

Teorias de calibre a la Shaw-Deser

Gauge theories via Shaw-Deser

A.A. Nogueira^{*1}, D.R. da Silva²

¹Pesquisador autônomo, Fazendinha, Zona Rural, CEP 37460-000, Passa Quatro, MG, Brasil.

²Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Física e Química, CEP 37500-903, Itajubá, MG, Brasil.

Recebido em 13 de abril de 2020. Revisado em 07 de setembro de 2020. Aceito em 08 de setembro de 2020.

Este trabalho tem como objetivo introduzir e discutir a metodologia de Shaw-Deser para descrever a interação entre matéria e radiação via simetria de calibre (abeliana/não abeliana). Nas entrelinhas, a mensagem que pretendemos passar é como a “impressão digital” da simetria de calibre local está contida na simetria de calibre global, por meio de uma interação corrente-campo (Dirac/Schwinger) e uma análise mais algébrica (iterativa), complementando a abordagem geométrica de Yang-Mills/Utiyama.

Palavras-chave: Teoria de Campos, Teorias de calibre.

The aim of this work is to present and discuss the Shaw-Deser methodology to describe the interaction between matter and radiation by gauge symmetry (abelian/non-abelian). Between the lines, the message we intend to convey is how the “fingerprint” of local gauge symmetry is contained in global gauge symmetry, through a current-field interaction (Dirac/Schwinger) and a more algebraic (iterative) analysis, complementing the geometrical approach of Yang-Mills/Utiyama.

Keywords: Field theory, Gauge theory.

1. Conceitos Preliminares

Como sabemos a busca por uma teoria unificada que consiga descrever as interações da natureza (eletromagnética, fraca, forte e gravitacional) vem de longa data, com o princípio de calibre [1] protagonizando esse busca e por conseguinte, com simetria de calibre determinando a interação entre matéria, radiação e suas auto-interações.

Quem primeiro apontou na direção de que o princípio de calibre advindo do eletromagnetismo poderia ser estendido para descrever outras interações (gravitacional) foi Weyl [2], na tentativa da simetria de calibre ser elevada a um nível mais fundamental. Tendo em vista o desenvolvimento e a descrição das interações fortes por Heisenberg, Tamm e Yukawa [3–5], em que partículas nucleares (protons e neutrons) estariam trocando mésons (píons), Yang and Mills retomam o empreendimento de Weyl [1, 6], no esforço de explicar a interação forte generalizando a simetria de fase (isospin global) para um patamar local [7], onde aparece o conceito de derivada covariante. Porém, como era bem sabido por Pauli [8], as partículas intermediadoras dessa interação associada a simetria de isospin local são não massivas, contradizendo o fato da interação forte ser descrita por uma interação de curto alcance e partículas massivas. Paralelamente ao trabalho de Yang-Mills, Utiyama estabelece um conjunto de diretrizes para construir uma teoria de gauge para todos os grupos de Lie semi-simples e inclui também no

estudo, a relação entre a gravitação na formulação de tetradas e o eletromagnetismo via conexão [9, 10]. Nos dias atuais, o caráter geométrico das interações fundamentais ainda é explorado [11, 12].

Por outro lado, colateralmente a prescrição de Yang-Mills/Utiyama, e praticamente na mesma época, Shaw desenvolve sua abordagem [13, 14], com incentivo diferente. Tendo em vista a atenção dada por Dirac na análise da simetria de calibre da época [15] e o trabalho de Schwinger [16], Shaw percebeu que a simetria de calibre do eletromagnetismo $U(1)$ apresentado na sua forma real bidimensional $SO(2)$ poderia ser generalizado para $SU(2)$, onde teríamos campos vetoriais auto-interagindo, estendendo o trabalho de seu orientador de doutorado (Salam) sobre campos escalares com auto-interação [17]. Implicitamente na abordagem de Shaw, vemos um forte apelo de implementarmos na lagrangiana termos do tipo corrente-campo ($J \times A$) com o intuito de obtermos uma simetria de calibre local. Sendo assim, o objetivo ao longo do texto é de analisar minuciosamente esse apelo por meio da abordagem contida no trabalho de Deser [18–20].

Portanto o artigo é organizado da seguinte forma: Na Secção-2 e Secção-3 estudamos a simetria de calibre abeliana $U(1)$ no caso da eletrodinâmica. Na Secção-4 exploramos novamente a simetria de calibre abeliana $U(1)$ porém no caso da eletrodinâmica escalar. Na Secção-5 analisamos a simetria de calibre não abeliana $SU(2)$. Por fim, as conclusões estão na Secção-6.

*Endereço de correspondência: andsogueira@hotmail.com.

2. Simetria U(1)

Com o intuito de introduzir a simetria de calibre abeliana (global-local), vamos relembrar como a mesma surge de uma linguagem relativística descrevendo a interação entre matéria e radiação [21, 22].

2.1. Radiação (fótons)

Dessa forma, inicialmente, construímos uma ação que represente as equações de movimento relativística associada a interação de uma partícula com um campo eletromagnético externo na forma covariante

$$\begin{aligned} S &= S_{livre} + S_{int}, \\ S_{livre} &= - \int m ds, \\ S_{int} &= -eA^\mu dx_\mu, \end{aligned} \tag{1}$$

onde ds^2 é o intervalo associado a medidas de distância no espaço de Minkowski. Conseqüentemente aplicando o princípio da mínima ação

$$\begin{aligned} \delta S &= 0, \\ x^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu, \end{aligned} \tag{2}$$

juntamente com as identidades

$$\begin{aligned} \delta ds &= \frac{1}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} dx^\mu \delta dx_\mu \\ \rightarrow \delta S_{livre} &= \int m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x_\mu ds, \\ \delta(A^\mu dx_\mu) &= -[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \frac{dx_\nu}{ds} \delta x_\mu ds \\ \rightarrow \delta S_{int} &= e[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \frac{dx_\nu}{ds} \delta x_\mu ds, \end{aligned} \tag{3}$$

encontramos a equação que representa a força de Lorentz na forma covariante

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} &= -eF^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{ds}, \\ F^{\mu\nu} &\doteq [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu]. \end{aligned} \tag{4}$$

Partículas se movendo a velocidades newtonianas ($v \ll 1$) interagem com o campo eletromagnético da seguinte forma

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= -eF^{i0} - eF^{ij} \frac{dx_j}{dt} \\ &= eE^i + e(\vec{v} \times \vec{B})^i \quad (\text{experimental}), \end{aligned} \tag{5}$$

onde na aproximação tempo próprio passou a ser o tempo coordenado.

Definimos os campos elétricos \vec{E} e magnéticos \vec{B} em termos do 4-potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ a partir da equação anterior

$$\begin{aligned} \vec{E} &\doteq - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \\ \vec{B} &\doteq \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned} \tag{6}$$

Observe que os campos elétricos e magnéticos definidos anteriormente são invariantes perante a transformação de calibre abeliana

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \partial_t \alpha, \\ \vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha, \end{aligned} \tag{7}$$

onde é necessário utilizar a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \alpha) = \vec{0}$. Os campos elétricos \vec{E} e magnéticos \vec{B} são os campos que realmente tem conteúdo físico no sentido de representarem os verdadeiros graus de liberdade apresentados na natureza. Já o 4-potencial A^μ possui uma liberdade de escolha a qual estamos representando pelas transformações de calibre (local)

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha. \tag{8}$$

A partir do conjunto de equações (6) encontramos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

onde além de aplicar o rotacional e o divergente utilizamos as identidades vetoriais

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Por outro lado, podemos também sintetizar em uma linguagem covariante como correntes eletromagnéticas (fontes) geram campos, por meio da seguinte ação

$$\begin{aligned} S_M &= \int d^4 x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\text{interação}}, \\ \mathcal{L}_M &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ \mathcal{L}_{\text{interação}} &= J^\mu A_\mu, \end{aligned} \tag{11}$$

cujas equações de movimento, pelo princípio da mínima ação de Hamilton, são dadas por

$$\partial_\mu F^{\lambda\mu} = J^\lambda. \tag{12}$$

Se impormos que S_M é invariante pela transformação de calibre em eq. (8) temos como consequência uma equação de continuidade para a 4-corrente $J^\mu = (\rho, \vec{j})$, $\partial_\mu J^\mu = 0$. Desse modo, com a finalidade de mater a simetria de calibre apenas correntes conservadas devem se acoplar com campos eletromagnéticos na forma corrente-campo ($J_\mu A^\mu$). Por fim, a equação (12) pode ser escrita em termos dos campos eletromagnéticos e das componentes da 4-corrente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}. \end{aligned} \tag{13}$$

Portanto as equações clássicas de movimento de na presença de fontes podem ser unificadas (Maxwell)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \end{aligned} \tag{14}$$

tendo em vista eq. (9) e eq. (13). Observe que a dinâmica é dada pelas equações que tem variações temporais dos campos.

2.2. Matéria (elétrons)

Assim como campos relativísticos descrevem a radiação, o mesmo deve acontecer com a matéria [23]. Como sabemos uma partícula relativística é descrita cinematicamente pelas seguinte equações

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= m^2 \quad (\text{Einstein}), \\ p^\mu &= (E, \vec{p}) = i\partial^\mu \end{aligned}$$

(princípio da correspondência, Schrödinger), (15)

onde somos conduzidos a uma equação de Klein-Gordon-Fock (KGF) $(\square + m^2)\psi = 0$.

Agora podemos aplicar o procedimento de Dirac para encontrar uma equação de primeira ordem a partir de uma equação de segunda ordem (KGF). Um conjunto de equações diferenciais em primeira ordem é escrita de maneira geral na forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI)\psi = 0, \tag{16}$$

em que γ^μ são certas matrizes, I é a matriz identidade e ψ é um vetor coluna. Sendo assim devemos ter que

$$(\alpha + \alpha^\nu \partial_\nu)(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI) = \square + m^2, \tag{17}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} i(\alpha\gamma^\mu) \partial_\mu - (\alpha I) m + \frac{i}{2}(\alpha^\nu \gamma^\mu + \alpha^\mu \gamma^\nu) \partial_\mu \partial_\nu \\ - (\alpha^\nu I) m \partial_\nu = (\square + m^2), \end{aligned} \tag{18}$$

em que para que essa igualdade seja verdadeira, as condições

$$\begin{aligned} i(\alpha\gamma^\mu) - (\alpha^\mu I) m &= 0, \\ \frac{i}{2}(\alpha^\nu \gamma^\mu + \alpha^\mu \gamma^\nu) &= g^{\mu\nu}, \\ -(\alpha I) m &= m^2 I, \end{aligned} \tag{19}$$

devem ser obedecidas. Estas condições conduzem a $\alpha = -mI$, $\alpha^\mu = -i\gamma^\mu$ e também

$$\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{álgebra de Clifford}). \tag{20}$$

Por fim tendo em vista que $|\psi|^2$ deve representar uma densidade de carga elétrica associada a uma equação de continuidade, construímos a ação de Dirac

$$\begin{aligned} S_D &= \int d^4x \mathcal{L}_D, \\ \mathcal{L}_D &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Observe que a ação é invariante pela transformação de calibre (global)

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \exp[i\alpha]\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} \exp[-i\alpha]. \end{aligned} \tag{22}$$

Tendo em vista o Teorema de Emmy Noether a transformação global acima (infinitesimal) esta associada a uma simetria

$$\begin{aligned} \delta S_D &= \int d^4x \delta \mathcal{L}_D \\ &= \int d^4x \partial_\mu [\delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi] \\ &= \int d^4x \partial_\mu (i\alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} J^\mu &= e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\ \partial_\mu J^\mu &= 0 \quad (\text{equação da continuidade}), \\ Q &= e \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi \quad (\text{carga conservada}). \end{aligned} \tag{24}$$

3. Eletrodinâmica

Como foi visto anteriormente, sabemos como descrever radiação e matéria por meio de campos relativísticos de Maxwell e Dirac respectivamente, e sabemos também que a interação entre os mesmos advém de um acoplamento corrente-campo em que a corrente é uma quantidade conservada. Consequentemente temos a seguinte densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &= \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\text{interação}}, \quad \mathcal{L}_{\text{interação}} = J_\mu A^\mu, \\ J^\mu &= e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \tag{25}$$

O termo de interação corrente-campo $(e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)$ pode ser escrito em termos dos diagramas de Stüeckelberg-Feynman (vértice) [24–30], vide Figura 1.

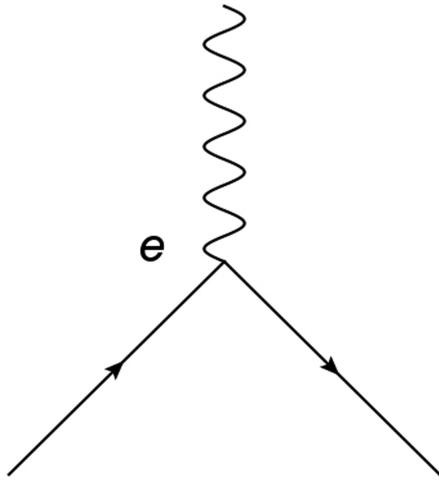


Figura 1: Vértice da eletrodinâmica

Ao escrevermos a equação anterior explicitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A^\mu \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \end{aligned} \quad (26)$$

vemos o surgimento da derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ [31]. A simetria de calibre abeliana e local é dada pelas seguintes transformações de campos (infinitesimais)

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \psi + i\alpha\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} - i\alpha\bar{\psi}, \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Portanto a simetria de calibre global garante uma corrente conservada, a qual acoplada com o campo na forma corrente-campo nos gera uma densidade de Lagrangiana total \mathcal{L}_T com simetria de calibre local, em que é possível observar naturalmente o surgimento do conceito de derivada covariante. Sendo assim, podemos dizer que a simetria de calibre global contém a “impressão digital” da simetria de calibre local.

4. Eletrodinâmica Escalar

Da mesma forma que no caso anterior, vamos aplicar a idéia de interação corrente-campo para o caso onde a matéria é descrita por campos escalares (KGF) [32–35].

4.1. Equações de segunda ordem

No momento é de nosso conhecimento que a matéria pode ser descrita por campos escalares complexos pela seguinte equação de movimento $(\square + m^2)\phi = 0$, a qual pode ser escrita em termos da seguinte densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \phi^*(\square + m^2)\phi \\ &\Leftrightarrow \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \end{aligned} \quad (28)$$

em que a operação \Leftrightarrow significa que as lagrangianas são equivalentes a menos de um termo de superfície e temos uma simetria de calibre global

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \exp[i\alpha]\phi, \\ \phi^* &\rightarrow \phi'^* = \exp[-i\alpha]\phi^*. \end{aligned} \quad (29)$$

Sendo assim, utilizando o teorema de Emmy Noether, a transformação global acima (infinitesimal) esta associada a uma simetria

$$\begin{aligned} \delta S_0 &= \int d^4x\delta\mathcal{L}_0 \\ &= \int d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta\phi^*\right] \\ &= \int d^4x\partial_\mu(-i\alpha\partial_\mu\phi^*\phi + i\alpha\phi^*\partial_\mu\phi) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

onde definimos uma corrente conservada

$$\begin{aligned} J_\mu^0 &= ie(-\partial_\mu\phi^*\phi + \phi^*\partial_\mu\phi) \\ &= ie\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi. \end{aligned} \quad (31)$$

Agora ao aplicar a metodologia corrente-campo temos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi + \frac{1}{2}J_\mu^0A^\mu \\ &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \\ &\quad + i\frac{e}{2}(-\partial_\mu\phi^*\phi + \phi^*\partial_\mu\phi)A^\mu, \end{aligned} \quad (32)$$

Em termos dos diagramas de Stückelberg-Feynman a interação $(-\partial_\mu\phi^*\phi + \phi^*\partial_\mu\phi)A^\mu$ pode ser escrita em termos de um vértice, vide Figure 2. Podemos aplicar novamente o teorema de Emmy Noether, via eq. (30) e encontrar novamente a seguinte corrente conservada

$$J_\mu^1 = J_\mu^0 + e(\phi^*\phi + \phi\phi^*). \quad (33)$$

Deste modo, pensando de maneira iterativa, podemos aplicar novamente a metodologia corrente-campo encontrando a seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}J_\mu^1A^\mu$$

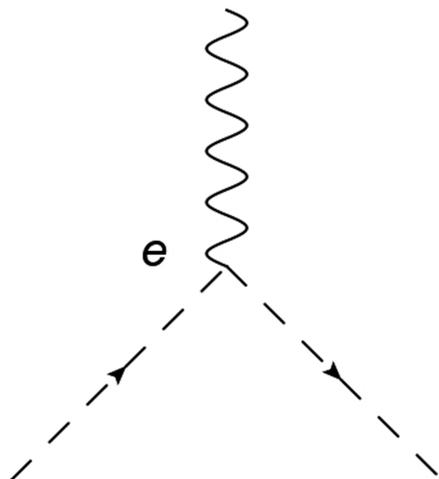


Figura 2: Vértice da eletrodinâmica escalar

$$= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + [ie(-\partial_\mu \phi^* \phi + \phi^* \partial_\mu \phi) + e^2 \phi^* \phi A_\mu] A^\mu, \tag{34}$$

onde ao utilizarmos novamente o teorema de Emmy Noether não geramos mais termos para a corrente conservada e dessa forma paramos por aqui com a iteração. Novamente em termos dos diagramas de Stüeckelberg-Feynman a interação $e^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu$ pode ser escrita em termos de um vértice, vide Figure 3.

Sendo assim ao incluímos a radiação temos a seguinte densidade de lagrangiana total

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \tag{35}$$

em que novamente noção de derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ surge naturalmente de uma simetria global e interação corrente-campo.

Como foi possível observar, novamente por meio da simetria global e do acoplamento corrente-campo é possível gerar uma simetria de calibre local, porém diferentemente da eletrodinâmica, a eletrodinâmica escalar precisa de um

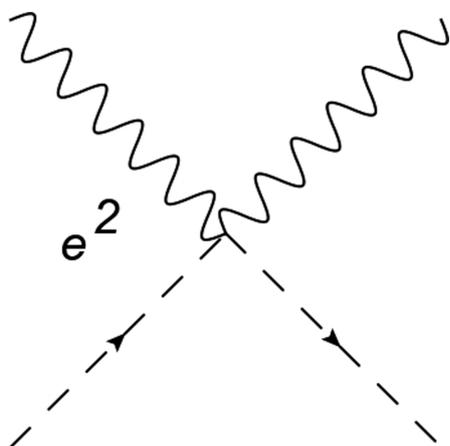


Figura 3: Vértice da eletrodinâmica escalar

ingrediente a mais, que no caso é o processo de iteração. Na primeira iteração geramos um vértice de interação (Feynman) e na segunda iteração geramos um segundo vértice, que no caso é suficiente para se ter uma simetria de calibre local.

4.2. Equações de primeira ordem

É possível também escrever a densidade de Lagrangiana que descreve o comportamento de campos escalares complexos em eq. (28) no formalismo de primeira ordem

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* B^\mu + \frac{1}{2} B^{*\mu} \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} B^*{}_\mu B^\mu - m^2 \phi^* \phi, \tag{36}$$

em que B_μ é um campo auxiliar que reduz a ordem. Pelas equações de movimento temos que

$$\begin{aligned} B_\mu &= \partial_\mu \phi, \\ B^*{}_\mu &= \partial_\mu \phi^*, \end{aligned} \tag{37}$$

e a simetria de calibre global continua sendo ditada por eq. (29).

Neste caso novamente pelo teorema de Emmy Noether em eq. (30) a simetria de calibre global nos conduz a seguinte corrente conservada

$$J_\mu^0 = ie(-B_\mu^* \phi + \phi^* B_\mu). \tag{38}$$

Logo ao aplicar a metodologia corrente-campo temos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* B^\mu + \frac{1}{2} B^{*\mu} \partial_\mu \phi \\ &+ \frac{1}{2} B^*{}_\mu B^\mu - m^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2} J_\mu^0 A^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* - ie\phi^* A_\mu) B^\mu \\ &+ \frac{1}{2} B^{*\mu} (\partial_\mu \phi + ie\phi A_\mu) \\ &+ \frac{1}{2} B^*{}_\mu B^\mu - m^2 \phi^* \phi \end{aligned} \tag{39}$$

e portanto, ao encontrar as equações de movimento temos o seguinte

$$\begin{aligned} B_\mu &= (D_\mu \phi), \\ B^*{}_\mu &= (D_\mu \phi)^*, \end{aligned} \tag{40}$$

onde naturalmente temos o surgimento da derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ e a garantia de uma simetria de calibre local. Substituindo eq. (40) em eq. (39) temos ao incluímos a radiação eq. (35).

Por fim, curiosamente, ao reduzirmos a ordem, obtemos a simetria de calibre local e a idéia de derivada covariante

por meio de uma simetria de calibre global diretamente, sem a necessidade de iterações e com a informação contida em apenas um vértice ($J_0^\mu A_\mu$ e Figura 2), diminuindo assim o número de diagramas de Stüeckelberg-Feynman necessários para descrever a interação entre campos escalares complexos e campos vetoriais. Podemos também descrever o comportamento de campos escalares por meio do formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau [36], onde temos uma equação na forma de Dirac e sendo assim de primeira ordem, e um vértice tipo eletrodinâmica (Figura 1).

5. Simetria SU(2)

Neste momento estamos aptos a analisar uma simetria de calibre não abeliana (global-local) [37, 38], sempre explorando como o conceito de simetria global e o acoplamento do tipo corrente-campo nos leva a uma simetria local (Shaw-Deser) [18–20]. O protótipo dessa idéia pode ser visto na análise de Shaw para a simetria $SO(2)$ [1, 13, 14]. Como a inspiração para esse estudo é baseada na descrição de interações em física nuclear com conceitos do eletromagnetismo (simetria de calibre), vamos emprestar a seguinte nomenclatura: Hadrons são as partículas que carregam a interação forte e são divididas em bárions (prótons e neutrons) e mésons (píons). Vamos chamar o estudo da interação entre os hadrons de hadrodinâmica.

5.1. Matéria (bárions)

Seguindo a fenomenologia associada a interação forte (isospin), com o intuito de descrever o comportamento de prótons e neutrons (núcleons), escrevemos uma densidade de Lagrangiana em termos de um dublete de campos de Dirac

$$\mathcal{L}_{(dublete)} = \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i, \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Por comodidade, geralmente omitimos os índices internos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

A densidade de Lagrangiana anterior é invariante pela seguinte transformação

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = U\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger, \end{aligned} \quad (43)$$

em que $UU^\dagger = 1$, sendo $U_{2 \times 2}$ uma matriz unitária ($U^{-1} = U^\dagger$) pertencente ao conjunto de matrizes com entradas no corpo dos números complexos. Pois bem, matrizes unitárias satisfazem os axiomas de um grupo de transformações (associatividade, existência do elemento neutro e existência do elemento simétrico) [39].

Agora de maneira geral, matrizes unitárias $U_{2 \times 2}$ podem ser escritas como $U = \exp[iH]$, onde $H_{2 \times 2}$ é uma

matrix hermitiana ($H^\dagger = H$). Como sabemos, matrizes hermitianas satisfazem os axiomas de um espaço vetorial (associatividade, comutatividade, elemento identidade, elemento inverso, compatibilidade e distributividade) [40] e sendo assim no presente caso podemos escrever $H_{2 \times 2}$ em termos da seguinte base $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$$\begin{aligned} H &= x_0 I + x_a \sigma_a, \quad a = 1, 2, 3; \\ I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Portanto, a menos de uma fase global ($\exp[ix_0 I]$), com os resultados anteriores podemos dizer que a matriz U possui a seguinte forma

$$\begin{aligned} U &= \exp[i\alpha_{(a)} T_{(a)}], \quad a = 1, 2, 3; \\ [T_{(a)}, T_{(b)}] &= i\epsilon_{abc} T_{(c)}, \end{aligned} \quad (45)$$

em que $\alpha_a = 2x_a$, $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ e ϵ_{abc} é o símbolo de Levi-Civita com $\epsilon_{123} = 1$. Por fim, pela identidade $\det U = \exp[\text{tr} \ln U]$ concluímos que $\det U = 1$. Representamos o grupo de transformações especiais ($\det U = 1$), unitárias (U) e em 2 dimensões pela seguinte nomenclatura, $SU(2)$. O grupo de transformações $SU(2)$ é um exemplo contido em uma estrutura matemática mais abstrata e geral conhecida como grupos de Lie [41, 42].

Como pode ser visto, a ação associada ao dublete de férmions ($S_{(dublete)} = \int d^4x \mathcal{L}_{(dublete)}$) é invariante pela seguinte transformação de calibre infinitesimal (global)

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \psi + \delta\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}, \end{aligned} \quad (46)$$

em que

$$\begin{aligned} \delta\psi &= i\alpha_a T_{(a)}\psi, \\ \delta\bar{\psi} &= -i\alpha_a \bar{\psi} T_{(a)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Por meio do Teorema de Emmy Noether a transformação de simetria global acima (infinitesimal) esta associada a uma carga conservada

$$\begin{aligned} \delta S_{(dublete)} &= \int d^4x \delta \mathcal{L}_{(dublete)} \quad (48) \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(dublete)}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu (i\alpha_a \bar{\psi} \gamma^\mu T_{(a)} \psi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde definimos a seguinte corrente conservada $J_{(a)}^\mu = g\bar{\psi}\gamma^\mu T_{(a)}\psi$, sendo g uma carga.

Consequentemente, a prescrição do acoplamento corrente-campo nos leva a seguinte densidade de lagrangiana associada ao dublete de férmions minimamente acoplados com campos vetoriais externos (Maxwell)

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \mathcal{L}_{(\text{dublete})} + \mathcal{L}_{\text{interação}},$$

$$\mathcal{L}_{\text{interação}} = J_{(a)}^\mu A_{(a)\mu}. \tag{49}$$

Por meio dos diagramas de Stüeckelberg-Feynman a interação $g\bar{\psi}\gamma^\mu T_{(a)}\psi A_{(a)\mu}$ pode ser escrita em termos de um vértice, vide Figure 4.

Agora a questão que nos resta é como inserir na densidade de Lagrangiana anterior a radiação, assunto abordado na próxima subsecção. Mas antes, vamos encontrar a transformação que os campos vetoriais $A_{(a)\mu}$ devem ter de tal forma que a transformação de calibre global em eq. (45) passa a ser local e depender de ponto $\alpha_a(x)$ e uma simetria de calibre local de $\mathcal{L}_{\text{matéria}}$. Para isso basta escrevermos eq. (49) em termos do conceito de derivada covariante

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_{(a)\mu}T_{(a)}, \tag{50}$$

e impormos que $A_{(a)\mu}$ deve se transformar de tal forma que

$$D_\mu\psi \rightarrow D_\mu\psi' = UD_\mu\psi. \tag{51}$$

A solução para esse problema será a seguinte transformação de calibre (infinitesimal) local para os campos $A_{(a)\mu}$

$$A_{(a)\mu} \rightarrow A'_{(a)\mu} = A_{(a)\mu} - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha_a - \epsilon_{abc}\alpha_b A_{(c)\mu}. \tag{52}$$

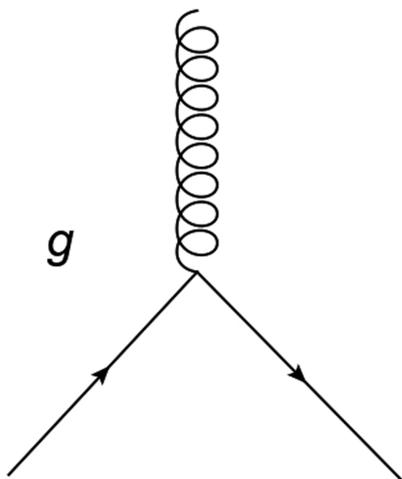


Figura 4: Vértice da hadrodinâmica

5.2. radiação (mésons)

Seguindo os passos do eletromagnetismo, campos que se acoplam com correntes conservadas na forma corrente-campo devem possuir a seguinte simetria de calibre local

$$A_{(a)\mu} \rightarrow A'_{(a)\mu} = A_{(a)\mu} + \partial_\mu\alpha_{(a)}. \tag{53}$$

Desse modo construímos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{(\text{triplete})}^{(0)} = -\frac{1}{4}F_{(a)}^{\mu\nu}F_{(a)\mu\nu},$$

$$F_a^{\mu\nu} = [\partial^\mu A_{(a)}^\nu - \partial^\nu A_{(a)}^\mu], \quad a = 1, 2, 3. \tag{54}$$

Como podemos observar, a densidade de Lagrangiana anterior é invariante pela seguinte simetria global (rotações)

$$A_{(a)\mu} \rightarrow A'_{(a)\mu} = R_{ab}A_{(b)\mu},$$

$$R^t R = I, \tag{55}$$

sendo R^t a matrix transposta de R . De maneira geral podemos escrever $R_{3 \times 3}$ da seguinte modo $R = \exp[G]$, dessa forma $G^t = -G$ e sendo assim as matrizes $G_{3 \times 3}$ são anti-simétricas e constituem um espaço vetorial. Podemos escrever G na seguinte base $G_{ab} = x_a\epsilon_{(a)bc}$, em que $\epsilon_{(a)bc}$ é o símbolo de Levi-Civita.

Portanto, com os resultados anteriores, podemos dizer que a matriz R possui a seguinte forma (Lie) [41, 42].

$$R = \exp[i\alpha_{(a)}T_{(a)}], \quad a = 1, 2, 3;$$

$$[T_{(a)}, T_{(b)}] = i\epsilon_{abc}T_{(c)}, \tag{56}$$

em que $\alpha_a = ix_a$, $T_{(a)bc} = -i\epsilon_{(a)bc}$. Observe que temos a seguinte identidade de Jacobi

$$[T_{(a)}, [T_{(b)}, T_{(c)}]] + [T_{(b)}, [T_{(c)}, T_{(a)}]] + [T_{(c)}, [T_{(a)}, T_{(b)}]] = 0, \tag{57}$$

sendo $[,]$ o comutador. Por fim, pela identidade $\det R = \exp[\text{tr} \ln R]$ concluímos que $\det R = 1$. Representamos o grupo de transformações especiais ($\det R = 1$), ortogonais (O) e em 3 dimensões pela seguinte nomenclatura, $SO(3)$. Como podemos perceber, $SO(3)$ é uma representação de $SU(2)$ no corpo dos reais.

Como pode ser visto, a ação associada ao triplete de bosons vetoriais ($S_{(\text{triplete})}^{(0)} = \int d^4x \mathcal{L}_{(\text{triplete})}^{(0)}$) é invariante pela seguinte transformação de calibre infinitesimal (global)

$$A_{(a)\mu} \rightarrow A'_{(a)\mu} = A_{(a)\mu} + \delta A_{(a)\mu},$$

$$\delta A_{(a)\mu} = i\alpha_{(b)}T_{(b)ac}A_{(c)\mu}. \tag{58}$$

Agora, utilizando a experiência que tivemos no caso do campo escalar com auto-interação, vamos reduzir a ordem da Lagrangiana associada ao triplete de bosons vetoriais por meio de um conjunto de campos auxiliares ($B_{(a)}^{\mu\nu}$)

$$\mathcal{L}_{(triplete)} = -F_{(a)}^{\mu\nu}B_{(a)\mu\nu} + B_{(a)}^{\mu\nu}B_{(a)\mu\nu}, \quad a = 1, 2, 3. \tag{59}$$

com o intuito de estudar a relação entre campos vetoriais com auto-interação e a simetria de calibre (global/local) de maneira direta. Dessa forma a transformação de calibre infinitesimal (global) é dada por

$$\begin{aligned} A_{(a)\mu} &\rightarrow A'_{(a)\mu} = A_{(a)\mu} + \delta A_{(a)\mu}, \\ B_{(a)\mu} &\rightarrow B'_{(a)\mu} = B_{(a)\mu} + \delta A_{(a)\mu}, \end{aligned} \tag{60}$$

em que

$$\begin{aligned} \delta A_{(a)\mu} &= i\alpha_{(b)}T_{(b)ac}A_{(c)\mu}, \\ \delta B_{(a)\mu} &= i\alpha_{(b)}T_{(b)ac}B_{(c)\mu}. \end{aligned} \tag{61}$$

Agora, por meio do Teorema de Emmy Noether a transformação de simetria global acima (infinitesimal) esta associada a uma carga conservada

$$\begin{aligned} \delta S_{(triplete)} &= \int d^4x \delta \mathcal{L}_{(triplete)} \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(triplete)}}{\partial (\partial_\mu A_{(s)\nu})} \delta A_{(s)\nu} \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu (-2B_{(s)}^{\mu\nu} i\alpha_{(b)}T_{(b)sc}A_{(c)\nu}) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{62}$$

onde definimos a seguinte corrente conservada

$$J_{(b)}^\mu = -2g\epsilon_{(b)sc}B_{(s)}^{\mu\nu}A_{(c)\nu}, \tag{63}$$

Seguindo a prescrição de Shaw-Deser de interação corrente-campo juntamente com a experiência obtida na análise do campo escalar escrevemos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(triplete)} &= -F_{(a)}^{\mu\nu}B_{(a)\mu\nu} + B_{(a)}^{\mu\nu}B_{(a)\mu\nu} + \frac{1}{2}J_{(b)}^\mu A_{(b)\mu}, \\ &= -[F_{(a)}^{\mu\nu} + g\epsilon_{(a)bc}A_{(b)}^\mu A_{(c)}^\nu]B_{(a)\mu\nu} \\ &\quad + B_{(a)}^{\mu\nu}B_{(a)\mu\nu}, \end{aligned} \tag{64}$$

onde temos como consequência a seguinte equação de movimento para o campo auxiliar

$$B_{(a)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{(a)}^{\mu\nu} + g\epsilon_{(a)bc}A_{(b)}^\mu A_{(c)}^\nu. \tag{65}$$

Dessa forma, a densidade de Lagrangiana associada ao triplete de campos vetoriais pode ser escrita do seguinte modo

$$\mathcal{L}_{\text{radiação}} = \mathcal{L}_{(triplete)} = -\frac{1}{4}B_{(a)}^{\mu\nu}B_{(a)\mu\nu}. \tag{66}$$

A densidade de Lagrangiana anterior é invariante pela transformação de calibre local vista em eq. (52). Para demonstrar o fato anterior é necessário utilizar a identidade de Jacobi

$$\epsilon_{abd}\epsilon_{cde} + \epsilon_{cad}\epsilon_{bde} + \epsilon_{bcd}\epsilon_{ade} = 0, \tag{67}$$

que é habitual na literatura.

Por motivos de completeza, vamos encontrar a densidade de Lagrangiana associada ao triplete de campos vetoriais em eq. (66) com a prescrição de Shaw-Deser de interação corrente-campo juntamente com o método iterativo, sem reduzir a ordem da Lagrangiana com um campo auxiliar. Novamente por meio do Teorema de Emmy Noether a transformação de simetria global em eq. (58) (infinitesimal) esta associada a seguinte carga conservada

$$\begin{aligned} \delta S_{(triplete)}^{(0)} &= \int d^4x \delta \mathcal{L}_{(triplete)}^{(0)} \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(triplete)}^{(0)}}{\partial (\partial_\mu A_{(s)\nu})} \delta A_{(s)\nu} \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu (-F_{(s)}^{\mu\nu} i\alpha_{(b)}T_{(b)sc}A_{(c)\nu}) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{68}$$

onde definimos a seguinte corrente conservada

$$J_{(b)}^{(0)\mu} = -g_0\epsilon_{(b)sc}F_{(s)}^{\mu\nu}A_{(c)\nu}, \tag{69}$$

sendo g_0 uma carga associada (proporcional) a constante de acoplamento universal g . Seguindo a prescrição de Shaw de interação corrente-campo e o método iterativo visto para campos escalares auto-interagentes escrevemos a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(triplete)}^{(1)} &= -\frac{1}{4}F_{(a)}^{\mu\nu}F_{\mu\nu(a)} + J_{(b)}^{(0)\mu}A_{(b)\mu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{(a)}^{\mu\nu}F_{\mu\nu(a)} \\ &\quad -g_0\epsilon_{(b)sc}F_{(s)}^{\mu\nu}A_{(c)\nu}A_{(b)\mu}, \end{aligned} \tag{70}$$

onde via os diagramas de Stüeckelberg-Feynman a interação $g_0\epsilon_{(b)sc}F_{(s)}^{\mu\nu}A_{(c)\nu}A_{(b)\mu}$ pode ser escrita em termos de um vértice, vide Figure 5. Esse vértice também descreve a interação $J_{(b)}^\mu A_{(b)\mu}$, vista anteriormente no formalismo de redução de ordem. Podemos aplicar novamente o teorema de Emmy Noether

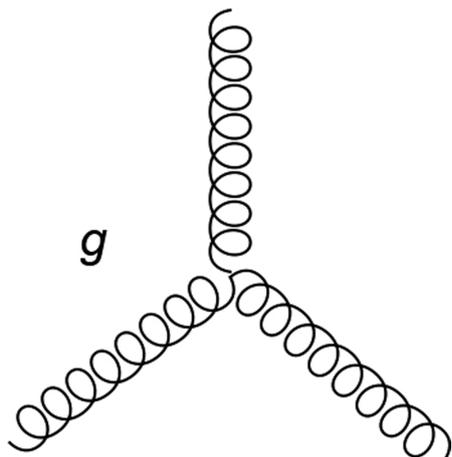


Figura 5: Vértice da hadrodinâmica

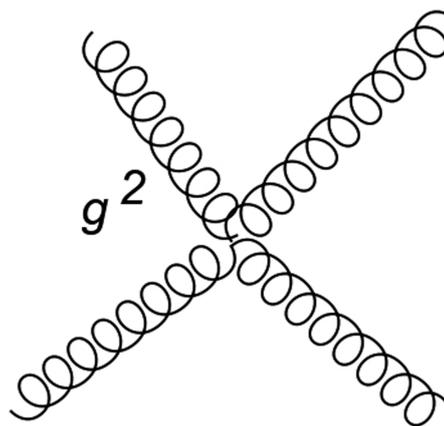


Figura 6: Vértice da hadrodinâmica

$$\begin{aligned} \delta S_{(triplete)}^{(1)} &= \int d^4x \delta \mathcal{L}_{(triplete)}^{(1)} \quad (71) \\ &= \int d^4x \partial_\theta \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(triplete)}^{(1)}}{\partial (\partial_\theta A_{(r)\beta})} \delta A_{(r)\beta} \right] \\ &= \int d^4x \partial_\theta \left[-\alpha_{(f)} F_{(r)}^{\theta\beta} \epsilon_{(f)rc} A_{(c)\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2g_0 \epsilon_{(b)rc} \epsilon_{(f)rd} \alpha_{(f)} A_{(c)}^\beta A_{(b)}^\theta A_{(d)\beta} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

e definir novamente a seguinte corrente conservada

$$\begin{aligned} J_{(f)}^{(1)\theta} &= g_1 \left[-F_{(r)}^{\theta\beta} \epsilon_{(f)rc} A_{(c)\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2g_0 \epsilon_{(b)rc} \epsilon_{(f)rd} A_{(c)}^\beta A_{(b)}^\theta A_{(d)\beta} \right]. \quad (72) \end{aligned}$$

Neste caso, acoplando novamente as correntes com os campos, chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(triplete)}^{(1)} &= -\frac{1}{4} F_{(a)}^{\mu\nu} F_{\mu\nu(a)} \\ &\quad - g_0 \epsilon_{(b)sc} F_{(s)}^{\mu\nu} A_{(c)\nu} A_{(b)\mu} + J_{(f)}^{(1)\theta} A_{(f)\theta} \\ &= -\frac{1}{4} F_{(a)}^{\mu\nu} F_{\mu\nu(a)} \\ &\quad - (g_0 + g_1) \epsilon_{(b)sc} F_{(s)}^{\mu\nu} A_{(c)\nu} A_{(b)\mu} \\ &\quad + 2g_0 g_1 \epsilon_{(b)rc} \epsilon_{(f)rd} \\ &\quad \times A_{(c)}^\beta A_{(b)}^\theta A_{(d)\beta} A_{(f)\theta}, \quad (73) \end{aligned}$$

e percebemos que ao utilizarmos novamente o teorema de Emmy Noether não geramos mais termos para a corrente conservada e sendo assim paramos por aqui com o método iterativo. Com os diagramas de Stüeckelberg-Feynman a interação $g_0 g_1 \epsilon_{(b)rc} \epsilon_{(f)rd} A_{(c)}^\beta A_{(b)}^\theta A_{(d)\beta} A_{(f)\theta}$ pode ser escrita em termos de um vértice, vide Figure 6.

Agora para que eq. (73) seja equivalente à eq. (70) e dessa forma, por meio de uma simetria de calibre global

obtermos uma simetria de calibre local, devemos resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} g_0 + g_1 &= \frac{g}{2}, \\ 2g_0 g_1 &= -\frac{g^2}{4}. \quad (74) \end{aligned}$$

O sistema de equações anterior nos leva a seguinte equação polinomial de segundo grau

$$8g_0^2 - 4gg_0 - g^2 = 0, \quad (75)$$

cuja resolução nos conduz ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{g}{4} (1 \pm \sqrt{3}), \\ g_1 &= \frac{g}{4} (1 \mp \sqrt{3}), \quad (76) \end{aligned}$$

em que observamos a relação entre a simetria de calibre local e a universalidade da constante de acoplamento, proporcional a g .

Portanto os resultados anteriores nos levam a sintetizar a seguinte lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &= \mathcal{L}_{\text{radiação}} + \mathcal{L}_{\text{matéria}} \\ &= \mathcal{L}_{(triplete)} + \mathcal{L}_{(dublete)} + \mathcal{L}_{\text{interação}} \\ &= -\frac{1}{4} B_{(a)}^{\mu\nu} B_{(a)\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi, \quad (77) \end{aligned}$$

em que a simetria de calibre não abeliana e local é dada pelas seguintes transformações de campos (infinitesimais)

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \psi + i\alpha_a T_{(a)} \psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} - i\alpha_a \bar{\psi} T_{(a)}, \\ A_{(a)\mu} &\rightarrow A'_{(a)\mu} = A_{(a)\mu} - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a \end{aligned}$$

$$-\epsilon_{abc}\alpha_b A_{(c)\mu}. \quad (78)$$

Como vimos, foi possível construir a auto-interação entre campos vetoriais pela prescrição de Shaw-Deser e o acoplamento corrente-campo, usando como guia a simetria de calibre (global/local) e a experiência que tivemos na análise do campo escalar complexo. Agora o estudo da auto-interação de campos escalares foi estudado em grande parte por Salam, e serviu de estímulo para a leitura de Shaw no caso vetorial.

6. Comentários Finais

Conforme foi possível testemunhar ao longo do texto, a simetria de calibre local obtida e escrita nos moldes de uma interação corrente-campo (JA), desempenha um papel crucial na determinação da dinâmica de interação (vértices) entre matéria e radiação.

No primeiro ato estudamos como a simetria de calibre $U(1)$ nos leva a uma dinâmica de interação entre campos fermiônicos e vetoriais.

No segundo ato estudamos novamente a simetria de calibre $U(1)$, porém a mesma nos levou a descrever a interação entre campos escalares e vetoriais. Essa análise acabou sendo um pouco mais sutil devido ao fato de campos escalares serem descritos por equações de segunda ordem. Ao moldarmos a simetria de calibre local em termos de uma interação corrente-campo necessitamos de um processo de iterações e acabamos gerando 2 vértices descrevendo a interação porém ao utilizarmos campos auxiliares para reduzir a ordem das equações que descrevem o comportamento dos campos escalares (primeira ordem), obtivemos a dinâmica de maneira direta e com apenas 1 vértice.

Por fim no terceiro ato utilizamos toda experiência adquirida e ferramentas associadas as análises anteriores da simetria de calibre $U(1)$ para explorar a simetria de calibre $SU(2)$. O desafio para manifestar essa simetria de calibre local do ponto de vista de interações corrente-campo ($J \times A$) acabou sendo maior, tanto na introdução de campos auxiliares para reduzir a ordem quanto na utilização do método iterativo. O desfecho dessa investigação é que além das interações entre campos fermiônicos e campos vetoriais teríamos também auto-interações entre campos vetoriais.

Agora um ponto que devemos complementar é a questão da massa para as partículas intermediadoras de interação em teorias de calibre não abelianas. Essa questão só foi revisitada após o entendimento de mecanismos geradores de massa via o conceito de quebra espontânea de simetria, no contexto de unificação da interação eletromagnética com a interação fraca (Teoria Eletrofraca) [43,44]. A agenda para o entendimento dessa unificação nos moldes de uma simetria de calibre $SU(2) \times U(1)$, se inicia com o trabalho de Fermi e a interação corrente-corrente ($J \times J$) para descrever o decaimento beta, ganha

apreço com os trabalhos envolvendo o dublete de $SU(2)$ de Schwinger e Glashow, sendo necessário a extensão para $SU(2) \times U(1)$ com o intuito de incluir o conceito de carga elétrica por meio da idéia de Gell-Mann e Nishijima (hiper-carga) e culmina com a inclusão de mecanismos geradores de massa não somente para férmions (Yukawa) mas também para campos vetoriais (Higgs). Por outro lado, a discussão sobre a interação forte do ponto de vista de uma teoria de calibre passa a ser dada pela simetria $SU(3)$, onde teríamos uma dinâmica de interação entre quarks (matéria) e gluons (radiação).

Outra questão que foi levantada no texto foi o uso de campos auxiliares para se estudar a simetria de calibre. No caso do texto o campo auxiliar foi utilizado para reduzir a ordem da Lagrangiana mas no contexto geral da física campos auxiliares podem ser utilizados para se estudar a simetria de calibre em teorias com campos vetoriais massivos (Stüeckelberg) [45], como multiplicador de Lagrange quântico para se fixar o calibre (Nakanishi) [46] ou mesmo como um campo de fundo mantendo a simetria de calibre em todas as etapas do cálculo (DeWitt) [47].

Apesar de termos analisado ao longo do trabalho como a simetria de calibre dita a dinâmica das interações fundamentais no modelo padrão (interações eletromagnéticas, fraca e forte), poderíamos utilizar o método iterativo ou a redução de ordem para estudar a simetria de calibre em gravidade também, em que as raízes para o estudo estariam nos trabalhos de Gupta, Kraichnan e Feynman [48–51] e cuja dinâmica também poderia ser introduzida nos moldes de uma interação corrente-campo [18–20]. Poderíamos também estudar como a simetria de calibre molda a dinâmica quântica das interações, com a inclusão dos fantasmas [52]. Na literatura quem explorou e abstraiu vastamente a aplicação do objeto corrente-campo ($J \times A$) na física foi Schwinger, primeiramente introduzindo o formalismo de integração funcional e análise de Green por meio do princípio variacional da ação quântica [53–55] e posteriormente, de maneira inabitual e talvez excêntrica, apimentando a discussão da dinâmica dos campos via sua Teoria das Fontes [56]. Por meio da Teoria das fontes, Schwinger também esculpiu a dinâmica quântica associada ao efeito Casimir em termos de fontes (correntes), campos e o conceito de espalhamento e se livrando das partículas virtuais associadas aos diagramas bolhas na visualização de Feynman [57]. Concluímos então o presente ensaio, chamando atenção para o fato do objeto corrente-campo ($J \times A$) estar ditando como se descreve a dinâmica na versão contemporânea da Física, inicialmente dada por Newton ($F = ma$).

Agradecimentos

Os autores agradecem J. A. Helayël-Neto pelo material sobre o assunto. D. R. da Silva agradece a Capes pelo apoio financeiro. Os autores agradecem o parecerista anônimo pelas observações cuidadosas.

Referências

- [1] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [2] H. Weyl, *Preuss Akad. Wiss.* **465**, 29 (1918).
- [3] W. Heisenberg, *I. Z. Physik* **77**, 1 (1932).
- [4] I.G. Tamm, *Nature* **133**, 981 (1934).
- [5] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **17**, 48 (1935).
- [6] H. Weyl, *Zeit. f. Physik* **330**, 56 (1929).
- [7] C.N. Yang e R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [8] N. Straumann, em *The Ninth Marcel Grossmann Meeting*, editado por V.G. Gurzadyan, R.T. Jantzen e R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2002)
- [9] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1957).
- [10] O.A. Acevedo, R.R. Cuzinato, B.M. Pimentel e P.J. Pompeia, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **40**, e4302 (2018).
- [11] M.D. Maia, *Geometry of the Fundamental Interactions* (Springer-Verlag, New York, 2011).
- [12] R. Aldrovandi e J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Cingapura, 2017), 2^a ed.
- [13] R. Shaw, *Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles*. Tese de Doutorado, Cambridge University, Cambridge (1955).
- [14] J.C. Taylor, *Gauge Theories In The Twentieth Century* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2001).
- [15] P.A.M. Dirac, *Il Nuovo Cim.* **7**, 925 (1950).
- [16] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **91** 713 (1953).
- [17] A. Salam, *Phys. Rev.* **82**, 217 (1951).
- [18] S. Deser, *General Relativity and Gravitation* **1**, 9 (1970).
- [19] S. Okubo, *Introduction To General Relativity, lectures notes Preprint UR-695* (University of Rochester, Rochester, 1978).
- [20] M. Blagojevic, *Gravitation and gauge symmetries* (Routledge, Abingdon, 2001).
- [21] J. Foster e J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity* (Springer, New York, 2006), 3^a ed.
- [22] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1987), 4^a ed.
- [23] S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Row, Peterson and Company, New York, 1961).
- [24] E. Stüeckelberg, *Phys. Acta* **14**, 588 (1941).
- [25] E. Stüeckelberg, *Helv. Phys. Acta* **14**, 588 (1941).
- [26] J. Lacki, H. Ruegg and G. Wanders e E.C.G. Stueckelberg, *An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics* (Birkhäuser Verlag AG, Basel, 2008).
- [27] R. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [28] S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It* (Princeton University, New Jersey, 1994).
- [29] A.C. Aguilar, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **40**, e4205 (2018).
- [30] V. Pleitez, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **40**, e4208 (2018).
- [31] P.A.M. Dirac, *The Principle of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, London, 1958), 4^a ed.
- [32] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic quantum mechanics* (MC Graw Hill Book Company, New York, 1964).
- [33] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic quantum fields* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [34] L. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996), 2^a ed.
- [35] A.F. Ferrari, A.A. Nogueira e C. Palechor, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **40**, e3315 (2018).
- [36] T.R. Cardoso e B.M. Pimentel, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **38**, 3 (2016).
- [37] J.B. Neto, *Eletrodinâmica Quântica, notas de curso* (IF/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988).
- [38] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields* (Princeton University Press, Princeton, 2002).
- [39] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems* (Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1962).
- [40] T.M. Apostol, *Calculus vol. 1, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra* (John Wiley and Sons, New York, 1991), 2^a ed.
- [41] A. Das e S. Okubo, *Lie Groups and Lie Algebras for Physicists* (World Scientific Publishing Company, Singapura, 2014).
- [42] L.A. Ferreira, *Lecture Notes on Lie Algebras and Lie Groups*, disponível em: <http://www.ifsc.usp.br/~laf/algebra/notes.pdf>
- [43] S. Weinberg, *Phys. Rev* **19**, 21 (1967).
- [44] J.L. Lopes, *Gauge Field Theories an Introduction* (Pergamon Press, Oxford, 1981).
- [45] H. Ruegg e M.R. Altaba, *International Journal of Modern Physics A* **19**, 3265 (2004).
- [46] N. Nakanishi e I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity, Lecture Notes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1990), v. 27.
- [47] L.F. Abbott, *Acta Physica Polonica B* **13**, 33 (1982).
- [48] S.N. Gupta, *Phys. Rev.* **96**, 1683 (1954).
- [49] R.H. Kraichnan, *Phys. Rev.* **98**, 1118 (1955).
- [50] R.P. Feynman, *Acta Physica Polonica* **24**, 697 (1963).
- [51] R.P. Feynman, F.B. Morinigo e W.G. Wagner, *Feynman Lectures On Gravitation* (Westview Press, Boulder, 1995).
- [52] G. Scharf, *Gauge field theories spin one and spin two 100 years after general relativity* (Dover Publications, Nova York, 2016).
- [53] J. Schwinger, *Symbolism of Atomic Measurements* (Springer, New York, 2001).
- [54] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74**, 1439 (1948).
- [55] C.A.M. Melo, B.M. Pimentel e J.A. Ramirez, *Rev. Bra. Ens. Fis.* **35**, 4302 (2013).
- [56] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields* (Perseus Books, Boston, 1973), v. 1, 2 e 3.
- [57] F.A. Barone, A.A. Nogueira e B.M. Pimentel, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **38**, e3317 (2016).