Q = \int d^3x J^0(x). \tag{25}$$

Vamos supor agora que na transformação do campo segundo (18) o parâmetro  $\alpha$  dependa do ponto  $x^\mu$ , ou seja

$$\varphi'(x) = e^{i\epsilon\alpha(x)} \varphi(x) = U(x)\varphi(x). \tag{26}$$

A este tipo de transformação damos o nome de transformação de gauge local. Então, os termos envolvendo derivadas na densidade lagrangiana irão se transformar da seguinte forma

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi(x) &\rightarrow \partial_\mu \varphi'(x) = \partial_\mu (U(x)\varphi(x)) \\ &= U(x)\partial_\mu \varphi(x) + \varphi(x)\partial_\mu U(x), \end{aligned} \tag{27}$$

ou seja, a derivada do campo  $\varphi(x)$  não se transforma como o próprio campo. Portanto, o segundo termo que aparece em (27) faz com que a densidade lagrangiana não seja mais invariante por transformações locais. Por outro lado, na obtenção de uma teoria que seja invariante por transformações deste tipo, faz-se necessário a introdução de novos campos de gauge em que generalizamos o conceito de derivada. Seja  $A_\mu(x)$  o campo de gauge, definiremos então a derivada  $D_\mu$  da seguinte forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x). \tag{28}$$

Sob uma transformação de gauge local, a nova definição de derivada, também conhecida como derivada covariante, irá se transformar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D'_\mu \varphi'(x) &= U(x)\partial_\mu \varphi(x) + (\partial_\mu U(x))\varphi(x) \\ &+ ieA'_\mu(x)U(x)\varphi(x). \end{aligned} \tag{29}$$

O significado de uma transformação de calibre local está associada à transmissão da informação ponto a ponto através do campo de calibre.

Admitindo que o campo de gauge se transforme como

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{i}{e}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \\ &= A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x), \end{aligned} \tag{30}$$

segue de (29) que a derivada covariante irá se transformar

$$D'_\mu \varphi'(x) = U(x)D_\mu \varphi(x), \tag{31}$$

ou seja, a derivada covariante do campo  $\varphi(x)$  irá se transformar da mesma maneira que o próprio campo, neste ponto, então, a densidade lagrangiana total do sistema deverá ser modificada para

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}(\varphi, D_\mu \varphi) + \mathcal{L}(A_\mu). \tag{32}$$

Onde esse o termo  $\mathcal{L}(A_\mu)$  deverá levar em consideração apenas a dinâmica do campo de gauge. Sendo agora,  $\mathcal{L}_T$  a densidade lagrangiana invariante, não apenas frente às transformações de Lorentz, como também invariante perante quaisquer transformações de gauge.

Analizando a teoria de Maxwell do eletromagnetismo, vemos que o tensor de intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$ , que é antissimétrico, pode ser escrito como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \tag{33}$$

Verificamos que tal tensor é invariante perante a transformação de gauge definida por (30), ou seja,  $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ . Com isso podemos inferir que o campo de gauge,  $A_\mu(x)$ , é de fato o quadri-potencial vetor do eletromagnetismo. Onde  $\mathcal{L}(A_\mu)$  é a densidade lagrangiana de Maxwell, a qual é escrita como

$$\mathcal{L}(A_\mu) = \mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{34}$$

Portanto, identificando o fator “e”, que aparece como gerador das transformações locais de gauge, como sendo a magnitude da carga elementar, concluindo que esta teoria é invariante de gauge por transformações do grupo  $U(1)$ , acoplando fótons com a matéria carregada, fenômeno estudado pela eletrodinâmica quântica.

## 4.2. O Modelo de Nielsen-Olesen

O modelo proposto por Nielsen-Olesen para vórtices abelianos, no contexto da relatividade geral, gera uma estrutura geométrica semelhante a de uma corda cósmica. Neste sentido, este objeto é um forte candidato para descrever matematicamente as cordas cósmicas, isto é, são fortes candidatos à fontes para este tipo de defeito. Todavia, Nielsen e Olesen, partindo de uma teoria relativística de campos, em 1973, mostraram que é possível obter soluções de vórtices [8] partindo da densidade de lagrangiana do modelo de Higgs abeliano, que é expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi][(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^*] \\ &- \mu^2\varphi\varphi^* - \lambda(\varphi\varphi^*)^2, \end{aligned} \tag{35}$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Esta densidade de lagrangiana descreve uma teoria invariante por transformações locais de gauge  $U(1)$ . O termo de auto-interação em (35),  $\lambda(\varphi\varphi^*)^2$ , é introduzido de modo que a teoria apresente um vácuo infinitamente degenerado, isto é, a teoria possui infinitos estados de menor energia, o qual satisfaz a condição  $|\varphi|^2 = m^2/\lambda$ . Assim, para uma escolha particular de configuração de vácuo,  $\varphi(x) = me^{i\alpha}/\sqrt{\lambda}$ , a simetria de gauge local é espontaneamente quebrada<sup>4</sup>.

O princípio de Hamilton,  $\delta S = 0$ , nos fornece as seguintes equações de movimento

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = j_\mu = -\frac{ie}{2}(\varphi^*\partial_\mu \varphi - \varphi\partial_\mu \varphi^*) - e^2 A_\mu \varphi^* \varphi, \tag{36}$$

$$D_\mu D^\nu \varphi = \lambda\varphi \left( \varphi\varphi^* - \frac{m^2}{\lambda} \right), \tag{37}$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ .

Para um vórtice na direção  $z$ , as componentes associadas ao potencial vetor, no sistema de coordenadas Cartesianas, são  $A^\mu = (0, A_x, A_y, 0)$ . Para esta configuração, a componente do tensor  $F_{\mu\nu}$  que nos interessa é  $F_{12}$ , pois, a partir da mesma, podemos calcular o fluxo que passa através do plano  $(x, y)$ . Parametrizando o campo de Higgs por  $\varphi = |\varphi|e^{i\chi}$ , o fluxo,  $\Phi$ , que passa através de uma área limitada por uma curva fechada  $C$ , é dado por:

$$\Phi = \int dxdyF_{12} = \oint_C dx^i A_i = -\frac{1}{e} \oint_C dx^i \partial_i \chi, \tag{38}$$

onde usamos o fato da integral de linha ser efetuada sobre a curva fechada  $C$ , muito distante do fluxo magnético e, que na mesma,  $j_\mu = 0$ .

<sup>3</sup>Chamamos este termo de Auto-interação, pois neste ponto, o campo de matéria interage consigo mesmo.

<sup>4</sup>De fato, dizemos que a simetria é espontaneamente quebrada

As equações de movimento, apresentadas em (36) e (37), são difíceis de resolver. Porém, o procedimento padrão, para diminuir a dificuldade de resolução dessas equações é supor o seguinte *ansatz* cilíndrico, com simetria ao longo do eixo  $z$ , para os campos [8]

$$A_0 = 0, \quad \vec{A} = A(r)\hat{\theta}, \quad \varphi(r, \theta) = f(r)e^{in\theta}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (39)$$

Isto reduz as equações de movimento (36) e (37) a

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} f(r) \right) + \left[ \left( \frac{n}{r} - eA(r) \right)^2 + \lambda \left( f(r)^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) \right] = 0 \quad (40)$$

e

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA(r)) \right) + \left( e^2 A(r) - \frac{ne}{r} \right) f(r) = 0. \quad (41)$$

Embora não existam soluções analíticas para estas equações acopladas, várias propriedades dos vórtices podem ser observadas por considerações gerais e análises numéricas. Do ponto de vista geral, podemos ver que o conjunto apresenta soluções assintóticas bem definidas. Para pontos próximos do núcleo do vórtice,  $f(r) \approx A(r) \approx 0$ , e para pontos distantes do núcleo do vórtice,  $f(r) \approx m/\sqrt{\lambda}$  e  $A(r) \approx ne/r$ . Uma solução numérica do conjunto de equações diferenciais é dada abaixo.

Através da fig. 2 podemos ver que do conjunto de equações diferenciais de segunda ordem acopladas surgem duas escalas de massa,  $m_s = \sqrt{2}m$ , que correspondem à massa do campo escalar deslocado  $\varphi' = \varphi - m/\sqrt{\lambda}$  e  $m_v = em/\sqrt{\lambda}$ , que corresponde à massa do campo de gauge  $A_\mu$ . O comprimento de coerência  $\xi \equiv \sqrt{2}/m_s$ , fornece a escala espacial de variação do campo de Higgs, enquanto que a profundidade de penetração,  $\delta \equiv 1/m_v$ , descreve a variação espacial do efeito eletromagnético.

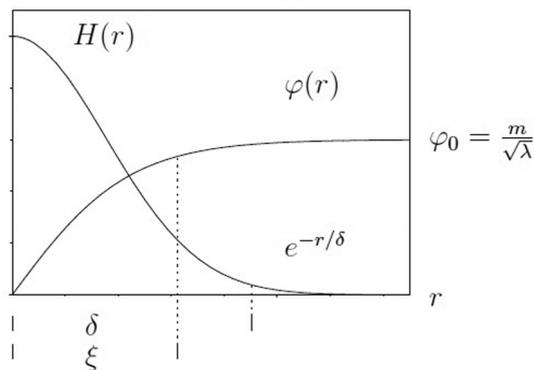
Não existe uma solução analítica exata para o sistema de equações acopladas (40) e (41), entretanto, podemos obter expressões assintóticas para os campos de Higgs e Maxwell. As formas destes campos para pontos distantes do vórtice, que fornecem soluções com densidade linear de energia finita, são dadas por [37]

$$f(r) \rightarrow \frac{m}{\sqrt{\lambda}} (1 - cte. e^{-r/\xi}), \quad (42)$$

$$A(r) \rightarrow \frac{n}{er} + cte. e^{-r/\delta} \quad (43)$$

Conforme a fig.2, vemos explicitamente que o campo  $H(r)$  difere, apreciavelmente, de zero até uma distância  $\delta$  do centro do vórtice. Já o campo de Higgs, para um valores maiores que  $\xi$ , atinge seu valor de vácuo. Esta configuração é chamada de vórtice.

Garfinkle, em 1985, estudou os efeitos gravitacionais associados aos vórtices de Nielsen e Olesen [9]. Com esta finalidade, ele usou o tensor energia-momento,  $T_{\mu\nu}$ , obtido a partir da lagrangiana do modelo de Higgs abeliano, no contexto da relatividade geral, como fonte das



**Figura 2:** Solução numérica para o sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem e acopladas, dadas por (40) e (41).

equações de Einstein. Neste caso, a métrica estática, com simetria cilíndrica, pode ser escrita como

$$ds^2 = e^a dt^2 - dr^2 - e^c d\theta^2 - e^b dz^2, \quad (44)$$

onde os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções de  $r$  satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$a(0) = b(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^c}{r^2} = 1. \quad (45)$$

De posse desta métrica<sup>5</sup> Resolvendo as equações de campo de Einstein, para o tensor energia-momento de Nielsen-Olesen, Garfinkle encontrou, como no espaço-tempo plano, soluções estáticas simetricamente cilíndricas às quais representavam vórtices. Também mostrou que, assintoticamente, o espaço-tempo em torno de um vórtice é do Minkowski a menos de um pedaço. Isto significa que, assintoticamente, o vórtice pode ser visto como uma corda cósmica contendo um campo magnético em torno da mesma.

### 5. Conclusões

Ao longo deste trabalho, apresentamos introdutoriamente, alguns motivos acerca do porquê dos defeitos topológicos tipo corda cósmica estarem em alta no âmbito da física de altas energias e da matéria condensada. O que advém do fato dos efeitos quânticos sobre os campos de matéria, no qual a topologia não trivial desses objetos causam efeitos de polarização. Compreendendo-se o vácuo como estado de menor energia, os efeitos de polarização do vácuo podem ser compreendidos como mudanças na escala dessa menor energia. Tais efeitos em teoria quântica de campos são vistos calculando os valores esperados no vácuo, VEV, de certas observáveis, tais como, a densidade de corrente induzida [25] e o tensor energia-momento dos campos

<sup>5</sup>Os cálculos envolvendo as equações (44) e (45) são extensos, caso haja alguma dúvida sugiro ao leitor ver a referência [9], entretanto, a ideia geral desse *ansatz* que consiste na métrica, se dá pelo fato da simetria do problema e no limite de  $r \rightarrow 0$  recuperarmos a métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas.

de matéria [21] induzido. Tais observáveis servem como fontes para as equações de Maxwell, no caso da densidade de corrente induzida, e para as equações de Einstein, no caso do tensor energia-momento. Neste último caso, a fonte das equações de Einstein não consiste mais no tensor energia-momento clássico,  $T_{\mu\nu}$ , mas sim no tensor energia-momento quantizado,  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ , o que acarretará em certas correções no tensor métrico [38].

Vimos também que, num referencial inercial, o espaço-tempo é descrito pela métrica de Minkowski, (2), que consiste numa métrica singular e diagonal. Contudo, quando passamos para referenciais acelerados, a métrica passa a depender do ponto, consistindo num conjunto de dez funções de coordenadas do espaço-tempo, contendo toda informação sobre a geometria da variedade. Desta forma, percebe-se que referenciais acelerados são equivalentes a campos gravitacionais, de modo que os efeitos gravitacionais podem ser descritos pelo tensor métrico,  $g_{\mu\nu}(x)$ . Assim, entende-se a gravitação como um desvio na métrica do espaço-tempo plano. Além do mais, esta métrica não é fixada arbitrariamente, mas dependerá da distribuição de matéria local.

Desta maneira, a corda cósmica é um objeto cuja densidade de matéria é infinitamente concentrada em uma linha, cuja a densidade de massa é  $\mu$ . Dispondo de tal objeto, que pode ser descrito pelo tensor energia-momento dado em (7), a deformação causada no espaço-tempo é cônica e a métrica descrita por essa densidade de matéria é dada segundo (14), que consiste numa métrica de Minkowski, com simetria cilíndrica, a menos de uma alfanha igual a  $8\pi G$ , que corresponde ao déficit de ângulo planar ortogonal ao eixo de simetria da corda cósmica.

Por fim, vimos que tais objetos idealizados podem ser descritos através dos modelos de vórtices abelianos propostos por Nielsen e Olesen. Deste modo, utilizando o modelo de Higgs abeliano, supondo um *ansatz* cilíndrico, (39), pode-se obter um conjunto de duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas que, apesar de não possuírem uma forma analítica fechada, podem ser obtidas soluções numéricas e assintóticas, (42) e (43). Desta forma observa-se que duas escalas de comprimento aparecem naturalmente desta teoria. Uma associada com o inverso da massa do campo escalar,  $\xi \equiv 1/m_s$ , e a outra relacionada com o inverso da massa do campo vetorial,  $\delta \equiv 1/m_v$ , que adquire massa devido ao mecanismo de Higgs. Ainda no âmbito dos vórtices abelianos Linet [13] e Garfinkle [9], partindo do tensor energia-momento associado ao modelo de Nielsen e Olesen como fonte das equações de Einstein, obtiveram uma métrica associada a este modelo, equivalente à métrica descrita por uma corda cósmica. Sendo a estrutura interna deste objeto delimitado pela escala de energia no qual o campo de Higgs decai para o seu valor de vácuo.

## Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à UFRR pelo suporte estrutural e infra-estrutura de trabalho.

## Referências

- [1] T.W.B. Kibble, J. Phys. A **9**, 1387 (1976).
- [2] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic String and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994)
- [3] V. Berezhinski, B. Hnatyk and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **64**, 043004 (2001).
- [4] T. Damour and A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett **85**, 3761 (2000).
- [5] P. Bahttacharjee and G. Sigl, Phys. Rep. **327**, 109 (2000)
- [6] R.D. Parks (ed) *Superconductivity, Vol I and II* (Dekker, New York, 1969); J.R. Schrieffer (ed), *Superconductivity* (Benjamin, New York, 1964).
- [7] A.A. Abrikosov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 1442 (1957) [Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957)].
- [8] N.B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
- [9] D. Garfinkle, Phys. Rev. D **32**, 1323 (1985).
- [10] P. Laguna-Castillo and R.A. Matzner, Phys. Rev. D **35**, 2933 (1987).
- [11] E.B. Bogomolny, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 861 (1976).
- [12] M.K. Prasad and C.M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [13] B. Linet, Phys. Rev. D **33**, 1833 (1986).
- [14] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, A.A. Saharian and H.H. Harutyunyan, Phys. Rev. D **91**, 064034 (2015).
- [15] T.M. Helliwell and D.A. Konkowski, Phys. Rev. D **34**, 1918 (1986).
- [16] B. Linet, Phys. Lett. A **124**, 240 (1987).
- [17] V.P. Frolov and E.M. Serebriany, Phys. Rev. D **35**, 3779 (1987).
- [18] J.S. Dowker, Phys. Rev. D **36**, 3095 (1987).
- [19] P.C.W. Davies and V. Sahni, Classical Quantum Gravity **5**, 1 (1988).
- [20] J.S. Dowker, Phys. Rev. D **36**, 3742 (1987).
- [21] M.S. Maior de Sousa, R.F. Ribeiro and E.R. Bezerra de Mello, Phys. Rev. D **95**, 045005 (2017).
- [22] V.B. Bezerra and E.R. Bezerra de Mello, Classical Quantum Gravity **11**, 457 (1994).
- [23] V.B. Bezerra and N.R. Khusnutdinov, Classical Quantum Gravity **23**, 3449 (2006).
- [24] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, A.A. Saharian and A.S. Tarloyan, Phys. Rev. D **78**, 105007 (2008).
- [25] M.S. Maior de Sousa, R.F. Ribeiro and E.R. Bezerra de Mello, Phys. Rev. D **93**, 043545 (2016).
- [26] E.R. Bezerra de Mello, Classical Quantum Gravity **11**, 1415 (1994).
- [27] E.R. Bezerra de Mello and A.A. Saharian, Eur. Phys. J. C **73**, 2532 (2013).
- [28] J. Spinelly and E.R. Bezerra de Mello, Class. Quantum Grav. **20**, 874 (2003)
- [29] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory* (John Wiley and Sons, New York, 1982).
- [30] D.A. Bromley and W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [31] G.B. Hobbs, M. Bailes, N. D. R. Bhat S. Burke-Spolaor *et al.*, Publications of the Astronomical Society of Australia **26**, 103 (2009).
- [32] A.G. Smith, in: *Proceedings of the Cambridge Workshop*, edited by G.W. Gibbons, S.W. Hawking and T. Vachaspati (Cambridge University Press, Cambridge, 1990, pg 542).

- [33] G. Hooft, *Commun. Math. Phys.* **117**, 685 (1988).
- [34] J.S. Dowker, *Nuovo Cim.* **52**, 129 (1967); L.H. Ford and A. Vilenkin, *J. Phys. A* **41**, 2353 (1981); V.B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **35**, 2031 (1987); V.B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **38**, 506 (1988).
- [35] M.O. Katanaev and I.V. Volovich, *Annals of Physics* **216**, 1 (1992).
- [36] F. Moraes, *Brazilian Journal of Physics* **30**, 304 (2000).
- [37] W. Ma and H. Pagels, *Phys. Rev. Rep. C* **36**, 137 (1978).
- [38] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).