

Fotografias de Io, seu diâmetro e sua distância de Júpiter

Photographs of Io, its diameter and its distance from Jupiter

W. F. da Silva¹, A. C. Bertuola^{*1}, Victo S. Filho²

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

²H4D Laboratório de Pesquisa Científica, 04674-225, São Paulo, SP, Brasil.

Recebido em 20 de janeiro de 2022. Revisado em 14 de abril de 2022. Aceito em 26 de abril de 2022.

Realizamos uma análise de fotografias do trânsito da lua de Júpiter Io, para obter dois parâmetros geométricos. Dois parâmetros físicos são calculados utilizando o tempo de trânsito e os períodos orbitais. Combinando-os com triangulações e um modelo cinemático, os resultados principais obtidos são os valores experimentais da distância Io-Júpiter e do diâmetro de Io. Esses valores foram comparados com outros adotados na literatura, mostrando boa concordância.

Palavras-chave: Fotografia, trânsito de Io, distância Io-Júpiter, diâmetro de Io.

We performed an analysis of photographs taken from the transit of Jupiter's moon Io in order to obtain two geometric parameters. Two physical parameters are calculated using time of transit and orbital periods. Combining them with triangulations and cinematic models, the principal results obtained are the experimental values of the Io-Jupiter distance and the diameter of Io. Such values were compared with others adopted in the literature, showing good agreement.

Keywords: Photograph, Io transit, Io-Jupiter distance, Io diameter.

1. Introdução

A obra de Galileu Galilei *Sidereus Nuncius* [1] foi publicada em 1610 e apresentou ao mundo a existência de quatro luas de Júpiter. Hoje elas são conhecidas por Io, Europa, Ganimedes e Calisto e estão colocadas em ordem crescente de distanciamento ao grande planeta. Existem trabalhos pedagógicos publicados [2, 3] envolvendo essa importante descoberta de Galileu, que além de serem textos com investigações intrinsecamente interessantes, permitem revisitar essa obra de uma forma mais atual, valorizando os esforços exigidos naquela época desse brilhante cientista. Um dos motivos que remete a atenção para essas luas é aquele fenômeno denominado de trânsito, ou seja, quando uma lua galileana se movimenta em frente do planeta Júpiter e, assim, uma sombra da lua é projetada na imagem do disco iluminado, que atualmente pode ser fotografada com qualidade. Várias fotos são feitas durante o trânsito de uma lua galileana e elas podem gerar uma composição fotográfica. Muitas coisas interessantes podem ser apontadas nos trânsitos das luas galileanas. Por exemplo, as quatro luas podem aparecer em respectivos trânsitos, sejam eles simples, duplos e até mesmo triplos [4].

Atualmente os dados astronômicos dessas quatro luas são bem conhecidos. Por exemplo, os períodos de revolução T_L em dias dessas luas [5, 6] estão apresentados na segunda coluna na Tabela 1.

Tabela 1: Períodos de Revolução (em dias) das luas de Júpiter.

Lua galileana	T_L (dias)
Io	$1,773 \pm 0,004$
Europa	$3,537 \pm 0,009$
Ganimedes	$7,16 \pm 0,02$
Calisto	$16,08 \pm 0,08$

Tabela 2: Dados astronômicos da Terra e do Sol.

Grandezas	Terra	Júpiter
Diâmetro equatorial (km)	12 756	142 800
Distância máxima do Sol (10^6 km)	152,1	815,7
Distância mínima do Sol (10^6 km)	147,1	740,9
Distância média do Sol (10^6 km)	149,6	778,3
Período de revolução (ano)	1	11,86

Os planetas Terra e Júpiter tem seus dados astronômicos bem divulgados e os estudantes podem acessar as informações, por exemplo, no clássico livro texto de Física Básica do professor Halliday [7], do qual ainda hoje cabe sua indicação como suporte para os cursos de graduação em Engenharia e Física, principalmente. Alguns valores astronômicos inclusos no seu apêndice são apresentados na Tabela 2.

O período de revolução da Terra é bem menor que o período de Júpiter, indicando que, durante o trânsito de uma lua galileana e com boa aproximação considerada, Júpiter estará em repouso em relação ao Sol.

* Endereço de correspondência: acbertuola2@ifsp.edu.br

Tabela 3: Valores das distâncias e diâmetros das luas galileanas.

Lua galileana	d_{LJ} (10^6 km)	D_L (10^3 km)
Io	$0,4224 \pm 0,0006$	3,630
Europa	$0,669 \pm 0,001$	3,138
Ganimedes	$1,071 \pm 0,002$	5,262
Calisto	$1,876 \pm 0,006$	4,800

Os dados contidos nas Tabelas 1 e 2, de agora em diante, estão disponíveis para usos nos futuros trabalhos aritméticos e computacionais.

Dados adicionais astronômicos das luas galileanas estão apresentados na Tabela 3, justamente com o propósito de conferir os resultados desse trabalho, obtidos dos cálculos realizados.

Os valores das distâncias das luas galileanas a Júpiter (d_{LJ}) foram coletados na referência [5] e os valores dos diâmetros das luas galileanas foram obtidos a partir daqueles disponibilizados na referência [8].

Imaginemos um pesquisador observando atentamente uma animação, de uma composição de fotos do trânsito, de uma das luas galileanas. Ele notará uma sombra adentrando ao disco iluminado do planeta Júpiter, se movimentando em seu interior, descrevendo uma trajetória que a leva para a saída da região iluminada e visível. Algumas perguntas então podem ser formuladas. São elas:

- Será que é possível obter um valor experimental para a distância de uma lua galileana ao planeta Júpiter, considerando o fenômeno astronômico do trânsito, triangulações e análises de imagens fotográficas?
- É possível estimar o valor do diâmetro dessa lua galileana com uma triangulação?
- É possível responder as duas perguntas anteriores, considerando somente os aspectos geométricos e cinemáticos do trânsito da sombra através da imagem de Júpiter?

As respostas afirmativas das indagações anteriores são confirmadas pelos resultados obtidos nesse trabalho, como podemos checar nas próximas seções.

O método de análises de imagens que elaboramos está explicado na seção 2 a seguir, onde estão apresentadas as definições dos parâmetros geométricos (α, β). O modelo físico e as triangulações são apresentados de forma relativamente detalhada. Também é mostrada uma equação para calcular a distância entre uma lua galileana e Júpiter, que permitirá notar a importância das coletas de dados e os cálculos dos valores para os parâmetros geométricos (α, β). As seções 2.1, 2.2 e 2.3 são destinadas à apresentação das triangulações básicas que viabilizam a expressão analítica para a distância Lua-Júpiter e para a equação do diâmetro da lua galileana em estudo. Com o objetivo de auxiliar os estudantes na dedução dessas equações, nós detalhamos os principais passos desses cálculos nos apêndices. A seção 3 contém os resultados

para Io, com suas respectivas análises. A seção 4 é reservada para uma consideração adicional sobre um aspecto da dinâmica do fenômeno e o cálculo da massa de Júpiter.

2. Distância Lua-Júpiter

O valor experimental da distância entre uma lua galileana e Júpiter, ou apenas distância Lua-Júpiter (d_{LJ}), pode ser obtido com o auxílio de pelo menos duas fotografias durante o fenômeno do trânsito, contendo uma mancha que é a sombra da lua galileana em marcha sobre a imagem de Júpiter. Uma fotografia é tirada no início do trânsito, na região do segundo contato¹ da mancha, onde ela está bem visível. A outra foto é obtida no final do trânsito, que é para marcar a região de saída da pequena sombra. Os dados experimentais obtidos na análise das imagens são utilizados em um modelo matemático de triangulação no formato daquele de Aristarco [9], auxiliado por um estudo cinemático simples do movimento orbital das luas galileanas que, no final, permite obter um valor experimental para a distância lua-Júpiter.

2.1. Análises de imagens do trânsito

O objetivo último das análises de imagens do trânsito [10] é obter valores experimentais (α, β), denominados aqui como parâmetros geométricos. Uma fotografia interessante para esse trabalho está apresentada na Figura 1, em que são apresentados Júpiter e uma sombra da lua Io (mancha escura no segundo quadrante) sobre esse planeta.

Na Figura 1 estão exibidas algumas construções geométricas que permitem a obtenção de valores estimados para o parâmetro α . Uma elipse engloba totalmente a imagem do planeta Júpiter. Os valores dos eixos dessa elipse são providenciados pelo próprio *software*² utilizado nas análises de imagens. O eixo maior da elipse é o segmento $\overline{AB}$, enquanto $\overline{CD}$ é o eixo menor. Os dois valores são representados por $D_J = \{\overline{AB}, \overline{CD}\}$. A imagem da sombra da lua galileana Io é envolvida por um retângulo, cujos valores dos comprimentos dos lados são representados por $D = \{a, b\}$ e são disponibilizados pelo *software*.³ Os valores de D_J e D são combinados na

¹ O estudo do trânsito de uma Lua sobre Júpiter segue um critério padrão, identificando quatro contatos: o contato I é aquele em que a sombra toca pela primeira vez a borda do disco iluminado. No contato II, a sombra está totalmente no interior do disco iluminado, mas tem um ponto em comum com a borda de Júpiter. O contato III é aquele em que a sombra toca a extremidade oposta depois de percorrer o disco. No contato IV, a sombra saiu do interior do disco totalmente, mantendo apenas um ponto de contato.

² Nesse trabalho usamos o *Microsoft PowerPoint*.

³ Note que D representa uma estimativa do diâmetro da sombra da Lua e não deve ser confundido com o ponto D das Figuras 1 e 2(a) e do segmento $\overline{CD}$.

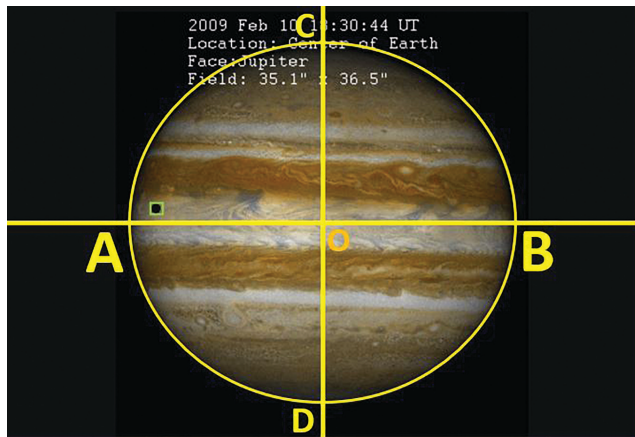


Figura 1: Construções geométricas para obtenção do parâmetro α . Júpiter é envolvido por uma elipse com eixos maior $\overline{AB}$ e menor $\overline{CD}$, que tem a forma próxima à de um círculo.

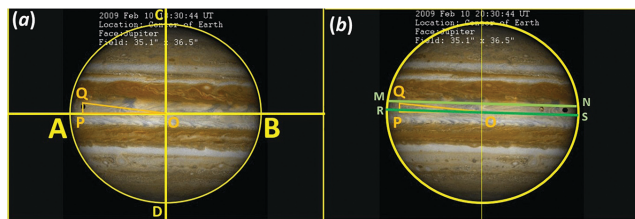


Figura 2: Fotografias do trânsito de Io, incluindo as construções geométricas. Por meio da razão entre as distâncias percorridas pela sombra L (estimadas dos segmentos construídos $\overline{MN}$ e $\overline{RS}$) e os valores estimados dos eixos D_J , obtemos o segundo parâmetro para a análise do trânsito de Io, denominado β .

definição do primeiro parâmetro geométrico

$$\alpha = \frac{D}{D_J}. \quad (1)$$

Computando os dois valores para D e os dois valores para D_J , quatro valores para o parâmetro α são obtidos.

A Figura 2 mostra duas fotografias com suas construções geométricas necessárias para obter numericamente o segundo parâmetro geométrico β .

Nessa figura, são mostrados dois quadros exibindo imagens obtidas de um mesmo vídeo, que simula o trânsito completo de Io sobre Júpiter.

As duas imagens foram coletadas por meio do uso da captura de tela e foram cuidadosamente ajustadas, mantendo os dois quadros (a) e (b) nas mesmas dimensões de ampliação. O quadro (a) da Figura 2 mostra uma elipse englobando o planeta Júpiter, de tal maneira que sua fronteira está totalmente inserida no interior da elipse desenhada, tal como realizado na Figura 1. O centro O da elipse está no cruzamento da reta horizontal que passa pelos pontos A e B , com outra reta, perpendicular à horizontal, que passa pelos pontos C e D . Um triângulo $\widehat{OPQ}$ é construído com a finalidade de localizar a sombra de Io na imagem de Júpiter. Todas essas

construções são transportadas para a imagem do quadro (b). Primeiramente, nesse quadro (b), um segmento de reta $\overline{MN}$ é construído para tangenciar a parte superior da sombra no seu movimento. Copiando e colando o segmento $\overline{MN}$, outro segmento paralelo de reta $\overline{RS}$ é gerado e posicionado convenientemente, tangenciando a sombra de Io na sua parte inferior. O paralelismo entre esse segmentos é mantido, mas o comprimento de $\overline{RS}$ é diferente do comprimento do segmento $\overline{MN}$, ou seja, os pontos R e S são gerados da intersecção com a elipse que engloba Júpiter. O próprio *software* utilizado nas construções geométricas exibidas na Figura 2 oferece dois valores para os tamanhos dos segmentos $L_1 = \overline{MN}$ e $L_2 = \overline{RS}$, cujos valores são as estimativas para o comprimento da trajetória descrita pela sombra de Io. O outro importante parâmetro geométrico é, então, definido pela razão

$$\beta = \frac{L}{D_J}. \quad (2)$$

Considerando que são estimados dois valores para L , ou seja, $L = \{L_1, L_2\}$, e dois para D_J , por meio da equação (2) quatro valores são obtidos para β .

Os dois parâmetros geométricos têm seus valores experimentais definidos e calculados pelas análises de fotografias do trânsito. Por construção, obtém-se quatro valores para α e quatro valores para β , que serão considerados quase independentes entre si. Eles ficam disponíveis para serem utilizados nos cálculos da distância Io-Júpiter e do diâmetro de Io.

As construções das elipses englobando a imagem de Júpiter são apenas a primeira parte do trabalho. As elipses poderiam ser construídas de maneira que elas estivessem localizadas no interior da área interna às fronteiras de Júpiter. Considerando o trabalho como um todo, as distâncias obtidas estariam subestimadas e superestimadas, mas no cômputo total, poderíamos obter um valor médio bem próximo do valor médio apresentado na Tabela 3. Somente a construção externa da elipse será considerada neste trabalho.

2.2. Modelagens por triangulações

A triangulação aqui adotada – e que serve para qualquer lua arbitrária de Júpiter – se assemelha muito àquelas já divulgadas nos artigos para o trânsito de Vênus [11] e para o trânsito de Mercúrio [12], ambos trânsitos planetários sobre o Sol. A triangulação é adaptada convenientemente para o trânsito das luas galileanas sobre Júpiter, conforme um novo desenho mostrado na Figura 3.

Em relação à Figura 3, os pontos C_1 e C_2 são as duas posições dos centros geométricos de dois pequenos círculos, que idealizam a representação da sombra de uma lua galileana sobre Júpiter, em dois momentos diferentes na sua trajetória, que na modelagem matemática é aproximada por um segmento de reta. As semelhanças

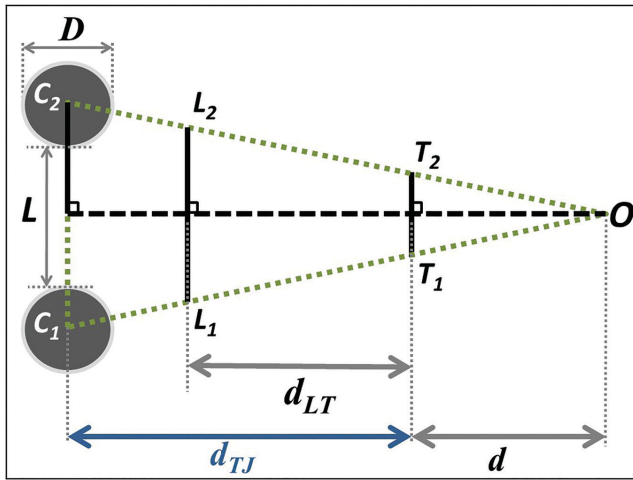


Figura 3: A triangulação do trânsito de luas galileanas sobre Júpiter.

entre os triângulos da Figura 3 são traduzidas pelas igualdades

$$\frac{\overline{T_1 T_2}}{d} = \frac{\overline{L_1 L_2}}{d_{LJ} + d} = \frac{L + D}{(d_{TJ} + d)}. \quad (3)$$

A primeira consideração é combinar as definições (1) e (2) e rapidamente obter

$$L + D = (\alpha + \beta)D_J. \quad (4)$$

Uma modelagem física simples é aquela em que a sombra de uma lua galileana e a Terra se deslocam em movimento uniforme durante a ocorrência do trânsito. Por exemplo, o movimento da Terra é governado por

$$\overline{T_1 T_2} = (\omega_T d_{TS})t, \quad (5)$$

onde ω_T é a velocidade angular da Terra em torno do Sol; d_{TS} é a distância Terra-Sol na ocasião do evento e t é o tempo de duração do trânsito. O percurso da Terra durante o trânsito (5) pode ser modificado para a forma

$$\overline{T_1 T_2} = 2\delta_T d_{TS}, \quad (6)$$

em que se definiu nos cálculos o primeiro parâmetro físico

$$\delta_T = \frac{\pi t}{T}, \quad (7)$$

identificando T com o valor do período de revolução da Terra em torno do Sol.

O deslocamento de uma lua de Júpiter é descrito pela equação

$$\overline{L_1 L_2} = (\omega_L d_{LJ})t, \quad (8)$$

onde ω_L é a velocidade angular da lua galileana em torno de Júpiter e d_{LJ} representa a distância entre a lua galileana e Júpiter. Esse percurso ainda pode ser obtido por meio da equação

$$\overline{L_1 L_2} = 2\delta_L d_{LJ}, \quad (9)$$

onde foi definido o segundo parâmetro físico

$$\delta_L = \frac{\pi t}{T_L}, \quad (10)$$

reconhecendo T_L como o período de revolução da lua galileana em torno de Júpiter.

Substituindo os resultados (4), (6) e (9) na equação (3) – mantendo em mente as equações (7) e (10) – e realizando manipulações matemáticas, a distância da lua a Júpiter é obtida e escrita na forma

$$d_{LJ} = \left[\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + 2\left(\delta_L \frac{d_{TJ}}{D_J} - \delta_T \frac{d_{TS}}{D_J}\right)} \right] d_{TJ}. \quad (11)$$

A equação (11) realmente permite calcular a distância Lua-Júpiter por meio de uma importante combinação entre os dois parâmetros geométricos (α, β), os dois parâmetros cinemáticos (δ_L, δ_T), o diâmetro equatorial de Júpiter, a distância Terra-Sol e a distância Terra-Júpiter. Os parâmetros geométricos são obtidos pelas análises de imagens enquanto os valores dos parâmetros físicos são calculados utilizando os valores dos períodos apresentados na Tabela 1. Os valores das distâncias astronômicas citadas estão disponibilizados na Tabela 2. A demonstração da equação (11) em uma forma mais detalhada está descrita no Apêndice A.

2.3. Diâmetro de uma lua galileana

Para calcular o diâmetro da lua galileana é necessária uma particular triangulação, tal como aquela desenhada na Figura 4.

A semelhança entre os triângulos $\triangle RSC \sim \triangle ADC$ na Figura 4 é reconhecida e, com mais algumas manipulações matemáticas, obtém-se

$$D_L = \frac{d_{TJ} - d_{LJ}}{\sqrt{\left(\frac{d_{TJ}}{\alpha D_J}\right)^2 + \frac{1}{4}}}, \quad (12)$$

que inclui o valor d_{LJ} obtido anteriormente por meio da equação (11). A dedução da equação (12) se encontra no Apêndice B.

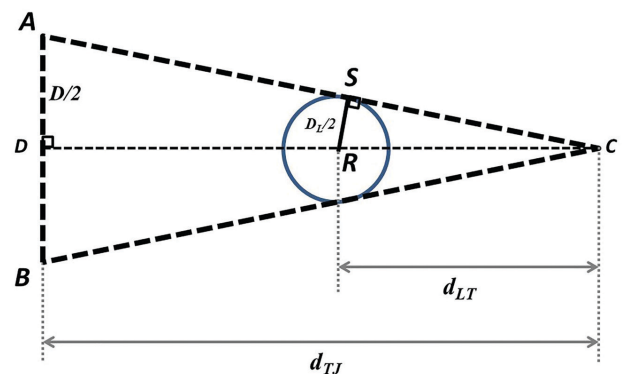


Figura 4: Triangulação relativa aos diâmetros de uma lua galileana arbitrária e sua sombra.

A equação (12) é aquela que realmente permite calcular o valor experimental do diâmetro da lua de Júpiter.

3. Resultados e Análises

O trânsito da lua galileana Io ocorrido em 10 de fevereiro de 2009 foi escolhido para exemplificar a validade do modelo, proposto e materializado pelas equações (11) e (12). Todo processo previsto teoricamente é detalhado até chegar nos valores experimentais finais da distância de Io a Júpiter e do diâmetro de Io.

Os valores obtidos nas análises de imagens para os parâmetros geométricos estão apresentados na Tabela 4. Os quatro primeiros valores para o par (α, β) foram obtidos por um dos autores e os quatro últimos valores por outro autor, de forma independente.

Na Tabela 4, estão contidos os valores dos parâmetros obtidos de acordo com as construções geométricas descritas anteriormente e pelas suas definições estabelecidas em (1) e (2).

O tempo de trânsito é obtido considerando o horário registrado na própria foto, conforme constatados nas Figuras 1 e 2. Os horários de contatos entre a sombra e a borda da imagem de Júpiter foram coletados nas fotos escolhidas e estão organizados na Tabela 5.

O contato I é aquele em que a sombra toca pela primeira vez a fronteira da imagem de Júpiter, portanto ocorre o início do fenômeno astronômico do trânsito. O contato IV é aquele em que a sombra está tocando a fronteira de Júpiter pela última vez no final do trânsito. O tempo de duração do trânsito de Io é calculado e pode ser substituído nas equações (7) e (10) para calcular os valores dos parâmetros físicos, apresentados na Tabela 6. O valor de δ_L dado nessa tabela, a rigor,

Tabela 4: Valores experimentais dos parâmetros geométricos (α, β) .

α	β
0,03008	1,0568
0,02797	0,9838
0,03759	1,0673
0,03497	0,9936
0,02302	1,0777
0,02143	1,0727
0,03069	1,0046
0,02857	1,0046

Tabela 5: Horários dos contatos coletados.

Contato	Horário
I	18:15
IV	20:40

Tabela 6: Valores dos parâmetros físicos (δ_T, δ_L) , obtidos a partir do trânsito de Io de 2009 para $t = 2,417$ h.

Parâmetro	δ_T	δ_L
Valor	0,000867	0,178

deve ser apresentado na forma $\delta_L = (0.178 \pm 0.001)$, cuja incerteza experimental foi obtida por meio da equação

$$\sigma_{\delta_L} = \left| \frac{\partial \delta_L}{\partial T_L} \right|_{T=\bar{T}_L} \sigma_{T_L}, \tag{13}$$

em que $\bar{T}_L$ é o valor médio e σ_{T_L} a incerteza de T_L , sendo ambos os valores obtidos da Tabela 1. A derivada parcial é calculada diretamente na Eq. (10).

Para efeito de cálculo, consideramos apenas o valor médio dos parâmetros físicos.

Os parâmetros físicos (δ_T, δ_L) são grandezas adimensionais e, nesse nosso exemplo proposto de aplicação, o valor numérico do parâmetro δ_L se refere àquele encontrado especificamente para a lua Io. Os valores apresentados na Tabela 5 serão considerados exatos por uma questão técnica, ou seja, observou-se que somente uma fotografia estava apta para representar o primeiro contato, pois na foto seguinte a sombra é localizada longe dos pontos de contato na fronteira de Júpiter. O mesmo acontece no segundo contato, de maneira que apenas um valor é considerado para o tempo de trânsito. Se houvesse um vídeo em que os contatos (I, IV) fossem bem testemunhados, incluindo inúmeras fotografias sucessivas, pelo menos outros horários poderiam ser considerados e outros valores para os parâmetros físicos enriqueceriam a estatística dos valores de (d_{LJ}, D_L) .

Todos os ingredientes são reunidos e agora, na qualidade de dados de entrada, estão à disposição de um programa computacional, elaborado para determinar a distância entre Io e Júpiter e o diâmetro de Io. As equações (11) e (12) são incluídas no algoritmo e escrito em uma linguagem computacional.

Nesse trabalho, escrevemos o algoritmo em linguagem C, mas o estudante pode utilizar outra linguagem ou mesmo uma planilha de cálculo.

Os resultados são apresentados na Tabela 7.

Os resultados das modelagens propostas nesse trabalho e apresentados na Tabela 7 podem ser comparados com aqueles da Tabela 3. Para os propósitos pedagógicos imediatos desejados, os valores experimentais obtidos com o método proposto se qualificam com positivas

Tabela 7: Resultados experimentais para a distância Lua-Júpiter e o diâmetro da Lua de Júpiter, obtidos por um programa computacional, considerando dados para a Lua Io e as Eqs. (11) e (12) de nosso modelo.

Grandeza	Valor experimental
d_{LJ} (10^6 km)	$(0,426 \pm 0,015)$
D_L (10^3 km)	$(4,20 \pm 0,7)$

concordâncias estatísticas, dentro de apenas um intervalo de incerteza experimental.

As incertezas experimentais apresentadas na Tabela 7 são de natureza estatística e seus valores podem diminuir conforme o aumento do número de dados calculados para enriquecer a estatística. Supondo, por exemplo, que numa turma de trinta estudantes, cada um deles oferece um valor experimental para o par (d_{LJ}, D_L) , conforme o modelo da Tabela 7, então temos trinta valores calculados pelos estudantes pesquisadores para os valores experimentais do par $(\bar{d}_{LJ} \pm \sigma_{d_{LJ}}, \bar{D}_L \pm \sigma_{D_L})$, onde cada grandeza é representada pelo seu valor médio acompanhado da sua respectiva incerteza experimental. Nesse caso, novos valores médios são calculados considerando os valores médios do par (d_{LJ}, D_L) apresentados idealmente pela turma inteira. As suas respectivas incertezas podem ser representadas pelo desvio padrão da média. Esse tipo de refinamento estatístico poderá ser observado nas práticas experimentais, computacionais e pedagógicas propostas nesse artigo.

4. Considerações Finais

Nesse trabalho, foi apresentada uma metodologia contemporânea, cuja prática pedagógica agrupa três tipos de trabalho. O primeiro a fazer envolve uma técnica de análise de imagem de uma composição de fotos, obtidas no fenômeno do trânsito de uma lua galileana particular. O segundo é uma abordagem matemática de triangulação do fenômeno de trânsito. O terceiro trabalho é a modelagem cinemática simples do movimento de uma sombra projetada na imagem de Júpiter. Uma composição de fotos gera valores para cada par de parâmetros geométricos (α, β) . O tempo entre o primeiro e o último contato do pequeno círculo de sombra na imagem de Júpiter e os períodos orbitais da Terra e de Io definem os dois parâmetros cinemáticos (δ_T, δ_L) . Na triangulação do fenômeno de trânsito, todos os parâmetros são relacionados em uma equação, que permite obter a distância de Io a Júpiter (d_{LJ}) na ocasião do evento. Com uma triangulação adicional, o valor do diâmetro de Io é obtido.

Uma consideração adicional para além da cinemática seria a inclusão de um aspecto da dinâmica do trânsito. Com os valores obtidos da distância Lua-Júpiter (d_{LJ}) e o período de revolução da lua galileana, o valor experimental da massa de Júpiter pode ser obtido. Isso pode ser conseguido supondo um movimento circular da lua galileana em torno de Júpiter e a segunda lei de Newton, onde a força gravitacional é aquela resultante, responsável pela aceleração centrípeta da lua galileana. Os cálculos levam à conhecida Lei de Kepler [7]

$$M_J = \left(\frac{4\pi^2}{G} \right) \frac{d_{LJ}^3}{T_L^2}. \quad (14)$$

Os valores de (T_L, d_{LJ}) na equação (14) estão disponíveis nas tabelas 1 e 7. O resultado experimental obtido

Tabela 8: Valores da constante gravitacional e da massa de Júpiter.

Grandeza	Valor	Unidade
G	$(6,67384 \pm 0,0008) \times 10^{-11}$	$\frac{m^3}{kg s^2}$
M_J	$(1,90 \pm 0,21) \times 10^{27}$	kg

para a massa M_J de Júpiter e o valor G da constante gravitacional [13] utilizado em (14) estão expostos na Tabela 8.

O cálculo da massa de Júpiter e a incerteza no cálculo da massa são dados em mais detalhes no Apêndice C.

O valor experimental da massa de Júpiter obtido matematicamente por meio da equação (14), prevista pelo método proposto nesse artigo, está em boa concordância com outros valores divulgados na literatura, como o valor reportado pela NASA: $M_J = (1898.125 \pm 0.088) \times 10^{24} \text{ kg}$ [14].⁴

Aquele estudante que cumprir as tarefas com trabalhos semelhantes direcionadas às luas galileanas Ganimedes, Europa e Calisto certamente ficará mais familiarizado com o fenômeno do trânsito e os valores astronômicos referentes a Júpiter, às luas galileanas, à Terra e ao Sol. O conhecimento adquirido pelo estudante interessado é conquistado seguindo a diretriz da aprendizagem ativa [15], pois esse artigo é uma proposta de materialização daquela pedagogia com tendência tecnológica contemporânea [16, 17]. Esse trabalho se junta a outros trabalhos publicados [18, 19], que diferem ligeiramente deste aqui apresentado, mas seguem a mesma metodologia, isto é, incluindo análises de imagens, triangulações e uma modelagem cinemática simplificada, mas que mostram que modelos cinemáticos e geométricos simples nos fornecem valores com precisão muito boa para calcular parâmetros astronômicos importantes como distância entre planetas, entre luas e seus planetas e diâmetros de planetas ou luas.

Agradecimentos

O primeiro agradecimento é direcionado ao CNPq pelo suporte financeiro do projeto. Outros agradecimentos são enviados ao Departamento de Mecânica (DME) e a Diretoria de Pesquisa do IFSP-*Campus* São Paulo.

Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:

A. Cálculo da Distância Lua-Júpiter. B. Cálculo do Diâmetro de Júpiter. C. Cálculo da Massa de Júpiter.

⁴ Uma atividade para o estudante é obter um valor para massa de Júpiter, realizando uma busca rápida no *google*. Obviamente, o estudante deve acessar uma referência institucional adequada.

Referências

- [1] G. Galilei, *Sidereus Nuncius or The Sideral Messenger* (University of Chicago Press, Chicago, 1989).
- [2] G. Iachel, *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia* **8**, 37 (2009).
- [3] N.C. Araujo e E.M. Rocco, *Proceedings Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics* **6**, 010330 (2018).
- [4] NASA, *Astronomy Picture of the Day*, disponível em: <https://apod.nasa.gov/apod/ap150206.html>, acessado em 18/01/2022.
- [5] R.R. Cuzinatto, E.M. Morais e C.N. Souza, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **36**, 3306 (2014).
- [6] K.S. Oliveira Filho e M.F.O. Saraiva, *O Sistema Solar*, disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/ssolar.htm>, acessado em 18/01/2022.
- [7] D. Halliday, *Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), v. 1.
- [8] C.J. Hamilton, *Júpiter*, disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/ast/solar/portug/jupiter.htm>, acessado em 18/01/2022.
- [9] T.B. Oliveira, V.T. Lima e A.C. Bertuola, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **38**, e2304 (2016).
- [10] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f8/Jupiter-io-transit_feb_10_2009.gif, acessado em 30/11/2021.
- [11] A.C. Bertuola, C. Frajuca, N.S. Magalhães e V. Santos Filho, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **37**, 3311 (2015).
- [12] J.V.A. Souza, A.C. Bertuola e V. Santos Filho, *European Journal of Physics* **42**, 015604 (2020).
- [13] <https://revistapesquisa.fapesp.br/uma-constante-em-mudanca>, acessado em 04/12/2021.
- [14] NASA, *Planetary Physical Parameters*, disponível em: https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/phys_par.html, acessado em 30/11/2021.
- [15] V.B. Henriques, C.P.C. Prado e A.P. Vieira, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **36**, 4001 (2014).
- [16] L. Allan, *BYOD na próxima aula*, disponível em: <https://exame.com/blog/crescerem-rede/byod-na-proxima-aula>, acessado em 09/01/2022.
- [17] M.C. Vieira e D. Conforto, em: *CBIE-LACLO - XXI Workshop de Informática na Escola* (Maceió, 2015).
- [18] V. Treff, A.C. Bertuola e V. Santos Filho, *The Physics Teacher* **57**, 562 (2019).
- [19] K.V. Romão e A.C. Bertuola, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **40**, e1301 (2018).
- [20] A.P. French, *Newtonian Mechanics* (Norton, New York, 1971).