

Equação de Klein-Gordon-Fock para uma partícula sob efeito de campo magnético clássico em coordenadas da frente de luz

Klein-Gordon-Fock equation for a particle under classical magnetic field effect in light front coordinate

Damião P. Meira Filho^{*1}, Jorge K. S. Kamassury², Sérgio A. de S. Farias³,
Luisa H. S. de Sousa¹, Saulo de A. Gomes¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Campus Santarém, Santarém, PA, Brasil.

²Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis, SC, Brasil.

³Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Campus Rondon, Santarém, PA, Brasil.

Recebido em 7 de maio de 2021. Revisado em 4 de julho de 2021. Aceito em 4 de agosto de 2021.

Este artigo destina-se a apresentar sob uma perspectiva didática os detalhes e procedimentos matemáticos necessários para a construção da equação diferencial quântica, sob regime relativístico, denominada Equação de Klein-Gordon-Fock (EK-G-F), admitindo o sistema de coordenadas da frente de luz. Para tanto, inicialmente, destacamos algumas propriedades algébricas da Teoria da Relatividade Especial de Einstein assim como apresentamos resumidamente as coordenadas da frente de luz em termos das coordenadas cartesianas e do parâmetro de evolução temporal, isto é, do espaço de Minkowski, obtendo dessa forma a EK-G-F tanto em coordenadas usuais do espaço de Minkowski, quanto em coordenadas da frente de Luz. Em seguida, para essas últimas coordenadas, desenvolvemos detalhadamente a estrutura algébrica da EK-G-F para uma partícula quântica eletricamente carregada em regime de relatividade especial e sob influência de configurações de campos magnéticos clássicos. Além disso, obtemos a EK-G-F com estrutura algébrica similar a uma equação diferencial quântica de Schrödinger. Por fim, como aplicação imediata do uso dessas coordenadas, desenvolvemos os trâmites e passos algébricos necessários para obtenção do operador de aniquilação do tipo integral de movimento, o qual configura-se como estrutura matemática necessária para construção dos estados quânticos coerentes.

Palavras-chave: Equação de Klein-Gordon-Fock, Coordenadas da Frente de Luz, Sistemas de Coordenadas, Operadores de Criação e Aniquilação.

This article is intended to present, from a didactic perspective, the details and mathematical procedures necessary for the construction of the quantum differential equation, under a relativistic regime, called the Klein-Gordon-Fock Equation (KGFE), admitting the front coordinate system of light. To do so, initially, we highlight some algebraic properties of Einstein's Special Theory of Relativity as well as briefly present the coordinates of the light front in terms of cartesian coordinates and the temporal evolution parameter, that is, of Minkowski space, thus obtaining the KGFE both in usual coordinates of Minkowski space and in coordinates of the light front. Then, for these last coordinates, we develop in detail the algebraic structure of KGFE for an electrically charged quantum particle in a special relativity regime and under influence of classical magnetic field configurations. Furthermore, we obtain the KGFE with an algebraic structure similar to a Schrödinger quantum differential equation. Finally, as an immediate application of the use of these coordinates, we developed the necessary algebraic procedures and steps to obtain the annihilation operator of the integral type of motion, which is configured as the necessary mathematical structure for the construction of coherent quantum states.

Keywords: Klein-Gordon-Fock Equation, Light Front Coordinates, Coordinate Systems, Creation and Annihilation Operators.

1. Introdução

Reconhecida como a primeira equação de onda relativística, a *equação de Klein-Gordon-Fock* (EK-G-F) foi proposta em 1926, de forma independente, pelo físico sueco Oskar Klein [1], o físico alemão Walter Gordon [2]

e o físico soviético Vladimir Fock [3, 4]¹ e embora não tenha sido bem-sucedida em descrever os elétrons em condições relativísticas (feito este alcançado posteriormente com a *Equação de Dirac*), sob a interpretação de Feynman-Stueckelberg, mostrou-se útil, por exemplo,

¹ Frisa-se que além dos pesquisadores que já compõem o nome desta equação, outros como Théophile de Donder e Frans-H. van den Dungen, Johann Kudar e Erwin Schrödinger também a deduziram neste mesmo ano [5].

* Endereço de correspondência: damiao.meira@ifpa.edu.br

para descrever o comportamento das partículas com spin nulo, como os mésons (π^+ , π^- e π^0) e, por consequência, abordar certos campos bosônicos [6]. Menciona-se que além do seu comum emprego no contexto da teoria quântica de campos, a EK-G-F tem hoje interessantes aplicações em óptica não linear, física da matéria condensada e fenômenos de onda dispersiva [7].

Na literatura, a EK-G-F é geralmente modelada usando o sistema de coordenadas (ct, x, y, z) para a localização de eventos no espaço 4-dimensional de Minkowski. Contudo, neste texto, localizamos os eventos por meio do sistema de coordenadas da frente de luz.²

De imediato, uma das principais indagações que emergem quando estudamos mudanças dos sistemas coordenadas é a vantagem de tal abordagem, ou seja, qual o interesse físico e/ou matemático em promover uma mudança de coordenadas e, por consequência, quais as suas implicações. Por exemplo, a simples mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares/esféricas tem seu apelo por facilitar a descrição de sistemas simétricos [8]. Sob esse prisma, o emprego das coordenadas da frente de luz também tem sua utilidade visto que a descrição analítica e a compreensão de fenômenos relativísticos tornam-se menos complexas.

Introduzidas pelo engenheiro eletricista e físico inglês Paul Dirac [9], as coordenadas da frente de luz foram desenvolvidas com o objetivo de construir distintas formas de descrever a dinâmica relativística de um sistema físico. Em foco, a ideia original reside na combinação dos princípios da relatividade restrita com a formulação hamiltoniana de modo que a única exigência é que a teoria satisfaça as propriedades do grupo de Poincaré [10].

Nos últimos anos, além da sua aplicação na Teoria quântica de campos (TQC), estas coordenadas têm sido empregadas, por exemplo, em estudos de cromodinâmica quântica sob regime de baixas energias, assim como para modelar/avaliar espalhamentos a energias muito elevadas. Ademais, fornecem uma estrutura de vácuo trivial quando comparada com a estrutura de vácuo das coordenadas usuais [11, 12].

Especificamente no contexto da EK-G-F, o uso das coordenadas da frente de luz é algebricamente conveniente, conforme apresentado por Bagrov, Buchbinder e Gitman [13, 14], por exemplo, para o desenvolvimento do cálculo dos operadores de criação e aniquilação, permitindo a construção do operador de evolução temporal, a partir do qual viabiliza-se a apresentação de um novo e apropriado operador de aniquilação com o status de integral de movimento.³ Além disso, no que concerne a oportunos estudos sobre a teoria de estados

quânticos semiclássicos, em regime de relatividade especial de Einstein, o supracitado operador de aniquilação com status de integral de movimento configura-se como instrumento algébrico apto para a obtenção dos estados quânticos coerentes⁴ relativos a uma partícula quântica eletricamente carregada sob influência de uma particular configuração de campo eletromagnético.

Isto posto, no presente artigo, apresentamos didaticamente as etapas para a construção da EK-G-F sob o sistema de coordenadas da frente de luz. Para tanto, inicialmente detalhamos o sistema de coordenadas da frente de luz (u_0, u_1, u_2, u_3) em termos das coordenadas cartesianas (x, y, z) e do parâmetro de evolução temporal (ct) . Em seguida, obtemos a EK-G-F para uma partícula livre tanto em coordenadas usuais do espaço de Minkowski quanto em coordenadas da frente de luz, desenvolvendo com este último sistema de coordenadas a EK-G-F para a dinâmica de uma partícula carregada interagindo com campo eletromagnético clássico geral, alcançando uma estrutura algébrica similar a equação de Schrödinger. Por fim, para fins de exemplificação, apresentamos resultados da EK-G-F para duas configurações particulares de campo magnético clássico, além da obtenção dos operadores de criação e aniquilação tão úteis no contexto dos estados coerentes.

2. Espaço-tempo de Minkowski

O espaço-tempo 4-dimensional de Minkowski é um espaço-tempo plano e, portanto, de curvatura nula e é definido por coordenadas contravariantes e covariantes que, por sua vez, relacionam-se com o parâmetro temporal t e com as coordenadas cartesianas em três dimensões (x, y, z) da seguinte forma

$$\begin{cases} x^0 = c \cdot t = x_0 \\ x^1 = x = -x_1 \\ x^2 = y = -x_2 \\ x^3 = z = -x_3 \end{cases}$$

onde a constante c representa a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo.

Considerando as variações infinitesimais dessas coordenadas, temos:

$$\begin{cases} dx^0 = c \cdot dt = dx_0 \\ dx^1 = dx = -dx_1 \\ dx^2 = dy = -dx_2 \\ dx^3 = dz = -dx_3 \end{cases}$$

clássico considerando uma partícula de spin nulo e uma partícula de spin $-\frac{1}{2}$, que são descritas pela EK-G-F e pela equação de Dirac, respectivamente.

⁴ Tecnicamente identificados como auto-estados do operador de aniquilação para o caso de um oscilador harmônico, os estados coerentes têm relevante papel na teoria quântica moderna, fornecendo uma relação natural entre mecânica quântica e as descrições clássicas, com aplicações em TQC, óptica quântica, física da matéria condensada, gravidade quântica em loop, computação quântica, dentre outros [21–23].

² Também conhecidas como coordenadas do cone de luz.

³ Historicamente, Malkin e Man'ko [15–17], Malkin et al. [18, 19] e Dodonov et al. [20] estudaram os estados coerentes para uma partícula quântica em regime não-relativístico. Posteriormente, usando as coordenadas da frente de luz, Bagrov, Buchbinder e Gitman [13, 14] desenvolveram um elegante formalismo dedicado à obtenção dos estados coerentes para partícula quântica, em regime relativístico, sob influência de um campo eletromagnético

De modo geral, sabe-se que as características e peculiaridades de um determinado espaço-tempo podem ser obtidas através de seu elemento de linha que, por sua vez, é invariante sob transformações específicas desse espaço-tempo, a exemplo das transformações de Lorentz [6]. Nesse sentido, para um espaço-tempo 4-dimensional genérico, o seu respectivo elemento de linha pode ser expresso por

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (1)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma matriz simétrica 4×4 denominada de *tensor métrico* [24].

Sabendo que o tensor métrico pode ser aplicado para baixar e elevar índices, conforme as expressões

$$x^\alpha = \sum_{\beta=0}^3 g^{\alpha\beta} x_\beta, \quad x_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta} x^\beta \quad (2)$$

e considerando o espaço-tempo de Minkowski, temos

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (3)$$

para o qual vale a seguinte propriedade:

$$\sum_{\mu=0}^3 \eta_{\alpha\mu} \eta^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \mu \\ 0, & \alpha \neq \mu \end{cases} \quad (4)$$

Isto posto, a equação (1) pode ser reescrita como:

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (5)$$

De fato, ainda é possível escrever os operadores diferenciais no espaço 4-dimensional

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha \quad (6)$$

assim como o operador d'Alembertiano:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (7)$$

Para efeitos de simplificação, podemos utilizar um subespaço bidimensional (z e ct) cujo elemento de linha é dado por

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dz)^2 \quad (8)$$

e o diagrama do cone de luz é ilustrado na Fig. 1, no qual, o elemento de linha (ou a distância no espaço-tempo) é classificado como:

- Distância tipo-tempo $(ds)^2 > 0$: associada à dinâmica espaço-temporal de estruturas massivas, as quais, propagam-se com velocidade $|\vec{v}| < c$. Os eventos separados por uma distância tipo-tempo são ditos *eventos com relação causal*;

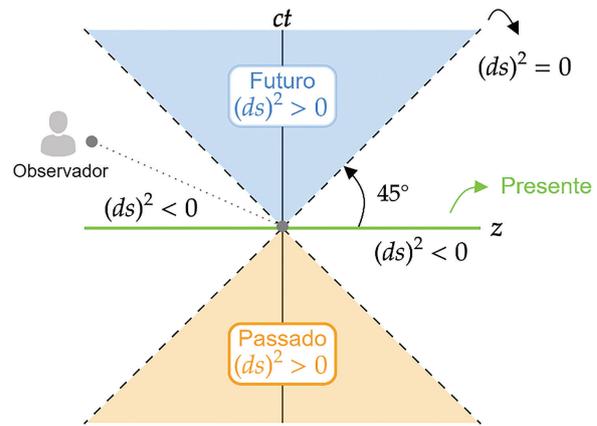


Figura 1: Diagrama do cone de luz.

- Distância tipo-espaço $(ds)^2 < 0$: referente à dinâmica espaço-temporal de estruturas que se propagam com $|\vec{v}| > c$. Eventos separados por essa distância tipo-espaço são denominados de *eventos sem relação causal*;
- Distância tipo-luz $(ds)^2 = 0$: associada à dinâmica de ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo com $|\vec{v}| = c$.

Para alcançarmos uma relação entre as coordenadas do espaço de Minkowski e as coordenadas da frente de luz, consideremos o diagrama da Fig. 2. Relacionando as coordenadas da frente de luz (u^0 e u^3) com as coordenadas (z e $x^0 = ct$), alcançamos:

$$u^0 = +z \cos(45^\circ) + x^0 \sin(45^\circ) = \frac{x^0 + z}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

$$u^3 = -z \cos(45^\circ) + x^0 \sin(45^\circ) = \frac{x^0 - z}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

Nesse sentido, generalizando para quatro dimensões, obtemos as coordenadas no espaço-tempo de Minkowski

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (11)$$

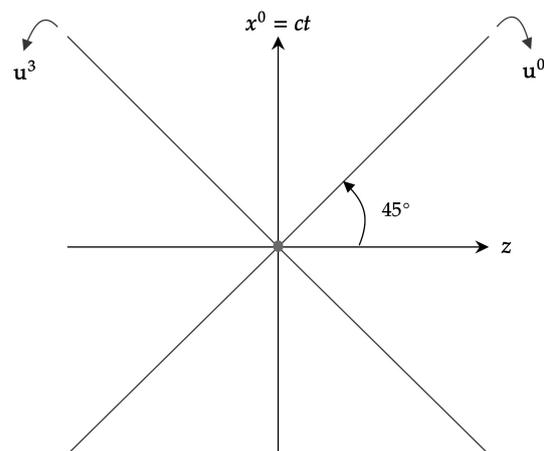


Figura 2: Coordenadas do cone de luz.

e as coordenadas da frente de luz:

$$\begin{aligned} u^\mu &= (u^0, u^1, u^2, u^3) \\ &= \left(\frac{x^0 + z}{\sqrt{2}}, x, y, \frac{x^0 - z}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left(\frac{ct + z}{\sqrt{2}}, x, y, \frac{ct - z}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

3. EK-G-F para uma partícula livre em coordenadas cartesianas

Seja o espaço-tempo descrito na seção anterior, os passos iniciais para a obtenção da EK-G-F para uma partícula livre nas coordenadas (ct, x, y, z) correspondem ao uso da expressão da energia relativística para partícula livre dada por

$$\sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$$

e da seguinte estrutura de operador diferencial parcial quântico para o momento linear 4-dimensional:

$$\begin{cases} \hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \partial^\mu \\ \hat{p}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \partial_\mu \end{cases}$$

Desse modo, a partir da aplicação da versão operacional da energia relativística sobre a função de onda $\Psi(x, y, z, ct)$ obtemos a expressão

$$\sum_{\mu=0}^3 \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (13)$$

a qual consiste em uma equação de onda quântica, sob regime relativístico, para partícula livre de spin zero que é tradicionalmente conhecida como a *equação de Klein-Gordon-Fock*.

Reescrevendo a equação (13) como se segue

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (14)$$

e considerando a métrica dada na relação (3), obtemos

$$\partial_0 \partial_0 \Psi - \partial_1 \partial_1 \Psi - \partial_2 \partial_2 \Psi - \partial_3 \partial_3 \Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0$$

ou, alternativamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} \right) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi &= 0 \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Na literatura, a expressão (15) é conhecida como a *equação de Klein-Gordon-Fock para uma partícula livre em coordenadas cartesianas e de tempo* (ct, x, y, z) .

4. EK-G-F para uma partícula livre em coordenadas da frente de luz

Considerando as coordenadas espaço-temporais curvilíneas generalizadas u^μ em termos das coordenadas cartesianas e de tempo x^μ , a EK-G-F para uma partícula quântica livre e relativística pode ser escrita como

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \left(\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu - i \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{p}_\alpha \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (16)$$

onde o tensor métrico $\tilde{g}^{\mu\nu}$, o símbolo de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ e o termo \tilde{p}_μ são, respectivamente:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} (\partial_\alpha \tilde{g}_{\nu\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{\nu\alpha} - \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta})$$

$$\tilde{p}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^\mu}.$$

Fazendo uso das relações expressas em (12) e sabendo que as componentes não-nulas da métrica $\eta^{\mu\nu}$ são

$$\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1$$

temos

$$\begin{aligned} g^{00} = g^{01} = g^{02} = g^{10} = g^{12} = g^{13} = g^{20} \\ = g^{21} = g^{23} = g^{31} = g^{32} = g^{33} = 0 \end{aligned}$$

e

$$g^{03} = -g^{11} = -g^{22} = g^{30} = 1.$$

Neste caso, conclui-se que os componentes do símbolo de Christoffel são todos nulos ($\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$), o que nos possibilita reescrever a equação (16) como:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (17)$$

Considerando novamente as relações entre as coordenadas cartesianas e de tempo (ct, x, y, z) e as coordenadas da frente de luz (u^0, u^1, u^2, u^3) , verifica-se as seguintes relações entre os operadores diferenciais parciais:

- Para a coordenada x :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u^1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial u^1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right) = \frac{\partial^2}{\partial u^1{}^2}$$

- Para a coordenada y :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial u^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

- Para a coordenada $x^0 = ct$:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial u^0}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial u^3}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^{0^2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right)$$

- Para a coordenada z :

$$\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial u^0}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial}{\partial u^3} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{\partial}{\partial u^3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{0^2}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} \right)$$

Isto posto, podemos substituir essas relações dos operadores diferenciais parciais na equação (17) como se segue

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} \right) \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} +$$

$$- \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{3^2}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u^0 \partial u^3} \right) \Psi = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi$$

obtendo a expressão

$$2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^0 \partial u^3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad (18)$$

ou de forma equivalente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \right) \right] \quad (19)$$

Esta última expressão representa a EK-G-F para partícula livre escrita em termos das coordenadas da frente de luz. Alternativamente, é possível reescrever a EK-G-F de forma algebricamente similar à famosa equação de Schrödinger [13]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} = \hat{H} \Psi \quad (20)$$

em que a função de onda está descrita em termos das coordenadas da frente de luz $\Psi(u^1, u^2, u^3, u^0)$ e o operador do tipo hamiltoniano \hat{H} é dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right)$$

5. EK-G-F para uma partícula carregada sob efeito de campo eletromagnético clássico em coordenadas da frente de luz

Generalizando a equação (16) para o caso de uma partícula quântica eletricamente carregada de spin zero, em regime relativístico e sob influência de um campo eletromagnético clássico, temos

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \left(\tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu - i \sum_{\alpha=0}^3 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{P}_\alpha \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad (21)$$

sendo o termo \tilde{P}_μ dado por:

$$\tilde{P}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^\mu} - \frac{q}{c} \tilde{A}_\mu.$$

Fazendo uso dos resultados apresentados na seção 4, é possível escrever:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu \Psi = m_0^2 c^2 \Psi$$

Portanto, verifica-se que

$$\left(\tilde{g}^{00} \tilde{P}_0 \tilde{P}_3 + \sum_{i=1}^2 \tilde{g}^{ii} \tilde{P}_i \tilde{P}_i + \tilde{g}^{30} \tilde{P}_3 \tilde{P}_0 \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi$$

de modo que:

$$\left(\tilde{P}_0 \tilde{P}_3 + \tilde{P}_3 \tilde{P}_0 \right) \Psi = \left(\sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i \tilde{P}_i + m_0^2 c^2 \right) \Psi. \quad (22)$$

Uma vez que

$$\tilde{P}_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{q}{c} \tilde{A}_0, \quad \tilde{P}_1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{q}{c} \tilde{A}_1,$$

$$\tilde{P}_2 = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{q}{c} \tilde{A}_2, \quad \tilde{P}_3 = i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} - \frac{q}{c} \tilde{A}_3, \quad (23)$$

é conveniente escrever:

$$\tilde{P}_0 \tilde{P}_3 \Psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \right) \cdot \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} - \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \right) \Psi$$

$$= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial u^0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u^3} \right) - i\hbar \frac{q}{c} \left(\frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial u^0} \right) \Psi - i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \frac{\partial \Psi}{\partial u^0}$$

$$- i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial u^3} + \frac{q^2}{c^2} \tilde{A}_0 \tilde{A}_3 \Psi \quad (24)$$

$$\tilde{P}_3 \tilde{P}_0 \Psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} - \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \right) \cdot \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \right) \Psi$$

$$= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u^0} \right) - i\hbar \frac{q}{c} \left(\frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial u^3} \right) \Psi - i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial u^3}$$

$$- i\hbar \frac{q}{c} \tilde{A}_3 \frac{\partial \Psi}{\partial u^0} + \frac{q^2}{c^2} \tilde{A}_3 \tilde{A}_0 \Psi \quad (25)$$

A partir das equações (24) e (25), reescrevemos a equação (22) como:

$$2\tilde{P}_3\tilde{P}_0\Psi = \left[\sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i\tilde{P}_i + m_0^2c^2 - i\hbar\frac{q}{c} \left(\frac{\partial\tilde{A}_0}{\partial u^3} - \frac{\partial\tilde{A}_3}{\partial u^0} \right) \right] \Psi$$

Com base no eletromagnetismo clássico [25], sabemos que

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial\tilde{A}_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial\tilde{A}_\mu}{\partial u^\nu}$$

e

$$\tilde{F}_{03} = \frac{\partial\tilde{A}_3}{\partial u^0} - \frac{\partial\tilde{A}_0}{\partial u^3} = - \left(\frac{\partial\tilde{A}_0}{\partial u^3} - \frac{\partial\tilde{A}_3}{\partial u^0} \right)$$

o que nos permite obter:

$$2\tilde{P}_3\tilde{P}_0\Psi = \left(\sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i\tilde{P}_i + m_0^2c^2 + i\hbar\frac{q}{c}\tilde{F}_{03} \right) \Psi \quad (26)$$

De fato, podemos ainda escrever a equação (26) no seguinte formato

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u^0} = \tilde{H}\Psi \quad (27)$$

no qual, o operador do tipo hamiltoniano \tilde{H} corresponde a

$$\tilde{H} = - \left[\frac{iq}{\hbar c}\tilde{A}_0 + \frac{i}{2\hbar}(\tilde{P}_3)^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i\tilde{P}_i + m_0^2c^2 + i\hbar\frac{q}{c}\tilde{F}_{03} \right) \right]$$

A equação (27) apresenta-se como uma EK-G-F sob a configuração de uma equação diferencial parcial de primeira ordem na coordenada u^0 em similaridade com a equação de Schrödinger.

5.1. Campo magnético clássico constante e uniforme

Assumindo a configuração que representa o campo magnético clássico constante e uniforme, o qual está disposto geometricamente na direção do eixo z , é possível escrever as componentes do tensor potencial eletromagnético \tilde{A}_μ como:

$$\tilde{A}_0 = 0, \quad \tilde{A}_1 = -\frac{yB}{2} = -\frac{u^2B}{2},$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{xB}{2} = \frac{u^1B}{2}, \quad \tilde{A}_3 = 0$$

Neste caso, as expressões (24) e (25) são reescritas como:

$$\tilde{P}_0\tilde{P}_3\Psi = -\hbar^2\frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial u^0} \right) \quad (28)$$

$$\tilde{P}_0\tilde{P}_3\Psi = -\hbar^2\frac{\partial}{\partial u^0} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial u^3} \right) \quad (29)$$

Por sua vez, a partir das equações (28) e (29), reescrevemos a equação (22) como:

$$2\tilde{P}_3\tilde{P}_0\Psi = \left(\sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i\tilde{P}_i + m_0^2c^2 \right) \Psi$$

Conforme destacado anteriormente, é possível reescrever esse último resultado no formato da equação (27). Neste caso, o operador do tipo hamiltoniano \tilde{H} corresponde a:

$$\tilde{H} = -\frac{i}{2\hbar}(\tilde{P}_3)^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 \tilde{P}_i\tilde{P}_i + m_0^2c^2 \right)$$

Escrevendo em detalhes, temos

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & -\frac{i}{2\hbar}\mathcal{U} \left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{q}{c}\frac{u^2B}{2} \right) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{q}{c}\frac{u^2B}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{q}{c}\frac{u^1B}{2} \right) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{q}{c}\frac{u^1B}{2} \right) + m_0^2c^2 \right] \end{aligned} \quad (30)$$

onde $\mathcal{U} = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1}$ e:

$$\tilde{P}_1\tilde{P}_1 = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{q}{c}\frac{u^2B}{2} \right) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{q}{c}\frac{u^2B}{2} \right) \quad (31)$$

$$\tilde{P}_2\tilde{P}_2 = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{q}{c}\frac{u^1B}{2} \right) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{q}{c}\frac{u^1B}{2} \right) \quad (32)$$

5.2. Campo magnético clássico constante e não-uniforme

Seja a configuração de campo magnético clássico constante e não-uniforme, disposto geometricamente na direção z com $B_z = B + x^1$, podemos reescrever as componentes do tensor potencial eletromagnético \tilde{A}_μ como⁵:

$$\tilde{A}_0 = 0, \quad \tilde{A}_1 = u^2B, \quad \tilde{A}_2 = -\frac{(u^1)^2B}{2}, \quad \tilde{A}_3 = 0$$

De posse desses resultados e seguindo os mesmos passos da subseção anterior, obtemos novamente uma expressão no mesmo formato da equação de Schrödinger (equação 27) na qual o operador hamiltoniano apresenta-se como

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & -\frac{i}{2\hbar}\mathcal{U} \left\{ \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{q}{c}u^2B \right) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{q}{c}u^2B \right) \right. \\ & \left. + \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{q}{c}\frac{(u^1)^2B}{2} \right] \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{q}{c}\frac{(u^1)^2B}{2} \right] \right. \\ & \left. + m_0^2c^2 \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

⁵ Exemplo extraído de [26].

onde $U = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1}$ e:

$$\tilde{P}_1 \tilde{P}_1 = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{q}{c} u^2 B \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{q}{c} u^2 B \right) \quad (34)$$

$$\tilde{P}_2 \tilde{P}_2 = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{q}{c} \frac{(u^1)^2 B}{2} \right] \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{q}{c} \frac{(u^1)^2 B}{2} \right] \quad (35)$$

6. Uso das coordenadas da frente de luz no estudo preliminar dos estados coerentes

Uma das mais importantes aplicações das coordenadas da frente de luz está relacionada ao seu uso no estudo dos estados coerentes tão úteis em TQC e óptica quântica, por exemplo.⁶ Para evidenciar como essas coordenadas podem auxiliar nesses estudos, nesta seção apresentamos minuciosamente os passos necessários para a obtenção dos operadores de criação e aniquilação fazendo uso destas.⁷

6.1. Obtenção dos operadores de criação e aniquilação

Seja uma partícula quântica de spin-zero eletricamente carregada, não submetida à ação de campo eletromagnético clássico, cuja dinâmica é descrita pela equação (19), podemos definir os operadores de criação (a) e aniquilação (a^+) associados as coordenadas u^1 e u^2 como:

$$\hat{a}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right), \hat{a}_1^+ = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \quad (36)$$

$$\hat{a}_2 = \left(-\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right), \hat{a}_2^+ = \left(-\frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \quad (37)$$

Convenientemente podemos calcular a expressão $\hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \Psi$

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \Psi &= \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \Psi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u^1} - i \frac{\partial \Psi}{\partial u^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{12}} - i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^1 \partial u^2} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2 \partial u^1} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{22}} \end{aligned} \quad (38)$$

e analogamente a expressão $\hat{a}_2 \hat{a}_2^+ \Psi$:

$$\hat{a}_2 \hat{a}_2^+ \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{12}} - i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2 \partial u^1} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{22}} \quad (39)$$

Observando que $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2 \partial u^1}$, reescrevemos as equações (38) e (39), nesta ordem, como

$$\hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{12}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{22}}, \quad \hat{a}_2 \hat{a}_2^+ \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{12}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^{22}}$$

além do operador hamiltoniano, expresso na equação (20), como se segue:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left(\frac{\hat{a}_1 \hat{a}_1^+}{2} + \frac{\hat{a}_2 \hat{a}_2^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \quad (40)$$

Definindo o operador $\hat{K}_3 = \frac{\partial}{\partial u^3}$, é apropriado obter o comutador entre este e o operador \hat{H} , com a aplicação deste comutador sobre a função de onda $\Psi = \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0)$, i.e:

$$\left[\hat{H}, \hat{K}_3 \right]_- \Psi = \hat{H} \hat{K}_3 \Psi - \hat{K}_3 \hat{H} \Psi \quad (41)$$

Desenvolvendo algebricamente o comutador, obtemos:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}, \hat{K}_3 \right]_- \Psi &= \frac{1}{2} \left(\hat{K}_3 \right)^{-1} \left(\frac{\hat{a}_1 \hat{a}_1^+}{2} + \frac{\hat{a}_2 \hat{a}_2^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \hat{K}_3 \Psi + \\ &\quad - \hat{K}_3 \frac{1}{2} \left(\hat{K}_3 \right)^{-1} \left(\frac{\hat{a}_1 \hat{a}_1^+}{2} + \frac{\hat{a}_2 \hat{a}_2^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi \end{aligned} \quad (42)$$

Em seguida, sabendo que

$$\hat{K}_3 \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0) = \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ \hat{K}_3 \Psi(u^1, u^2, u^3, u^0)$$

e substituindo essa última relação na equação (42), alcançamos:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}, \hat{K}_3 \right]_- \Psi &= \frac{1}{2} \left(\hat{K}_3 \right)^{-1} \left(\frac{\hat{a}_1 \hat{a}_1^+}{2} + \frac{\hat{a}_2 \hat{a}_2^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \hat{K}_3 \Psi \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\hat{K}_3 \right)^{-1} \left(\frac{\hat{a}_1 \hat{a}_1^+}{2} + \frac{\hat{a}_2 \hat{a}_2^+}{2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \hat{K}_3 \Psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Com base no formalismo de Heisenberg, estados quânticos que descrevem a evolução temporal de estados quânticos puros pertencem ao espaço de Hilbert. Ademais, os observáveis físicos associados aos operadores \hat{A} independentes do tempo no âmbito do formalismo de Schrödinger são substituídos por operadores $\hat{A}(t)$, que por sua vez, evoluem por meio de uma transformação unitária no seguinte formato:

$$\hat{A}(t) = \exp \left(\frac{i \hat{H} t}{\hbar} \right) \hat{A} \exp \left(\frac{-i \hat{H} t}{\hbar} \right) \quad (44)$$

Uma vez que o operador $\hat{A}(t)$ neste formalismo satisfaz a seguinte equação de movimento

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \left[\hat{A}, \hat{H} \right]_- \quad (45)$$

⁶ Tópicos sobre os estados coerentes são explorados em [22, 23].

⁷ A obtenção dos estados coerentes foge do escopo deste trabalho.

verificamos que

$$-i\hbar \frac{d\hat{K}_3}{dt} = [\hat{H}, \hat{K}_3]_- = 0 \quad (46)$$

e, portanto, podemos afirmar que o operador $\hat{K}_3 = \frac{\partial}{\partial u^3}$ é um operador do tipo *integral de movimento* para a equação (19), i.e:

$$i \frac{\partial}{\partial u^3} \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3) = K_3 \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3) \quad (47)$$

Considerando que K_3 é uma constante de movimento e, portanto, não depende explicitamente do tempo, reescrevemos a função de onda sob a forma

$$\Psi(u^0, u^1, u^2, u^3) = \exp(-iK_3 u^3) \Psi(u^0, u^1, u^2) \quad (48)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{K}_3 \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3) &= \frac{\partial}{\partial u^3} \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3) \\ &= -iK_3 \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3) \end{aligned}$$

assegurando que $\Psi(u^0, u^1, u^2, u^3)$ é autofunção do operador \hat{K}_3 com correspondente autovalor K_3 .

Considerando a EK-G-F expressa no formato de uma equação de Schrödinger tal como apresentada na equação (20)

$$\frac{\partial \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3)}{\partial u^0} = \hat{H} \Psi(u^0, u^1, u^2, u^3)$$

realizando a substituição da função de onda expressa por (48) na equação imediatamente anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^0} \{ \exp[-iK_3 u^3] \Psi(u^0, u^1, u^2) \} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right)^{-1} \left(\hat{\Xi} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \\ \exp(-iK_3 u^3) \Psi(u^0, u^1, u^2) \end{aligned}$$

e desenvolvendo algebricamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^3} [\exp(-iK_3 u^3)] \frac{\partial \Psi(u^0, u^1, u^2)}{\partial u^0} \\ = \left(\Xi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \exp(-iK_3 u^3) \Psi(u^0, u^1, u^2) \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{\partial \Psi(u^0, u^1, u^2)}{\partial u^0} = -\frac{1}{2iK_3} \left(\hat{\Xi} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(u^0, u^1, u^2) \quad (49)$$

sendo $\hat{\Xi} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial u^j{}^2}$.

Redefinindo $\Psi(u^0, u^1, u^2)$ e \hat{H} respectivamente como

$$\begin{aligned} \Psi(u^0, u^1, u^2) &= \hat{U}(u^0) \Psi(u^1, u^2) \\ \hat{H} &= -\frac{1}{2iK_3} \left(\Xi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

reescrivemos a eq. (49) como segue:

$$\begin{aligned} \Psi(u^1, u^2) \frac{d\hat{U}(u^0)}{du^0} &= \hat{U}(u^0) \left[-\frac{1}{2iK_3} \left(\hat{\Xi} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ &\times \Psi(u^1, u^2) \\ &= \hat{U}(u^0) \hat{H} \Psi(u^1, u^2) \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da última expressão

$$\begin{aligned} \int [\hat{U}(u^0)]^{-1} d\hat{U}(u^0) &= \int \hat{H} du^0 \\ \ln [\hat{U}(u^0)] &= \int \hat{H} du^0 \end{aligned} \quad (51)$$

alcançamos

$$\hat{U}(u^0) = \exp \left(\int \hat{H} du^0 \right) \quad (52)$$

o qual é denominado como *operador de evolução temporal*.

Uma vez alcançado esse resultado, manifesta-se conveniente construir o operador aniquilação que se comporta como *integral de movimento*. Para tal propósito, consideremos:

$$\hat{A}_1(u^0) = \hat{U}(u^0) \hat{a}_1 \hat{U}(u^0)^{-1} \quad (53)$$

$$\hat{A}_2(u^0) = \hat{U}(u^0) \hat{a}_2 \hat{U}(u^0)^{-1} \quad (54)$$

$$\hat{A}_1(u^0) \Psi(u^1, u^2) = \hat{U}(u^0) \hat{a}_1 \hat{U}(u^0)^{-1} \Psi(u^1, u^2) \quad (55)$$

Substituindo apropriadamente o resultado da equação (52) na expressão (55), e procedendo algebricamente, alcança-se a equação (56).

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(u^0) \Psi(u^1, u^2) &= \exp \left(\int \hat{H} du^0 \right) \hat{a}_1 \exp \left(\int -\hat{H} du^0 \right) \Psi(u^1, u^2) \\ &= \exp \left[\int \left(-\frac{i}{2K_3} + \frac{i}{2K_3} \right) \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} du^0 \right] \exp \left(\int \frac{i}{2K_3} \hat{\Xi} du^0 \right) \hat{a}_1 \exp \left(\int -\frac{i}{2K_3} \hat{\Xi} du^0 \right) \Psi(u^1, u^2) \\ &= \exp \left(\int \frac{i}{2K_3} \hat{\Xi} du^0 \right) \hat{a}_1 \exp \left(\int -\frac{i}{2K_3} \hat{\Xi} du^0 \right) \Psi(u^1, u^2) \end{aligned} \quad (56)$$

Utilizando as séries de McLaurin para as funções exponenciais

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

adotando convenientemente

$$\hat{w} = \int \frac{i}{2K_3} \hat{\Xi} du^0$$

e realizando adequados trâmites algébricos, alcançamos:

$$e^{\hat{w}\hat{a}_1}e^{-\hat{w}} = \left(1 + \hat{w} + \frac{\hat{w}^2}{2} + \dots\right) \hat{a}_1 \left(1 - \hat{w} + \frac{\hat{w}^2}{2} + \dots\right)$$

$$= \hat{a}_1 + \hat{w}\hat{a}_1 + \frac{\hat{w}}{2}\hat{a}_1 - \hat{w}\hat{a}_1 - \hat{w}\hat{a}_1\hat{w} - \frac{\hat{w}\hat{a}_1\hat{w}}{2} +$$

$$+ \hat{w}^2\frac{\hat{a}_1}{2} + \frac{\hat{w}\hat{a}_1\hat{w}^2}{2} + \frac{\hat{w}^2\hat{a}_1\hat{w}^2}{4} + \dots$$

$$= \hat{a}_1 + [\hat{w}, \hat{a}_1]_- + \frac{1}{2}(\hat{w}^2\hat{a}_1 - 2\hat{w}\hat{a}_1\hat{w} + \hat{w}^2\hat{a}_1)$$

$$+ \dots$$

Reescrevendo o termo entre parênteses como se segue

$$\hat{w}^2\hat{a}_1 - 2\hat{w}\hat{a}_1\hat{w} + \hat{w}^2\hat{a}_1 = \hat{w}(\hat{w}\hat{a}_1 - \hat{a}_1\hat{w}) +$$

$$- (\hat{w}\hat{a}_1 - \hat{a}_1\hat{w})\hat{w}$$

$$= \hat{w}[\hat{w}, \hat{a}_1]_- - [\hat{w}, \hat{a}_1]_- \hat{w}$$

$$= [\hat{w}, [\hat{w}, \hat{a}_1]_-]_- \quad (57)$$

obtemos:

$$e^{\hat{w}\hat{a}_1}e^{-\hat{w}} = \hat{a}_1 + [\hat{w}, \hat{a}_1]_- + \frac{1}{2}[\hat{w}, [\hat{w}, \hat{a}_1]_-]_- + \dots \quad (58)$$

Analisando minuciosamente cada termo, temos:

$$[\hat{w}, \hat{a}_1]_- \Psi(u^1, u^2) = (\hat{w}\hat{a}_1 - \hat{a}_1\hat{w}) \Psi(u^1, u^2)$$

$$= \hat{w}\hat{a}_1 \Psi(u^1, u^2) - \hat{a}_1\hat{w} \Psi(u^1, u^2) \quad (59)$$

Especificamente para o termo $\hat{w}\hat{a}_1 \Psi(u^1, u^2)$ encontra-se a relação dada na equação (60).

$$\hat{w}\hat{a}_1 \Psi(u^1, u^2) = \left(\int \frac{i}{2K_3} \hat{\Xi} du^0\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i\frac{\partial}{\partial u^2}\right) \Psi(u^1, u^2)$$

$$= \left[\int \frac{i}{2K_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}}\right) du^0\right] \left[\frac{\partial \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^1} + i\frac{\partial \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^2}\right]$$

$$= \int \frac{i}{2K_3} \left[\frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{1^3}} + i\frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{1^2}u^2} + \frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{2^2}u^1} + i\frac{\partial^3 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{2^3}}\right] du^0$$

$$= \int \frac{i}{2K_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i\frac{\partial}{\partial u^2}\right) \left[\frac{\partial^2 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{1^2}} + \frac{\partial^2 \Psi(u^1, u^2)}{\partial u^{2^2}}\right] du^0$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i\frac{\partial}{\partial u^2}\right) \int \frac{i}{2K_3} \Xi \Psi(u^1, u^2) du^0 = \hat{a}_1 \hat{w} \Psi(u^1, u^2) du^0 \quad (60)$$

Com base no resultado da equação (60), podemos escrever a equação (59) como

$$[\hat{w}, \hat{a}_1]_- \Psi(u^1, u^2) = 0 \quad (61)$$

e por consequência:

$$e^{\hat{w}\hat{a}_1}e^{-\hat{w}} \Psi(u^1, u^2) = \hat{a}_1 \Psi(u^1, u^2) \quad (62)$$

De posse desses resultados, observamos

$$\hat{A}_1(u^0) \Psi(u^1, u^2) = \hat{U}(u^0) \hat{a}_1 \hat{U}(u^0)^{-1} \Psi(u^1, u^2)$$

$$= \hat{a}_1 \Psi(u^1, u^2) \quad (63)$$

do qual, concluímos que:

$$\hat{A}_1 = \hat{a}_1, \quad \hat{A}_1^+ = \hat{a}_1^+$$

Utilizando procedimentos análogos aos descritos para obtenção das relações operatoriais imediatamente anteriores, verificamos que

$$\hat{A}_2 = \hat{a}_2, \quad \hat{A}_2^+ = \hat{a}_2^+$$

onde \hat{A}_1^+ e \hat{A}_2^+ são os operadores adjuntos dos operadores \hat{A}_1 e \hat{A}_2 , nesta ordem.

Das equações (36) e (37), identificamos:

$$\hat{a}_1 = -\hat{a}_2^+, \quad \hat{a}_2 = -\hat{a}_1^+$$

Por fim, calculemos as relações análogas às expressões (53) e (54), para os operadores \hat{A}_1^+ e \hat{A}_2^+ ,

respectivamente

$$\begin{aligned}\hat{A}_1^+ &= [\hat{U}\hat{a}_1\hat{U}^{-1}]^+ = [\hat{a}_1\hat{U}^{-1}]^+ \hat{U}^+ \\ &= [\hat{U}^{-1}]^+ \hat{a}_1^+ \hat{U}^+\end{aligned}$$

e

$$\hat{A}_2^+ = [\hat{U}\hat{a}_2\hat{U}^{-1}]^+ = [\hat{U}^{-1}]^+ \hat{a}_2^+ \hat{U}^+$$

Sabendo que o operador de evolução temporal \hat{U} , conforme as expressões (50) e (52), é dado por

$$\hat{U} = \exp \left[\int \frac{(-i)}{2\hat{K}_3} \left(\Xi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) du^0 \right]$$

podemos escrever o operador inverso bem como o operador adjunto do operador \hat{U} , respectivamente, como

$$\begin{aligned}\hat{U}^{-1} &= \exp \left[\int \frac{i}{2\hat{K}_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{12}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{22}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) du^0 \right] \\ \hat{U}^+ &= \exp \left[\int \frac{i}{2\hat{K}_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^{12}} + \frac{\partial^2}{\partial u^{22}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) du^0 \right],\end{aligned}$$

de modo que

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+, \quad [\hat{U}^{-1}]^+ = \hat{U}$$

e os operadores de aniquilação do tipo integral de movimento são expressos como:

$$\hat{A}_1^+ = \hat{U}\hat{a}_1^+\hat{U}^{-1}, \quad \hat{A}_2^+ = \hat{U}\hat{a}_2^+\hat{U}^{-1}$$

Considerações finais

O sistema de coordenadas da frente de luz tem seu apelo por facilitar o algebrismo e a compreensão da dinâmica relativística de sistemas físicos inclusive com importantes aplicações em TQC. Neste sentido, com base em [13], foi apresentada uma revisão didática de aspectos relacionados a este sistema de coordenadas e seu emprego na modelagem da EK-G-F (destacando que a referida equação é uma equação diferencial parcial de segunda ordem no tempo ct e nas coordenadas x , y e z) apresentando-a como uma equação de primeira ordem na variável u^0 e de segunda ordem nas variáveis u^1 e u^2 bem como tornando-a similar e análoga à equação de Schrödinger, permitindo obter o operador de evolução temporal e o operador de aniquilação do tipo integral de movimento.

De fato, ainda que algebrismo e a discussão empregada tenha almejado, essencialmente, a formulação da EK-G-F, em coordenadas da frente de luz, para uma partícula quântica carregada submetida a diferentes configurações de campo magnético clássico, o desenvolvimento apresentado pode ser proficuamente utilizado,

por exemplo, para estender estudos relativos aos estados quânticos coerentes ou estados quasi-clássicos com relevantes conexões com áreas teóricas, experimentais e aplicadas da física contemporânea.

Referências

- [1] O. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926).
- [2] W. Gordon, *Z. Phys.* **40**, 117 (1926).
- [3] V. Fock, *Z. Phys.* **39**, 226 (1926).
- [4] V. Fock, *Z. Phys. A-Hadron Nucl.* **38**, 242 (1926).
- [5] T. Ohlsson, *Relativistic Quantum Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [6] D.P. Meira Filho e J.K.S. Kamassury, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **40**, e3316 (2018).
- [7] P. Veerasha, D.G. Prakasha e D. Kumar, *Appl Math Comp.* **364**, 124637 (2020).
- [8] J.H. Sales, A.T. Suzuki e L.A. Soriano, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **37**, 3309 (2015).
- [9] P.A.M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [10] C.R. Silva, *Efeitos de Temperatura em Teoria Quântica de Campos na Frente de Luz*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém (2013).
- [11] G.F. de Teramond e S.J. Brodsky, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 081601 (2009).
- [12] S.J. Brodsky, B. Pasquini, B. Xiao e F. Yuan, *Phys. Letters B* **687**, 327 (2010).
- [13] V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder e D.M. Gitman, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 11 (1976).
- [14] V.G. Bagrov e D.M. Gitman, *Exact Solutions to Relativistic Wave Equations* (Springer, Dordrecht, 1990).
- [15] I.A. Malkin e V.I. Man'ko, *Sov. Phys. JETP* **28**, 3 (1969).
- [16] I.A. Malkin e V.I. Man'ko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59**, 1746 (1970).
- [17] I.A. Malkin e V.I. Man'ko, *Teor. & Mat. Fiz.* **6**, 71 (1971).
- [18] I.A. Malkin, V.I. Man'ko e D.A. Trifonov, *Phys. Rev. D* **2**, 1371 (1970).
- [19] I.A. Malkin, V.I. Man'ko e D.A. Trifonov, *J. Math. Phys.* **14**, 576 (1973).
- [20] V.V. Dodonov, I.A. Malkin e V.I. Man'ko, *Teor. & Mat. Fiz.* **24**, 164 (1973).
- [21] V.G. Bagrov, D.M. Gitman e A.S. Pereira, *Braz. J. Phys.* **45**, 369 (2015).
- [22] J.R. Klauder e B.S. Skagerstam, *Coherent states, application in physics and mathematical physics* (World Scientific, Singapore, 1985).
- [23] J.P. Gazeau, *Coherent states in quantum physics* (Wiley-VCH, Weinheim, 2009).
- [24] R.D. Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1992).
- [25] J.M.F. Bassalo, *Eletrodinâmica Clássica*, (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007), 1ª ed.
- [26] J.A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics* (Springer-Verlag, New York, 2004), 3ª ed.