

Índices de refração não convencionais – uma breve introdução à simetria PT

Non-conventional refractive index – an introduction to PT symmetry

Cícero Julião^{*1}, S.S. de Albuquerque²

¹Instituto Federal de Alagoas, Murici, AL, Brasil.

²Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca, AL, Brasil.

Recebido em 18 de março de 2021. Revisado em 21 de setembro de 2021. Aceito em 12 de outubro de 2021.

A utilização dos números complexos facilita a modelagem matemática de fenômenos em algumas áreas da física. Em óptica, índices de refração podem ser modulados para revelar comportamentos não convencionais, como invisibilidade unidirecional e refração assimétrica. Em mecânica quântica, hamiltonianos com potenciais complexos apresentando a condição de simetria sob inversão espacial e temporal podem ter todo o espectro de energia real. Essa condição de simetria é conhecida como simetria PT (simetria paridade-reversão temporal). Simetria PT pode ser empregada em óptica para o desenvolvimento de materiais com índices de refração complexos e novos fenômenos ópticos.

Palavras-chave: Campos elétrico e magnético, constante dielétrica, números complexos, simetria PT.

The use of complex numbers facilitates the mathematical modeling of phenomena in some areas of physics. In optics, one can modulate refractive indices to reveal anomalous behaviors, such as unidirectional invisibility and asymmetric refraction. In quantum mechanics, Hamiltonians with complex potentials presenting symmetry conditions under spatial and temporal inversion can have an entire real energy spectrum. This condition of symmetry is known as PT-symmetry (parity-time reversion). PT symmetry can be used in optics to develop materials with complex refractive indices and new optical phenomena.

Keywords: Electric and magnetic fields, dielectric constant, complex numbers, PT symmetry.

1. Introdução

Fenômenos ópticos são abordados desde a educação básica. Óptica geométrica e fenômenos ondulatórios fazem parte do currículo para estudantes do ensino médio no Brasil. Nesse contexto, a grandeza índice de refração aparece repetidamente. Por exemplo, é possível estudar o fenômeno da reflexão interna total por meio da chamada Lei de Snell. Ao explorar a natureza, a utilização de ferramentas matemáticas pode facilitar a sua compreensão.

De fato, a física utiliza as ferramentas matemáticas de forma extensiva [1, 2]. Mas há de se notar que a matemática, de um modo geral, não necessita de fenômenos naturais para existir. Algumas ferramentas matemáticas sofisticadas se desenvolvem de forma independente à necessidade de pensar e analisar um fenômeno ou efeito natural. Contudo, pode acontecer que, após a descoberta de uma ferramenta ou análise matemática ter sido feita, sua utilização para explicar fenômenos observados descritos pelas ditas ciências naturais, como Física, Biologia etc, seja um caminho a considerar.

Por exemplo, a ideia de um número ser negativo foi, durante milênios, estranha à maioria dos matemáti-

cos [3]. Daí a alcançar o termo *imaginário* para raízes de números negativos, foi um salto bem maior. Só em 1637 esse termo aparece em escritos de René Descartes [4]. E foi apenas em 1777 que encontramos o termo *i* para $\sqrt{-1}$ com o grande matemático Euler [5].

O ENEM, atualmente, não mais aborda números complexos. Assim, em geral o estudante do ensino médio não os encontra em sua formação. Mesmo em cursos de licenciatura ou bacharelado em Matemática, é possível cursos introdutórios de Cálculo Infinitesimal não terem citação aos números complexos. Desta forma, é possível a construção de um engano: pensar que variáveis complexas são estranhas, não sendo encontradas facilmente [6–8].

No entanto, encontramos os números complexos repetidamente em áreas básicas da ciência. Por exemplo, diversos fenômenos tem seu comportamento descrito por funções quadráticas (como queda de corpos e lançamentos de projéteis próximos à superfície da Terra e na ausência de matéria). Qual o caminho para encontrar as soluções de funções quadráticas ($y = ax^2 + bx + c$)? Utilizamos a fórmula de *Bhaskara* [9]: $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$, na qual $\Delta = b^2 - 4ac$. Qualquer combinação desses coeficientes levando Δ a um valor negativo nos entrega um problema sem solução no conjunto dos números reais.

* Endereço de correspondência: juliaojunior@gmail.com

Esse tipo de abordagem pode ser muito útil. Vejamos um exemplo utilizando cinemática, explorada no primeiro ano do ensino médio no Brasil. Considere dois veículos com movimento retilíneo, ambos no mesmo sentido. O móvel à frente está com velocidade constante v_1 , enquanto o segundo móvel está com velocidade constante v_2 , sendo $v_2 > v_1$. O segundo móvel avista o primeiro e, para evitar uma colisão, inicia um processo de frenagem no instante que a distância entre eles é D . As funções horárias de posição de ambos podem ser escritas como $x_1(t) = D + v_1 t$ e $x_2(t) = v_2 t - \frac{1}{2} a t^2$, com $a > 0$. No ponto de encontro, devemos ter $x_1(t) = x_2(t)$, resultando em uma equação quadrática em t dada por $\frac{a}{2} t^2 + (v_1 - v_2) t + D = 0$, cujo discriminante é dado por $\Delta = (v_1 - v_2)^2 - 2aD$. Para que não ocorra, não podemos ter raízes reais e isso ocorre quando o discriminante for negativo $\Delta < 0$. Neste caso, a desaceleração do móvel obedece a condição $a > \frac{(v_2 - v_1)^2}{2D}$. A solução para o problema seria complexa, indicando que o encontro não ocorre visto que é um evento real.

Porém, se nos permitirmos incluir os números complexos na análise dos fenômenos naturais, não apenas soluções novas podem aparecer. Comportamentos totalmente novos e detalhes aparentemente inexplicáveis podem se tornar claros. Note a equação abaixo.

$$x^6 + 1 = 0. \quad (1)$$

Essa equação não possui soluções no conjunto dos reais. Se estendermos para o conjunto dos números complexos, haverá seis soluções: $x = \pm e^{(i\pi/2)}$, $x = \pm e^{(i\pi/6)}$ e $x = \pm e^{(i5\pi/6)}$. Abaixo vemos as raízes no plano complexo (Figura 1).

Outra característica quando expandimos nosso estudo para os números complexos: operações que *parecem* ser verdadeiras em todos os casos, mas na verdade *talvez* não sejam verdadeiras. Para ilustrar, vamos lembrar das

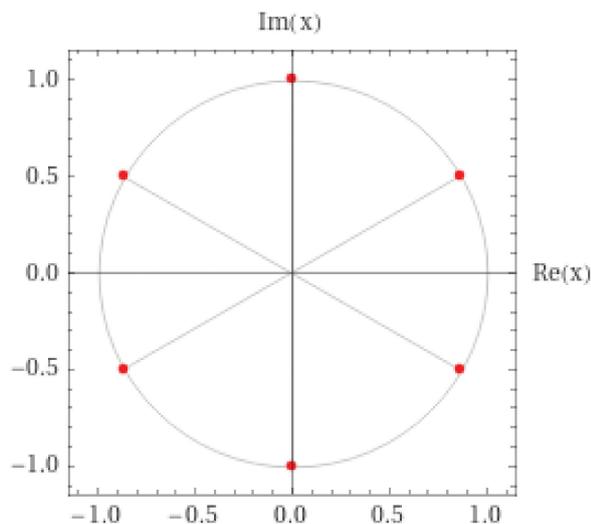


Figura 1: Raízes de $x^6 + 1 = 0$ no plano complexo.

seguintes relações de álgebra fundamental.

$$e^{\ln z} = z, \quad (2a)$$

$$\ln e^z = z. \quad (2b)$$

Nas equações acima, se z for real temos o caso da álgebra estudada no nível básico. As relações estão corretas. Porém, se z for complexo, a equação 2a permanece correta enquanto 2b pode não ser. Se tomarmos a identidade de Euler $e^{i\pi} = -1$ e elevarmos ambos os lados ao quadrado, chegamos a $e^{2i\pi} = 1$. Tomando o logaritmo de ambos os lados, ficamos com uma expressão do tipo 2b:

$$\ln e^{2i\pi} = \ln 1. \quad (3)$$

Ou seja, estamos afirmando (já antes de tomar o logaritmo) que $2i\pi = 0$. No caso dos reais, cairíamos em uma inconsistência. Porém, por estarmos lidando com o conjunto dos complexos, é necessário mais cuidado. Como foi dito antes, *parecer* verdadeiro não *garante* ser. Assim, reorganizando os fatores em $2i\pi$ e lembrando as relações trigonométricas no conjunto dos complexos, podemos afirmar que não apenas $e^{2\pi i}$ é igual a 1. Um número infinito de valores da forma $e^{2\pi i m}$ é igual a 1, com m sendo qualquer número inteiro positivo ou negativo, inclusive 0 ou 1. Portanto, usando a equação 3 temos

$$\ln e^{i2\pi m} = \ln 1 = i2\pi m. \quad (4)$$

O que acabamos de mostrar é que afirmar $\ln(1) = 0$ não é de todo correto. Na verdade, $\ln(1)$ é um número complexo *imaginário puro*. Ou seja, $\ln(1)$ tem sua *parte real* igual a zero.

2. Além dos índices de refração convencionais

Estudar um sistema qualquer utilizando ferramentas matemáticas que não lancem mão dos números complexos pode ser restritivo. Por exemplo, representar fenômenos ondulatórios com números complexos torna mais simples sua descrição e análise [10].

Além disso, é comum o interesse em parte de um sistema, e não em sua totalidade. Nesses casos, formular matematicamente um subespaço do sistema original pode ser feito com números complexos. Desde que o sistema original continue com suas energias representadas por variáveis reais [11]. Essa abordagem é utilizada já há décadas. Ainda em 1928, George Gamow estudou o transporte de partículas do núcleo atômico para o seu entorno utilizando energias descritas por números complexos [12]. Alguns anos depois, H. Feshbach modelou interações entre nêutrons e núcleos atômicos utilizando energias complexas [13].

Em óptica, a busca por novos materiais também levou a caminhos antes não explorados e algumas vezes



Figura 2: Uma possibilidade de classificação de materiais fotônicos pode ser baseada no sinal do seu índice de refração.

inesperados. A manipulação de uma única característica fundamental, o índice de refração, trouxe à tona diversos tipos de materiais. Um caso de compreensão bem simples são os cristais fotônicos. Um cristal fotônico é constituído de tal forma que há uma periodicidade no índice de refração, ao longo de uma dada direção. A periodicidade pode ser em uma, duas ou até mesmo em três dimensões [14, 15].

Outro caminho levou à pesquisa da interação entre luz e metal – chegamos à plasmônica. Aqui temos o aparecimento do índice de refração negativo [16]. As consequências de ter um material com índice de refração negativo incluem a manipulação do alcance e da qualidade do sinal, regiões de invisibilidade, luz lenta (onde a velocidade da luz é drasticamente reduzida) [17–19].

Vamos notar algo central no que foi exposto até aqui. Algumas características de um material podem ser manipuladas de forma a controlar o índice de refração – densidade, impurezas, pressão [20]. Ou seja, um material pode ser manipulado de tal forma que seu índice de refração seja positivo ou negativo. Mesmo em materiais ditos convencionais é possível manipular a distribuição espacial do índice de refração no material a ponto de obtermos efeitos úteis, como no caso dos cristais fotônicos. Como mostra a Figura 2, podemos pensar nas características ópticas de materiais em relação ao sinal do índice de refração, se positivo ou negativo.

Porém, chegamos a um ponto similar ao já discutido sobre as soluções de equações quadráticas: deve o índice de refração ser real? Ou pode ser complexo? Seria possível termos uma classificação diferente da mostrada na Figura 2, talvez incluindo valores imaginários?

Em sistemas ópticos, a perda de energia está vinculada a índices de refração com componente imaginário positivo. Já o ganho de energia está vinculado a índices de refração negativos, como ilustrado na Figura 3 [21, 22]. Pensemos um pouco sobre uma classe de sistemas projetados para modular o índice de refração utilizando ganho e perda de energia. Desta forma, são alcançados efeitos interessantes para a utilização em novos materiais. Esta classe de sistemas foi primeiramente exposta na literatura no contexto da mecânica quântica. Vamos observar brevemente como foi a descoberta desses sistemas.

3. Simetria Paridade-Reversão Temporal (simetria PT): conceitos básicos

Em qualquer curso introdutório em mecânica quântica, o estudante se depara com alguns axiomas. Como em

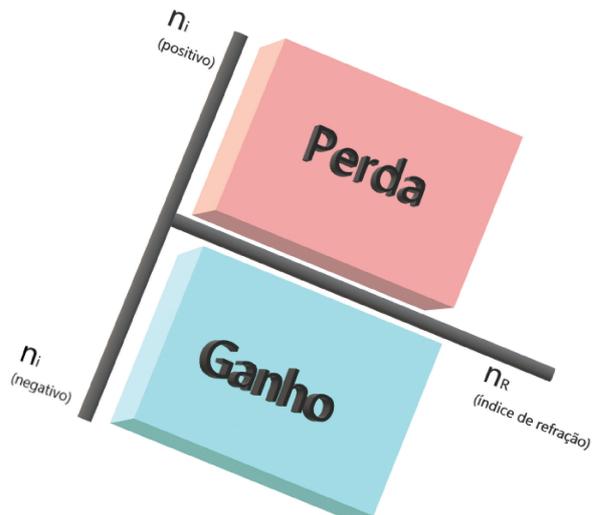


Figura 3: Em sistemas ópticos, a perda de energia está vinculada ao sinal positivo da parte imaginária do índice de refração. O ganho de energia está vinculado à parte negativa do índice de refração.

qualquer teoria, esses axiomas desenham a identidade, mostram aquilo que a teoria propõe. Temos em quântica um axioma garantindo que o espectro de energias medidas em qualquer sistema deve ser real. Outro axioma requer que o espectro de energia seja limitado por um valor mínimo. Agora note um outro axioma: o hamiltoniano H que descreve o sistema deve ser do tipo hermitiano [23]. Um operador H hermitiano segue a seguinte relação:

$$H = H^\dagger. \tag{5}$$

O símbolo \dagger representa duas operações combinadas na matriz do operador em base ortogonal: a transposição da matriz e a conjugação complexa de seus elementos. O que a relação (5) nos diz é que o hamiltoniano, quando escrito nessa forma matricial, é igual ao seu transposto conjugado. É uma propriedade que serve bem matematicamente, pois garante que os valores de energia fornecidos pelo hamiltoniano sejam reais. Isto também garante que a evolução temporal do sistema seja unitária – preserve a conservação da probabilidade. E aqui está o motivo do axioma.

Descrições de subconjuntos de sistemas com hamiltonianos não-hermitianos tem sido longamente utilizados para descrever fenômenos onde a energia não é conservada [12]. Mas hamiltonianos não-hermitianos não são vistos como uma descrição fundamental de fenômenos físicos, justamente por permitir que energias complexas sejam encontradas. Hamiltonianos não hermitianos representam uma descrição efetiva (não fundamental) do sistema em análise [24].

É possível encontrar diversas classes de hamiltonianos não-hermitianos que possuem espectros reais de energia [25]. Em 1998 Carl Bender e Stefan Boett-

cher publicaram esta descoberta: uma grande classe de hamiltonianos não conservativos que podem exibir todo o espectro de energia real. São hamiltonianos com simetria de paridade e também com simetria de reversão temporal – simetria PT [37]. A simetria PT desses hamiltonianos indica que eles comutam com os operadores paridade e reversão temporal:

$$PTH_p = H_p PT. \quad (6)$$

Usando a notação originalmente utilizada por Bender [22], a operação paridade é representada pelo símbolo \mathcal{P} . O efeito de \mathcal{P} pode ser pensado em termos de simetria de reflexão. Para exemplificar, podemos pensar no vetor de duas dimensões (1 0). Efetuando a operação \mathcal{P} neste vetor, obtemos um outro vetor (-1 0). Ou seja, A operação paridade tem como efeito uma reflexão nas posições dos componentes do vetor. De forma mais geral,

$$\mathcal{P}(x, y, z) = (-x, -y, -z). \quad (7)$$

Como resultado da operação, por exemplo, vetores polares mudam sua direção ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$) enquanto vetores axiais mantêm sua direção ($\vec{H} \rightarrow \vec{H}$). Nestes exemplos, \vec{r} é a posição espacial, \vec{p} é o momento linear, \vec{E} é o campo elétrico e \vec{H} é o campo magnético.

Em mecânica quântica, o valor médio do operador corresponde ao valor clássico desta mesma grandeza. Como o momento linear e a posição clássicos tem seu sinal invertido sob inversão espacial, os correspondentes quânticos $\langle \vec{p} \rangle$ e $\langle \vec{r} \rangle$ também mudam o sinal. Assim, temos

$$P\vec{r}P^{-1} = -\vec{r}, \quad (8a)$$

$$P\vec{p}P^{-1} = -\vec{p}. \quad (8b)$$

Em consequência, o momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) não muda:

$$P\vec{L}P^{-1} = \vec{L}. \quad (9)$$

É possível mostrar que o operador P é linear. P Também é unitário, ou seja, $PP^\dagger = I$. [25] Desta forma, assumindo que a função de onda é escalar, temos

$$P\psi(\vec{r}, t) = \psi(-\vec{r}, t). \quad (10)$$

Para o operador T, similar às relações 8 e 9, temos [21, 26]:

$$T\vec{r}T^{-1} = \vec{r}, \quad (11a)$$

$$T\vec{L}T^{-1} = -\vec{L}, \quad (11b)$$

$$T\vec{p}T^{-1} = -\vec{p}. \quad (11c)$$

É possível mostrar que o operador T é anti-unitário e antilinear [25, 27]. Desta forma assumindo que a função de onda é escalar, temos (onde ‘*’ denota conjugação complexa)

$$T\psi(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, -t). \quad (12)$$

$$PTH(p, r, t)PT = H^*(p, -r, -t). \quad (13)$$

Portanto, um hamiltoniano é PT simétrico se

$$H(p, r, t) = H^*(p, -r, -t). \quad (14)$$

Se um hamiltoniano tem a forma $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ (m sendo a massa e V o potencial), temos $H^*(p, -r, -t) = \frac{p^2}{2m} + V^*(-r)$. Portanto, é aparente que um potencial associado a um hamiltoniano PT-simétrico deve obedecer à relação

$$V(\vec{r}) = V^*(-\vec{r}). \quad (15)$$

Como exemplo, note as expressões abaixo (casos unidimensionais, por simplificação e sem perda de generalidade):

$$\cos(x) + i \cdot \text{sen}(x), \quad (16a)$$

$$x^2 + i \cdot x^3, \quad (16b)$$

$$\text{sen}^2(2x) + i \cdot \text{sen}(x). \quad (16c)$$

Uma relação matemática obedecendo a equação 15 é candidata a um potencial de hamiltoniano PT-simétrico. Todas as expressões em 16 obedecem à relação 15. Vejamos a expressão 16a para aplicar as reversões de espaço e de tempo. Aplicamos a reversão de espaço seguindo a equação 7 apenas invertendo o sinal das coordenadas.

$$\cos(-x) + i \cdot \text{sen}(-x).$$

Como $\cos(-x) = \cos(x)$, ficamos com

$$\cos(x) + i \cdot \text{sen}(-x).$$

Agora aplicamos a reversão temporal à expressão acima. Como já falado, para isso basta inverter o sinal da unidade imaginária (complexo conjugado).

$$\cos(x) - i \cdot \text{sen}(-x) = \cos(x) + i \cdot [-\text{sen}(-x)].$$

Mas $-\text{sen}(-x) = \text{sen}(x)$, e chegamos a

$$\cos(x) + i \cdot \text{sen}(x). \quad (17)$$

A expressão 17 é igual à equação 16a. Ou seja, aplicamos as reversões de espaço e de tempo à expressão 16a e ela se manteve inalterada.

Observando a expressão 15 com mais cuidado, e comparando com as expressões 16a a 16c, percebemos que tais potenciais tem uma característica peculiar: são formadas por duas partes, uma real e outra imaginária (evidenciando sua natureza complexa). Mais precisamente, a parte real deve ser uma *função par* enquanto a a sua parte imaginária deve ser uma *função ímpar*.

Portanto, o potencial visto na expressão 15 tem a forma

$$V(\vec{r}) = A(\vec{r}) + iB(\vec{r}), \quad (18)$$

onde $A(\vec{r})$ nos fornece a parte real (função par) e $B(\vec{r})$ a parte imaginária (função ímpar) do potencial. Isto

garante que as expressões permaneçam inalteradas sob as reversões de espaço e de tempo. Como exemplo, note a equação 16b. O termo x^2 fornece a parte real, par, do potencial. Enquanto x^3 fornece a parte imaginária, ímpar.

4. Óptica e simetria PT

O artigo original de Bender E Boettcher introduziu simetria PT no contexto da mecânica quântica [37]. Porém, em pouco tempo as ideias foram utilizadas em óptica. Isto ocorreu primeiramente usando a aproximação paraxial para a equação da propagação da onda eletromagnética. Com tal aproximação, chegamos a uma forma idêntica à da equação de Schrödinger, porém com interpretações diferentes para os seus termos constituintes.

Novamente, o leitor pode consultar uma extensa literatura sobre a aproximação paraxial [28, 29]. Faremos uma breve explanação para tornar claro a analogia com a equação de Schrödinger. Para um meio óptico com índice de refração n que varia apenas na direção x , uma onda ϕ com frequência ω com propagação predominantemente na direção (longitudinal) z , tem uma dada componente obedecendo a Equação de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial x^2} + k^2 E(x, z) = 0, \quad (19)$$

onde $k = n(x)\frac{\omega}{c}$. A variação de $n(x)$ em relação a algum valor médio n_0 é pequena, na forma $n(x) = n_0[1 + \nu(x)]$, com $\nu \ll 1$. Desta forma, a onda se propaga basicamente com $e^{ik_0 z}$ ($k_0 = n_0\frac{\omega}{c}$). Podemos escrever a componente como $E = e^{ik_0 z}\psi(x, z)$ e inserimos em (19), chegando a

$$\frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} + (k^2 - k_0^2)\psi = 0, \quad (20)$$

onde $k^2 = k_0^2(\frac{n^2}{n_0^2})$ e ψ é conhecida como função envelope. Neste ponto está o centro da aproximação. Negligenciamos o primeiro termo da equação, pois estamos lidando com a condição $\partial^2 \psi / \partial z^2 \ll \partial^2 \psi / \partial x^2$. Como ν é muito pequeno, podemos fazer $k^2 - k_0^2 = 2k_0^2 \nu$. Com essa aproximação, podemos reescrever 20 como

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k\nu(x)\psi = 0. \quad (21)$$

A equação 21 tem a mesma forma da equação de Schrödinger dependente do tempo (considerando $\hbar = m = 1$):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V(x)\psi = 0. \quad (22)$$

Como já falado, seus termos tem significados diferentes. Em 21, ψ é a função envelope da onda eletromagnética. Ao invés do tempo, temos a coordenada

longitudinal z . E o potencial $V(x)$ da mecânica quântica é substituído pelo termo ν , que recupera o índice de refração ($\nu(x) = n(x)/n_0 - 1$). A relevância da analogia está no fato de poder utilizar, em óptica, os resultados conhecidos em mecânica quântica para sistemas PT simétricos – resguardadas as devidas interpretações. É comum o índice de refração ter uma parte imaginária *positiva* representando a perda de energia. Lançando mão de índices de refração com parte imaginária *negativa*, é possível projetar sistemas ópticos que chamamos de sistemas ópticos PT simétricos, em analogia ao caso da mecânica quântica.

Neste contexto, a simetria PT em 21 impõe a relação

$$n(x) = n^*(-x), \quad (23)$$

como visto na seção anterior para o potencial. Também, da mesma forma devemos ter

$$n(x) = n_r(x) + in_i(x), \quad (24)$$

onde n_r é uma função par e n_i é uma função ímpar.

Quando tomamos um sistema com simetria PT, alguns fatores novos surgem. O primeiro a ser notado é consequência direta do que falamos até aqui. Dentro de certos limites, podemos lançar mão de índices de refração complexos. Em consequência, estendemos os limites dos fenômenos físicos a serem estudados – semelhante ao que mostramos no caso dos números negativos no início do artigo.

Fenômenos inteiramente novos podem ser observados [30]. Não é objetivo deste artigo adentrar em cada caso. Portanto, vamos citar alguns desses fenômenos no contexto da óptica e, em artigos posteriores, abordaremos com mais detalhes.

Um sistema PT simétrico possui os chamados *pontos excepcionais*, onde o sistema passa por uma mudança de fase. Abaixo do ponto de transição as soluções são todas reais e a energia pode propagar sem perda ou ganho. Acima deste ponto, as soluções perdem a simetria e o campo eletromagnético acaba passando por amplificação ou decaimento [31, 32].

Sistemas PT simétricos podem apresentar, espontaneamente, a chamada *refração assimétrica* [33]. É possível construir sistemas ópticos com refração que dependa do ângulo de incidência. Por exemplo, suponha uma onda plana linearmente polarizada incidindo sob um ângulo θ em uma interface entre o meio original (vácuo) e outro qualquer. É esperado que, sob a mudança $\theta \rightarrow -\theta$, a distribuição do campo dentro do segundo meio seja similar. Porém, se esse segundo meio foi construído com simetria PT, a distribuição do campo não obrigatoriamente obedece esse padrão. A refração observada pode ser assimétrica, dependendo do ângulo de incidência [34, 35].

5. Conclusão

Ao incluir os números negativos em seu ferramental, a ciência teve condições de alcançar horizontes mais

amplos. Os números complexos permitiram uma ampliação ainda maior. Neste contexto, destacamos a relevância da manipulação do índice de refração para o desenvolvimento de materiais – como cristais fotônicos e materiais plasmônicos. Também apresentamos uma introdução à simetria PT, destacando sua participação em fenômenos ópticos.

Sistemas PT simétricos, como vistos atualmente, são relativamente recentes. Bender and Boettcher publicaram seu famoso artigo em 1998 [37]. Se um hamiltoniano H comuta com o operador PT , ele pode ter autovalores reais. Um primeiro contato com os conceitos mostrados neste artigo pode se mostrar vantajoso para estudantes. Além dos que iniciam os seus estudos em quântica, aqueles que já passaram por uma formação inicial podem ter sua visão ampliada. Assim, uma oportunidade de aprofundamento na compreensão e na utilização dos conceitos já adquiridos podem ser alcançados.

Agradecimentos

Agradecemos ao constante suporte de tantos colegas que colaboram para nossa visão científica. Entre eles, Paulo Brandão e Solange Bessa. Também agradecemos ao suporte de CAPES, FAPEAL, CNPq, Instituto Federal de Alagoas (IFAL) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

Referências

- [1] M. Pietrocola, Cad. Bra. Ensino de Fís. **19**, 1 (2002).
- [2] J.F. Rocha, *Origens e evolução das ideias da física* (SciELO-EDUFBA, São Paulo, 2002).
- [3] P.J. Nahin, *An Imaginary tale: The story of $\sqrt{-1}$* (Princeton University Press, Princeton, 2010).
- [4] R. Descartes, *La géométrie* (Hermann, Paris, 1886).
- [5] C.B. Boyer, *A history of mathematics* (Wiley, New York, 1991).
- [6] M.C. Nordlander e E. Nordlander, Int. Jour. Mat. Education **43**, 5 (2012).
- [7] I. Kleiner, The Mathematics Teacher **81**, 7 (1988).
- [8] A.S. Souza e A.P. Rodrigues, Acta Tec. **14**, 2 (2021).
- [9] G.G. Emch, R. Sridharan e M. Srinivas, *Contributions to the history of Indian mathematics* (Springer, New York, 2005).
- [10] P.A. Tipler, *Mecânica, Oscilações e Ondulatória* (LTC, São Paulo, 2000).
- [11] R. El-Ganainy, K.G. Makris, M. Khajavikhan, Z.H. Musslimani, S. Rotter e D.N. Christodoulides, Nat. Phys. **14**, 1 (2018).
- [12] G. Gamow, Zeit. Phys. **51**, 3 (1928).
- [13] H. Feshbach, C. Porter e V. Weisskopf, Phys. Rev. **96**, 2 (1954).
- [14] J.D. Joannopoulos, P.R. Villeneuve e S. Fan, Nature **386**, 6621 (1997).
- [15] K. Sakoda, *Optical properties of photonic crystals* (Springer Science & Business Media, Berlim, 2005), v. 80.
- [16] S.A. Maier, *Plasmonics: fundamentals and applications* (Springer, New York, 2007), v. 1.
- [17] T.V. Shahbazyan e I.S. Mark, *Plasmonics: theory and applications* (Springer Netherlands, Heidelberg, 2013), v.15.
- [18] H.A. Atwater, Sci. Am. **296**, 4 (2007).
- [19] S.A. Maier, IEEE Jour. Quan. Elec. **12**, 6 (2006).
- [20] S. Singh, Phy. Scr. **65**, 2 (2002).
- [21] C.M. Bender, *PT symmetry: In quantum and classical physics* (World Scientific Publishing, Londres, 2019).
- [22] C.M. Bender, Rep. Prog. Phys **70**, 6 (2007).
- [23] A.O. Lopes, ark:/13960/t7pp80c37 (2017).
- [24] G. Barton, Interscience Tracts Phys. Astron. **22** (1963).
- [25] A. Mostafazadeh, Jour. Math. Phys. **43**, 8 (2002).
- [26] L.E. Ballentine, *Quantum mechanics: a modern development* (World Scientific Publishing, Londres, 2014).
- [27] S. Zhang, Z. Yong, Y. Zhang e S. He, Scientific Reports **6**, 1 (2016).
- [28] M.F.D. Souza, R. Silveira, K.Z. Nóbrega e C.A. Dartora, Rev. Bras. de Ensino de Física **36**, 3308 (2014).
- [29] M. Lax, W.H. Louisell e W.B. McKnight, Phys. Rev. A **11**, 4 (1975).
- [30] Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao e D.N. Christodoulides, Phys. Rev. Lett. **106**, 21 (2011).
- [31] W.D. Heiss, Jour. Phys. A **37**, 6 (2004).
- [32] M.A. Miri e A. Alu, Science **363**, 6422 (2019).
- [33] T. Shui, W.X. Yang, S. Liu, L. Li, e Z. Zhu, Phys. Rev. A **97**, 3 (2018).
- [34] X.Y. Zhu, Y.L. Xu, Y. Zou, X. C. Sun, C. He, M.H. Lu e Y.F. Chen, App. Phys. Lett. **109**, 11 (2016).
- [35] R. Li, P. Li, e L. Li, arXiv:1211.4296 (2012).
- [36] A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, (Academic Press Inc, New York, 1952), 3^a ed, v. 1.
- [37] C.M. Bender e S. Boettcher, Physical Review Letters **80**, 24 (1998).
- [38] A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, (Academic Press Inc, New York, 1952), 3^a ed, v. 1.
- [39] L.D. Landau e E.M. Lifchitz, *Course of Theoretical Physics* (Elsevier, New York, 1976), 3^a ed, v. 1.
- [40] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999), 3^a ed.
- [41] H.M. Nussenzweig, *Curso de Física Básica* (Blücher, São Paulo, 1997), v. 3.
- [42] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Thomson Learning, Belmont, 2004), 5^a ed.
- [43] N. Riahi, arXiv:1606.07713 (2016).
- [44] B.U. Felderhof, Journal of Physics A **41**, 445302 (2008).
- [45] G.G. Calderon e A. Rubio, Phys. Rev. A **55**, 3370 (1997).
- [46] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Física Matemática* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2007), 6^a ed, p. 736.
- [47] R.L. Viana, *Introdução à Eletrodinâmica Clássica* (Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2012), p. 209.
- [48] C.S. Pereira, *Processo de Attachment, Densidade de Raios e a Ocorrência de Flashover em Linhas de Transmissão de Eletricidade*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Pará (2014).
- [49] P. Ehrenfest, Zeitschrift für Physik **45**, 445 (1927).
- [50] A.O. Bolivar, Rev. Bras. Ensino Fís. **23**, 190 (2001).

- [51] J.J. Sakuray, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Boston, 1995).
- [52] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York, 1962), 3^a ed.
- [53] M.A. Nielsen e I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).