

A teoria lunar de Ptolomeu e a determinação da posição da Lua e sua distância à Terra

Ptolemy's lunar theory and the determination of the Moon's position and its distance to Earth

Cícero Jailton de Moraes Souza^{*1}, Mario Antonio Alves Monteiro¹, Ibson José Maciel¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, Pesqueira, PE, Brasil.

Recebido em 19 de março de 2022. Revisado em 29 de abril de 2022. Aceito em 24 de maio de 2022.

Neste trabalho nos propomos a apresentar a teoria lunar de Ptolomeu presente no *Almagesto*. Para descrever o complexo movimento da Lua, ele propõe um sistema intrincado formado por objetos matemáticos comuns aos astrônomos de sua época, tais como o epiciclo, o deferente e o excêntrico. A partir de sua teoria lunar, Ptolomeu conseguiu determinar com boa precisão a longitude e a latitude eclípticas da Lua em relação ao centro da Terra. Ele também se propôs a determinar a distância da Terra à Lua, tendo que, para isso determinar primeiro a paralaxe lunar. Embora tenha obtido relativo sucesso em descrever as posições da Lua, sua determinação das distâncias entre ela e o centro da Terra não estavam corretas, principalmente devido ao fato de seu modelo lunar não ser uma boa representação do movimento da Lua.

Palavras-chave: Ptolomeu, *Almagesto*, latitude eclíptica, longitude eclíptica, paralaxe, Lua.

The purpose of this paper is to present Ptolemy's lunar theory in the *Almagest*. In order to describe the complex Moon's motion, he proposes an intricate system formed by mathematical objects common to astronomers of his time, such as epicycles, deferents and eccentrics. From his lunar theory, Ptolemy determined with good precision the ecliptic longitude and latitude of the Moon relative to the center of the Earth. He also set out to determine the distance from Earth to the Moon, having first to determine the lunar parallax. Although he was relatively successful in describing the Moon's position, his calculations of the distances from Earth to the Moon were not correct, mainly because his lunar model was not a good representation of the Moon's motion.

Keywords: Ptolemy, *Almagest*, ecliptic latitude, ecliptic longitude, parallax, Moon.

1. Introdução

Da antiguidade grega até a Idade Média, o estudo dos movimentos celestes era guiado, principalmente, pela astronomia matemática ptolomaica, que se preocupava em descrever o movimento dos astros e prever suas posições através da geometria, juntamente com a cosmologia platônico-aristotélica, que procurava justificar e buscar as causas destes movimentos. A principal motivação dos astrônomos da época era descrever da forma mais correta possível a posição dos astros no céu, prevendo seus movimentos e, conseqüentemente, os fenômenos deles resultantes, tais como os eclipses, as fases da Lua, as conjunções e oposições.

Uma das bases da astronomia e da cosmologia antigas era o *axioma platônico* (assim nomeado pelos historiadores e filósofos da ciência), uma hipótese conforme a qual os corpos celestes se moveriam em movimentos circulares uniformes ou combinações de movimentos circulares uniformes [1]. Tal ideia foi atribuída a Platão por Simplicio da Cilícia, que em seus *Comentários* da obra *Do Céu* de Aristóteles, escreveu:

Platão admite, em princípio, que os corpos celestes se movem com um movimento

circular, uniforme e constantemente regular; ele coloca então este problema aos matemáticos: quais são os movimentos circulares, uniformes e perfeitamente regulares que convém tomar como hipótese, a fim de poder salvar as aparências apresentadas pelos planetas? (Simplicio, 1894, *apud* Ref. [2, p. 7]).

Além do axioma platônico, os astrônomos também se baseavam na concepção aristotélica de universo segundo a qual a Terra estaria imóvel no seu centro, sendo a região sublunar (abaixo da esfera da Lua) composta pelos quatro elementos terrestres (terra, água, ar e fogo), cujos movimentos seriam do tipo ascendente ou descendente, e a região supralunar (acima da região sublunar), na qual todos os corpos seriam constituídos do elemento *éter*. Segundo a concepção aristotélica, o *éter* seria um elemento divino, primário e incorruptível ou inalterável, e cujo movimento teria que ser o mais perfeito de todos, ou seja, o circular, de forma que se concluiu a “inexistência de qualquer movimento no espaço distinto do circular” [3, p. 52]. Assim, os astrônomos estavam “autorizados” a tentar descrever a cinemática celeste da melhor maneira possível desde que mantivessem resguardadas as concepções platônico-aristotélicas.

* Endereço de correspondência: cicero.souza@pesqueira.ifpe.edu.br

Nesse contexto, a astronomia matemática de Ptolomeu surgiu como uma tentativa de “salvar as aparências” dos movimentos dos astros, sem que necessariamente as hipóteses usadas possuíssem uma realidade física [2]. Para descrever seus complexos movimentos, Ptolomeu propõe, em seu famoso livro *Almagesto*, um sistema igualmente complexo, onde utiliza um intrincado conjunto de círculos concêntricos e excêntricos. O que tornou seu modelo ainda mais enredado foi o fato de a Terra não ser o centro exato do movimento circular dos planetas (e também do Sol e da Lua), diferentemente do que foi proposto por Aristóteles e em outros sistemas anteriores, como no de Eudoxo [4], embora continuasse sendo o centro imóvel da esfera celeste e do universo [5]. Assim, com o objetivo explícito de explicar ou prever as posições dos astros, Ptolomeu tentou ajustar seu modelo às crenças antigas e passou a utilizar uma série de artifícios matemáticos para cumprir tal desígnio.

Neste trabalho nos propomos a descrever o caso particular da teoria lunar ptolomaica utilizando funções e relações trigonométricas, enquanto no *Almagesto* Ptolomeu usou uma ferramenta equivalente, o comprimento da corda subtendida pelo ângulo dado na circunferência [6]. Ptolomeu considerou a Lua girando em um “epiciclo” cujo centro estava localizado em um círculo maior, chamado “deferente”. Em seu modelo final, o centro do deferente não é a Terra, mas sim um ponto chamado de “excêntrico”, de forma que a Terra estaria deslocada do centro do deferente à uma certa distância do excêntrico [5]. Uma das maiores influências de Ptolomeu na Astronomia foi a introdução do “equante”, ponto sobre o qual o movimento de um planeta é visto como uniforme [7]. Embora o equante tenha sido utilizado no *Almagesto* apenas na teoria planetária de Ptolomeu, segundo Neugebauer, “as raízes do conceito de equante” [8, p. 86] já apareciam na sua teoria lunar.

A partir de seu modelo, Ptolomeu conseguiu determinar com boa precisão a posição da Lua em relação ao centro da Terra, o que lhe permitiu inclusive prever a sua posição em momentos futuros. Ele também se propôs a determinar a distância da Terra à Lua em termos do raio terrestre, tendo que, para isso determinar primeiro a paralaxe da Lua em um determinado instante. Enquanto seus resultados para a posição da Lua vistos da Terra possuem boa precisão, a sua determinação das distâncias da Terra à Lua em determinados pontos da órbita lunar contém um erro significativo, devido principalmente ao fato de que sua teoria lunar não estava correta. No entanto, o erro nas distâncias não era conhecido na época, de forma que não foi um fator determinante contra o modelo lunar ptolomaico.

2. O Problema da Paralaxe

A determinação da posição exata da Lua ou de qualquer outro astro por observações realizadas a partir de um ponto sobre a superfície da Terra encontra sérias

dificuldades quando o astro está distante do zênite do observador. Um dos problemas encontrados é o desvio da luz pela refração atmosférica, que é proporcional à distância zenital do astro. No entanto, existe outra dificuldade que surge ao se observar um objeto celeste da superfície da Terra: dois observadores em locais diferentes sobre a superfície do planeta e que observam o mesmo astro ao mesmo tempo irão discordar quanto a posição exata deste, mesmo que descontados os efeitos da refração atmosférica. Isso ocorre porque as coordenadas verdadeiras do astro, ou coordenadas geocêntricas, chamadas assim porque são tomadas com o centro da Terra como ponto de referência, são diferentes das coordenadas observadas sobre a superfície do planeta (exceto nos casos em que o objeto observado está localizado no zênite) [5].

Este efeito já era conhecido pelos astrônomos da antiguidade e surge devido ao ângulo de paralaxe do astro. Se o astro estiver muito distante da Terra, como as estrelas, seu ângulo de paralaxe é muito pequeno e os desvios observacionais desprezíveis. No entanto, no caso da Lua, que está muito mais próxima da Terra em comparação com as estrelas, a paralaxe é significativa, próxima a um grau, o que influencia consideravelmente a determinação de suas coordenadas. Antes de Ptolomeu, Hiparco de Nicéia já havia determinado o ângulo de paralaxe da Lua como sendo $58'9''14'''$, o que lhe permitiu concluir que a distância da Terra à Lua era aproximadamente igual a 59 raios terrestres [9].

O método utilizado por Ptolomeu para determinar a paralaxe consiste em primeiro determinar a distância zenital da Lua em relação ao centro da Terra, o que ele fez a partir do desenvolvimento da sua teoria lunar, que inicialmente foi baseada em dados retirados de observações de eclipses lunares, pois

Estas são as únicas observações que permitem determinar com precisão a posição lunar: todas as outras, sejam elas tiradas de passagens [da Lua] perto de estrelas fixas, ou de [avistamentos com] instrumentos, ou de eclipses solares, podem conter um erro considerável devido à paralaxe lunar [5, p. 173].

Uma vez determinada a distância zenital geocêntrica da Lua e medida diretamente a sua distância zenital aparente em relação a latitude de observação, a diferença entre estes resultados corresponde ao ângulo de paralaxe da Lua naquele instante.

Uma vez de posse do valor da paralaxe, Ptolomeu pôde determinar a distância da Terra à Lua em termos do raio terrestre no momento da sua passagem pelo meridiano local. Além disso, a teoria lunar ptolomaica também permite determinar a aproximação e o afastamento máximos da Lua em relação à Terra, embora estes valores não estejam em consonância com resultados atuais devido, principalmente, ao fato de a teoria lunar de Ptolomeu não ser a melhor descrição do movimento da Lua.

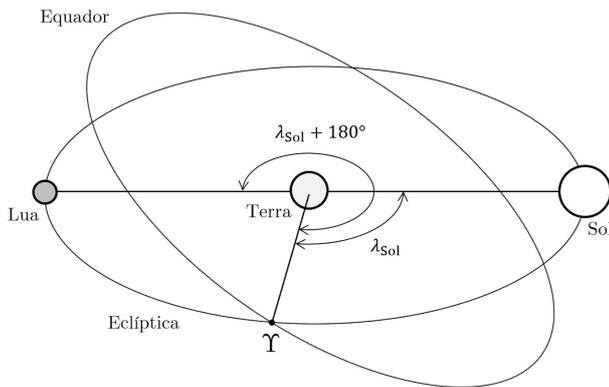


Figura 1: Longitude eclíptica da Lua determinada a partir de um eclipse lunar.

3. A Necessidade da Observação de Três Eclipses Lunares

Para desenvolver seu modelo de movimento lunar, Ptolomeu primeiro precisou determinar com precisão a posição verdadeira da Lua, ou seja, sua posição em relação ao centro da Terra em certo instante.

A longitude eclíptica do Sol λ_{Sol} , isto é, o ângulo entre a posição do Sol e o ponto vernal¹ Υ tomado sobre a eclíptica, podia ser determinada através da sua teoria solar (que não será discutida neste trabalho). Uma vez encontrada a longitude eclíptica do Sol, a posição geocêntrica da Lua pôde ser determinada durante um eclipse lunar total, onde a Lua e o Sol estão em oposição, como observado na Figura 1 e, portanto, $\lambda_{Lua} = 180^\circ + \lambda_{Sol}$. Assim,

Se encontrarmos o ponto na eclíptica que o sol ocupa no momento do eclipse médio (que é, com a maior precisão que podemos determinar, o momento em que o centro da Lua é diametralmente oposto ao do Sol em longitude), então, ao mesmo tempo do meio do eclipse, a posição precisa do centro da Lua será o ponto diametralmente oposto [5, p. 174].

Dessa forma, durante o eclipse lunar, “a verdadeira longitude geocêntrica da lua é conhecida independentemente de quaisquer efeitos de paralaxe na superfície da Terra” [10, p. 200]. Para encontrar os parâmetros de sua teoria lunar, Ptolomeu se baseou em eclipses observados por ele mesmo e em uma série de dados de eclipses observados e registrados na Babilônia, desde o ano 721 AEC² [11, 12].

Na primeira versão de sua teoria lunar, basicamente uma versão herdada de Hiparco [13], Ptolomeu considerou que a Lua estava se movendo em um epiciclo cujo

¹ Ponto imaginário na esfera celeste onde o Sol cruza o equador celeste no equinócio de outono no hemisfério sul.

² Antes da era comum.

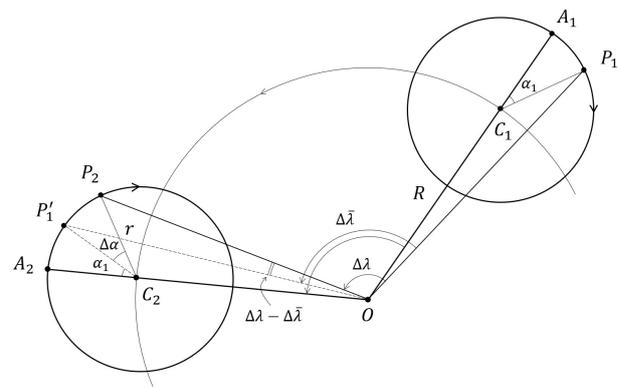


Figura 2: Posições da Lua em dois eclipses sucessivos.

centro está sobre o deferente centrado na Terra. Ele mostrou que era possível descobrir o tamanho do epiciclo da Lua a partir dos dados obtidos da observação de três eclipses lunares, onde a longitude da Lua em cada um pôde ser determinada a partir da longitude do Sol.

A Figura 2 representa o primeiro modelo lunar ptolomaico e apresenta as posições da Lua em dois eclipses diferentes, sendo P_1 e P_2 os pontos no epiciclo em que a Lua se encontra no primeiro e segundo eclipses, respectivamente. O epiciclo tem centro em C e raio $r = \overline{CP}$ a ser determinado. O observador se encontra no ponto O que, na primeira teoria lunar de Ptolomeu, coincide com o centro do deferente (circunferência na qual está localizado o centro do epiciclo e que realiza um movimento circular cujo centro coincide com o centro da Terra). A distância do observador até o centro do epiciclo é $R = \overline{OC}$. O ponto A corresponde ao apogeu da Lua, ou seja, o ponto onde ela se encontra mais distante da Terra. Os ângulos α_1 e α_2 são chamados de *anomalia* e correspondem aos ângulos $A_1\hat{C}_1P_1$ e $A_2\hat{C}_2P_2$, respectivamente, que são os ângulos formados entre o apogeu, o centro do epiciclo e a posição da Lua, sendo, portanto, $\Delta\alpha$ o incremento de anomalia que ocorre no intervalo de tempo Δt entre as observações dos eclipses, de modo que $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$. Temos ainda $\Delta\lambda$, que é a diferença na longitude verdadeira entre as duas posições P_1 e P_2 , correspondente ao ângulo $P_1\hat{O}P_2$; e $\Delta\bar{\lambda}$, que é a variação na longitude média e que corresponde aos ângulos $P_1\hat{O}P'_1$ ou $C_1\hat{O}C_2$. A diferença entre as variações de longitudes $\Delta\lambda - \Delta\bar{\lambda}$, corresponde ao ângulo sob o qual o arco de $\Delta\alpha$ é visto a partir de O . Como podemos ver ao observar a Figura 2, a diferença $\Delta\lambda - \Delta\bar{\lambda}$ depende do tamanho do raio r do epiciclo, de modo que Ptolomeu a utilizou para calcular o valor da razão R/r . No entanto, para atingir este objetivo foi necessário ainda os dados de um terceiro eclipse, onde a nova posição da Lua seria P_3 .

Segundo Pedersen [14], o problema a ser resolvido por Ptolomeu era encontrar o raio r de um círculo sobre o qual dois arcos consecutivos sob ângulos $\Delta\alpha_1$ e $\Delta\alpha_2$ (em relação ao centro C do epiciclo) são vistos sob os

Tabela 1: Dados dos três primeiros eclipses utilizados por Ptolomeu.

Eclipse	Local de observação	Momento médio do eclipse (após o meio-dia)	Longitude eclíptica da Lua	Data do eclipse
E_1	Alexandria	8h40min	$174^\circ 30'$	19 de março de 721 AEC
E_2	Alexandria	11h10min	$163^\circ 45'$	8 de março de 720 AEC
E_3	Alexandria	7h40min	$333^\circ 15'$	1 de setembro de 720 AEC

ângulos dados $\Delta\lambda_{12} - \Delta\bar{\lambda}_{12}$ e $\Delta\lambda_{23} - \Delta\bar{\lambda}_{23}$ a partir do ponto O , a princípio localizado no centro do deferente, a uma distância dada R do centro do epiciclo. Aqui, os índices 1, 2 e 3 referem-se aos eclipses utilizados em ordem cronológica.

Ainda conforme Pedersen [14, p. 169],

A teoria lunar do Livro IV do *Almagesto* baseia-se em um total de 15 eclipses, distribuídos por quase 900 anos, sendo o primeiro um eclipse observado na Babilônia em 721 AEC: *De acordo com o registro existente, ocorreu no primeiro ano de Mardukempad em Thoth 29/30, foi total, e começou, diz-se, uma hora após o nascer da lua* [grifo do autor].

A partir de dados do *Almagesto* [5, 11, 12], podemos elencar na Tabela 1 as informações dos três primeiros eclipses (E_n) utilizados por Ptolomeu e cujos dados foram adquiridos por ele através de registros da época.

A partir dos dados da Tabela 1, sendo λ_1, λ_2 e λ_3 as longitudes verdadeiras da Lua nos eclipses E_1, E_2 e E_3 , respectivamente, podemos determinar as diferenças entre as longitudes verdadeiras:

$$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 = 349^\circ 15' \tag{1}$$

$$\Delta\lambda_{23} = \lambda_3 - \lambda_2 = 169^\circ 30' \tag{2}$$

E sendo t_1, t_2 e t_3 os instantes de tempo na metade dos respectivos eclipses, também podemos determinar os intervalos de tempo entre os eclipses E_1 e E_2 , e entre os eclipses E_2 e E_3 :

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = 354\text{d } 2\text{h}34\text{min} \tag{3}$$

$$\Delta t_{23} = t_3 - t_2 = 176\text{d } 20\text{h}12\text{min} \tag{4}$$

Pela *tabela dos movimentos médios da Lua*, presente no *Almagesto* [5, p. 184], podemos obter os valores de longitude e anomalia médias, bem como os incrementos nestes valores devido a passagem do tempo. Primeiramente, Ptolomeu definiu as velocidades angulares médias de longitude da Lua, por dia e por hora, como iguais a:

$$\bar{\omega}_{\lambda, \text{ dia}} = 13^\circ 10' 34'' 58''' 33'''' 30''''' 30'''''' / \text{dia} \tag{5}$$

$$\bar{\omega}_{\lambda, \text{ hora}} = 0^\circ 32' 56'' 27''' 26'''' 23''''' 46'''''' / \text{hora} \tag{6}$$

De forma que o incremento de longitude média da Lua pode ser calculado do primeiro para o segundo eclipse e

do segundo para o terceiro eclipse a partir das equações (3), (4), (5) e (6):

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 &= \bar{\lambda}_1 + (\bar{\omega}_{\lambda, \text{ dia}} + \bar{\omega}_{\lambda, \text{ hora}}) \cdot \Delta t_{12} \implies \Delta\bar{\lambda}_{12} \\ &= 345^\circ 50' 54'' \quad [345^\circ 51'] \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_3 &= \bar{\lambda}_2 + (\bar{\omega}_{\lambda, \text{ dia}} + \bar{\omega}_{\lambda, \text{ hora}}) \cdot \Delta t_{23} \implies \Delta\bar{\lambda}_{23} \\ &= 170^\circ 10' 52'' \quad [170^\circ 7'] \end{aligned} \tag{8}$$

Neste trabalho, os valores apresentados entre colchetes nas equações representam os resultados obtidos por Ptolomeu e presentes no *Almagesto* [5].

Já para o movimento médio em anomalia, temos as seguintes velocidades angulares médias:

$$\bar{\omega}_{a, \text{ dia}} = 13^\circ 3' 53'' 56''' 17'''' 51''''' 59'''''' / \text{dia} \tag{9}$$

$$\bar{\omega}_{a, \text{ hora}} = 0^\circ 32' 39'' 44''' 50'''' 44''''' 40'''''' / \text{hora} \tag{10}$$

O que resulta, com base em (3), (4), (9) e (10), nos seguintes incrementos em anomalia:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + (\bar{\omega}_{a, \text{ dia}} + \bar{\omega}_{a, \text{ hora}}) \cdot \Delta t_{12} \implies \Delta\alpha_{12} \\ &= 306^\circ 24' 4'' \quad [306^\circ 25'] \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha_2 + (\bar{\omega}_{a, \text{ dia}} + \bar{\omega}_{a, \text{ hora}}) \cdot \Delta t_{23} \implies \Delta\alpha_{23} \\ &= 150^\circ 26' 0'' \quad [150^\circ 26'] \end{aligned} \tag{12}$$

Estes resultados podem agora ser utilizados para determinar o raio do epiciclo lunar.

4. Cálculo do Raio do Epiciclo

Na Figura 3 apresentamos um esquema das posições da Lua no epiciclo nos três primeiros eclipses usados por Ptolomeu, sendo, portanto, P_1, P_2 e P_3 as posições da Lua na metade do primeiro, segundo e terceiro eclipses, respectivamente, observadas a partir do ponto O [5]. Os ângulos $\bar{\delta}_1 = P_2\hat{C}P_1$ e $\bar{\delta}_2 = P_1\hat{C}P_3$, formados entre as posições da Lua e o centro do epiciclo C , podem ser facilmente determinados:

$$\bar{\delta}_1 = 360^\circ - \Delta\alpha_{12} \implies \bar{\delta}_1 = 53^\circ 35' 56'' \quad [53^\circ 35'] \tag{13}$$

$$\bar{\delta}_2 = \Delta\alpha_{23} - \bar{\delta}_1 \implies \bar{\delta}_2 = 96^\circ 50' 4'' \quad [96^\circ 51'] \tag{14}$$

Os segmentos de reta $R = \overline{OC}$ e $r = \overline{CA}$ continuam sendo, respectivamente, os raios do deferente e do epiciclo. Traçamos os segmentos $\overline{OP}_1, \overline{OP}_2$ e \overline{OP}_3 , entre o

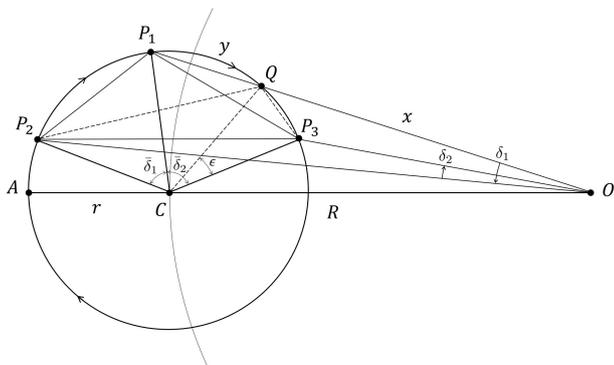


Figura 3: Posições da Lua no epiciclo nos três primeiros eclipses utilizados por Ptolomeu, observadas a partir de um ponto O .

ponto de observação e as posições da Lua no epiciclo; o segmento \overline{OA} , entre o ponto de observação e o ponto A e que também passa pelo centro C do epiciclo; e os segmentos $\overline{CP_1}$, $\overline{CP_2}$ e $\overline{CP_3}$, traçados entre o centro do epiciclo e a respectiva posição da Lua. No ponto em que o segmento $\overline{OP_1}$ cruza o epiciclo, colocamos o ponto Q , de onde traçamos os segmentos de reta tracejados \overline{QC} , $\overline{QP_2}$ e $\overline{QP_3}$. O segmento $\overline{OP_1}$ pode ser dividido no ponto Q , formando outros dois segmentos $\overline{OQ} = x$ e $\overline{QP_1} = y$. O ângulo entre os segmentos $\overline{CP_3}$ e \overline{QC} em relação a C é $\epsilon = \angle P_3CQ$. O ângulo $\delta_1 = \angle P_1OP_2$ é o ângulo sobre o qual o arco de $\bar{\delta}_1$ é visto de O , assim como $\delta_2 = \angle P_2OP_3$ é o ângulo sobre o qual o arco de $\bar{\delta}_2$ é visto de O .

A partir do ponto O , os arcos de $\bar{\delta}_1$ e $\bar{\delta}_2$ aparecem sob os ângulos $\Delta\lambda_{12} - \Delta\bar{\lambda}_{12}$ e $\Delta\lambda_{23} - \Delta\bar{\lambda}_{23}$, de forma que:

$$\delta_1 = \Delta\lambda_{12} - \Delta\bar{\lambda}_{12} \implies \delta_1 = 3^\circ 24' 6'' \quad [3^\circ 24'] \quad (15)$$

$$\delta_2 = \Delta\lambda_{23} - \Delta\bar{\lambda}_{23} \implies \delta_2 = -0^\circ 40' 52'' \quad [-0^\circ 37'] \quad (16)$$

Analisando o triângulo ΔP_2QO da Figura 3, com base em (13) e (15), e considerando $\angle P_1QP_2 = \bar{\delta}_1/2$, pois $\angle P_1QP_2$ é um ângulo inscrito no círculo do epiciclo, podemos ver que todos os ângulos internos são dados:

$$\begin{aligned} \angle QOP_2 &= \delta_1 = 3^\circ 24' 6'' \\ \angle P_2QO &= 180^\circ - \frac{\bar{\delta}_1}{2} = 153^\circ 12' 20'' \\ \angle QP_2O &= \frac{\bar{\delta}_1}{2} - \delta_1 = 23^\circ 23' 52'' \end{aligned} \quad (17)$$

E aplicando a lei dos senos a este triângulo, com os ângulos dados em (17), obtemos o segmento $\overline{P_2Q}$ em termos de x :

$$\overline{P_2Q} = \frac{\text{sen } \angle QOP_2}{\text{sen } \angle QP_2O} \cdot x \approx 0,14941 x \quad (18)$$

Da mesma forma, considerando $\angle P_2QP_3 = \bar{\delta}_2/2$ e os resultados dados em (14) e (16), o triângulo ΔP_3QO

tem todos os ângulos internos definidos:

$$\begin{aligned} \angle P_3QO &= \delta_1 + \delta_2 = 2^\circ 43' 14'' \\ \angle P_3QO &= 180^\circ - \frac{360^\circ - \bar{\delta}_2}{2} = 48^\circ 25' 2'' \\ \angle QP_3O &= \frac{360^\circ - (\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2)}{2} - (\delta_1 + \delta_2) = 128^\circ 51' 44'' \end{aligned} \quad (19)$$

E a partir da lei dos senos e dos ângulos definidos em (19), podemos escrever o segmento $\overline{P_3Q}$ em termos de x :

$$\overline{P_3Q} = \frac{\text{sen } \angle P_3QO}{\text{sen } \angle QP_3O} \cdot x \approx 0,06096 x \quad (20)$$

O segmento $\overline{P_2P_3}$ corresponde a corda do ângulo $\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2$, de forma que a partir de (13) e (14) podemos escrever:

$$\overline{P_2P_3} = 2r \cdot \text{sen} \left(\frac{\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2}{2} \right) \approx 1,93379 r \quad (21)$$

A lei dos cossenos aplicada ao triângulo ΔP_2QP_3 nos leva a:

$$\begin{aligned} (\overline{P_2P_3})^2 &= (\overline{P_2Q})^2 + (\overline{P_3Q})^2 - 2 \cdot \overline{P_2Q} \cdot \overline{P_3Q} \\ &\cdot \cos \left[\frac{360^\circ - (\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2)}{2} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

A equação (22), nos permite, a partir dos resultados (13), (14), (18), (20) e (21), obter uma relação entre os segmentos $x = \overline{OQ}$ e $r = \overline{CA}$, de forma que:

$$\frac{x}{r} \approx 11,03906 \quad (23)$$

No entanto, também podemos escrever a corda $\overline{P_3E}$ em termos de r , bastando para isso relacioná-la também com o ângulo ϵ :

$$\overline{P_3Q} = 2r \cdot \text{sen}(\epsilon/2) \quad (24)$$

Que a partir de (20) e (23) resulta em:

$$\epsilon \approx 39^\circ 19' 15'' \quad (25)$$

A corda $y = \overline{P_1Q}$ é dada por:

$$y = \overline{P_1Q} = 2r \cdot \text{sen} \left(\frac{\bar{\delta}_2 - \epsilon}{2} \right) \quad (26)$$

O que nos permite obter, de (14), (25) e (26), uma relação entre y e r :

$$\frac{y}{r} \approx 0,96218 \quad (27)$$

Utilizando *Os Elementos* de Euclides [15], particularmente o Livro II, proposição 6, e o Livro III, proposição 36 [16], Ptolomeu determinou que o produto entre os comprimentos dos segmentos $\overline{P_1O} = x + y$ e $\overline{QO} = x$ é

constante para qualquer posição de P_1 sobre o epiciclo e, portanto, pode ser escrito em termos do raio r do epiciclo e do raio R do deferente:

$$(x + y) \cdot x = (R + r) \cdot (R - r) = R^2 - r^2 \quad (28)$$

Dividindo ambos os lados da equação (28) por r^2 , fazendo algumas manipulações algébricas e utilizando as equações (23) e (27), obtemos o valor da razão R/r :

$$\frac{R}{r} \approx 11,55347 \quad (29)$$

A teoria lunar de Ptolomeu, até este ponto, não permitia conhecer o comprimento do segmento $R = \overline{OC}$ em termos de alguma unidade de comprimento física absoluta, este problema é contornado por ele ao adotar, como outros autores gregos anteriores, um valor padrão para o raio do círculo em unidades sexagesimais. O círculo padrão, na trigonometria moderna, “geralmente tem um raio igual a uma unidade de comprimento; mas para usar o sistema de numeração sexagesimal tanto quanto possível, Ptolomeu deu ao seu círculo padrão um raio de 60 unidades de comprimento” [14, p. 56]. Dessa forma, em numeração sexagesimal e considerando $R = 60$, a partir da equação (29) obtemos:

$$r = 5; 11,36 \quad [5; 13] \quad (30)$$

Essa notação sexagesimal foi empregada por Ptolomeu em todo *Almagesto* e era de uso comum pelos astrônomos da antiguidade, que foram influenciados pelos dados astronômicos dos babilônicos, que utilizavam um sistema de numeração de base 60 [8]. Podemos converter valores do sistema sexagesimal para o sistema de numeração decimal, assim, por exemplo, o raio do epiciclo calculado acima se torna $5; 11,36 = 5 + 11/60 + 36/60^2 \approx 5,193$. Em outro trio de eclipses que ele próprio observou, Ptolomeu encontrou um valor ligeiramente diferente para r , de forma que passou a adotar o valor arredondado [17] de $r = 5^{1/4}$ ou $r = 5; 15$ (ou $5 + 15/60 = 5,25$, em numeração decimal).

5. A Excentricidade do Deferente

Vamos considerar o arranjo da Lua no epiciclo em um eclipse lunar de forma que a posição da Lua P é observada do ponto O , conforme a Figura 4. O ângulo de anomalia $\alpha = \widehat{PCA}$ é o ângulo formado entre a posição da Lua e o apogeu da Lua (ponto A) em relação ao centro C do epiciclo. Uma vez tendo encontrado o raio do epiciclo, Ptolomeu determinou o ângulo máximo sob o qual o arco da anomalia α é observado a partir de O . Este ângulo p , chamado de equação da anomalia ou *prosthaphaeresis* [17], é nitidamente uma função de α e a partir da Figura 4 esta função pode ser determinada:

$$\operatorname{tg} p(\alpha) = -\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{R + r \cos \alpha} \quad (31)$$

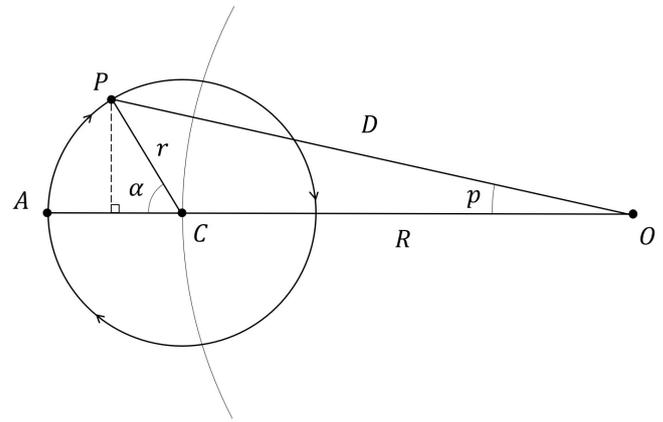


Figura 4: Posição da Lua no epiciclo em um eclipse lunar observada a partir de um ponto O .

O valor máximo encontrado por Ptolomeu para a equação da anomalia da Lua a partir de suas observações foi $p_{\text{máx}} = 5^{\circ}1'$ [5]. É fácil obter um resultado próximo a este a partir da equação (31) utilizando o cálculo diferencial moderno, bastando para isso derivar essa equação e igualar o resultado à zero, de onde chegamos a:

$$1 + R \cos \alpha = 0 \quad (32)$$

Que, utilizando a convenção $R = 60$, é satisfeita quando $\alpha = 90^{\circ}57'18''$ ou $\alpha = 270^{\circ}57'18''$, de forma que, substituindo este resultado em (31), temos $p_{\text{máx}} \approx 5^{\circ}0'26''$.

A partir da Figura 4, também podemos escrever uma expressão para a distância do centro da Terra ao centro da Lua $D = \overline{OP}$ em função da anomalia α :

$$D = \sqrt{(R + r \cos \alpha)^2 + (r \operatorname{sen} \alpha)^2} \quad (33)$$

Até este ponto, a teoria lunar de Ptolomeu permitia determinar a longitude da Lua quando ela estava em oposição (Lua cheia) e em conjunção (Lua nova), ou seja, nas duas sizíguas,³ de forma que era possível prever a ocorrência de eclipses com boa precisão [18]. No entanto, era ainda necessário colocar a teoria a prova nas quadraturas⁴ da Lua (quarto crescente e quarto minguante). Com esse objetivo, Ptolomeu realizou uma primeira observação da Lua em Alexandria, no dia 9 de fevereiro de 139 EC,⁵ às 5h15min antes do meio-dia, obtendo o seguinte resultado para a longitude da Lua, λ_{Lua} [14]:

$$\lambda_{\text{Lua}} = 219^{\circ}40' \quad (34)$$

Tomando como referência a data padrão t_0 da época (meio-dia de 26 de fevereiro de 747 AEC) [5, 10], o

³ Alinhamentos da Terra, da Lua e do Sol, que ocorrem nas Luas novas e cheias.

⁴ Ocorrem quando metade da face visível da Lua está iluminada, ou seja, nas fases quarto crescente e quarto minguante.

⁵ Era comum.

intervalo de tempo Δt entre esta data e a data t de sua observação foi:

$$\Delta t = t - t_0 = 885 \text{ anos } 203 \text{ dias } 18 \text{ horas } 45 \text{ min} \tag{35}$$

O valor da longitude média da Lua na data padrão, $\bar{\lambda}_{0, \text{ Lua}}$, foi obtido por computação através das tabelas de longitudes médias e da posição da Lua em um eclipse, e era igual a [19]:

$$\bar{\lambda}_{0, \text{ Lua}} = 41^\circ 22' \tag{36}$$

Novamente a partir das tabelas do *Almagesto* [5, p. 184], a velocidade angular média por ano em longitude era:

$$\bar{\omega}_{\lambda, \text{ ano}} = 129^\circ 22' 46'' 13''' 50'''' 32''''' 30'''''' / \text{ano} \tag{37}$$

O que nos permite, a partir de (5), (6), (15), (36) e (37), determinar a longitude média da Lua na data da observação:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\text{ Lua}} &= \bar{\lambda}_{0, \text{ Lua}} + (\bar{\omega}_{\lambda, \text{ ano}} + \bar{\omega}_{\lambda, \text{ dia}} + \bar{\omega}_{\lambda, \text{ hora}}) \cdot \Delta t \\ &= 227^\circ 19' 53'' \quad [227^\circ 20'] \end{aligned} \tag{38}$$

Que corresponde a uma diferença $\Delta\lambda$ entre a longitude média (38) da Lua e a sua longitude verdadeira (34) igual a:

$$\Delta\lambda = \bar{\lambda} - \lambda = 7^\circ 39' 53'' \quad [7^\circ 40'] \tag{39}$$

E essa diferença é exatamente igual a equação de anomalia p , ou seja, $\bar{\lambda} - \lambda = p$. No entanto, esse valor é maior que o resultado obtido anteriormente ($7^\circ 40' > 5^\circ 1'$), o que contradiz a primeira teoria lunar de Ptolomeu, que é incapaz de explicar a diferença na equação de anomalia observada. Essa diferença nos valores máximos da equação de anomalia é chamada de *evecção*⁶ e sua descoberta é considerada uma das mais relevantes contribuições de Ptolomeu para a Astronomia e “teve uma influência de longo alcance nas técnicas da astronomia antiga e medieval” [8, p. 69].

A partir de suas observações, Ptolomeu concluiu que $p_{\text{máx}} = 5^\circ 1'$ nas sizíguas e $p_{\text{máx}} = 7^\circ 40'$ nas quadraturas, e para explicar tal diferença ele assume que o tamanho aparente do epíciclo da Lua varia, ficando maior nas quadraturas do que nas sizíguas. Essa variação aparente foi justificada por Ptolomeu considerando que a distância entre o centro C do epíciclo e o centro O da Terra varia no decorrer do tempo. Assim, ele propõe substituir o deferente concêntrico do primeiro modelo por um deferente excêntrico, de forma que a posição do observador O , que corresponde ao centro da Terra, não é mais o centro do deferente, como observado na Figura 5.

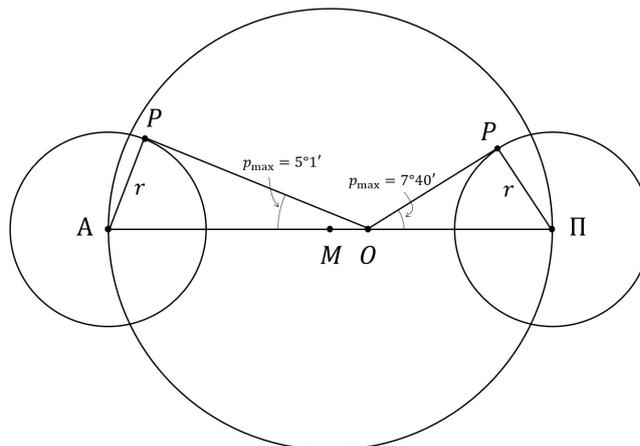


Figura 5: Deferente excêntrico da Lua.

Na Figura 5, P é a posição da Lua, O é o observador que corresponde ao centro da Terra, A agora é o ponto onde o centro do epíciclo está mais distante de O (apogeu) e Π é o ponto onde o centro do epíciclo está mais próximo da Terra (perigeu). A excentricidade e é o comprimento do segmento \overline{OM} , onde M é chamado de excêntrico, o novo centro do deferente.

Com esse segundo modelo, Ptolomeu conseguia explicar por que o epíciclo parecia maior quando seu centro se encontrava em Π . Utilizando a equação de anomalia máxima (39), a convenção já adotada $\overline{OA} = R = 60$ e o valor definido por Ptolomeu como sendo o raio do epíciclo, $r = 5; 15$, podemos determinar o comprimento do segmento $\overline{O\Pi}$:

$$\overline{O\Pi} = \frac{r}{\text{sen}(7^\circ 39' 53'')} = 39; 21, 45 \quad [39; 22] \tag{40}$$

Dessa forma o raio do deferente excêntrico pode ser encontrado:

$$\overline{MA} = R - e = \frac{\overline{OA} + \overline{O\Pi}}{2} = 49; 40, 52 \quad [49; 41] \tag{41}$$

E, a partir de (41), podemos também determinar a excentricidade e :

$$e = \overline{OM} = R - \overline{MA} = 10; 19, 8 \quad [10; 19] \tag{42}$$

Assim, de acordo com a Figura 5, a segunda teoria lunar de Ptolomeu prevê a máxima e a mínima distância entre o centro da Terra e o centro da Lua, $D_{\text{máx}}$ e $D_{\text{mín}}$, respectivamente:

$$D_{\text{máx}} = \overline{OA} + r = 65; 15 \quad [65; 15] \tag{43}$$

$$D_{\text{mín}} = \overline{O\Pi} - r = 34; 6, 45 \quad [34; 7] \tag{44}$$

A razão destas distâncias é $D_{\text{máx}}/D_{\text{mín}} \approx 1,91$, ou seja, estes valores têm quase a proporção 2 : 1 o que deveria ser refletido na relação entre os diâmetros

⁶ A maior irregularidade no movimento da Lua produzida pela variação da ação do Sol durante sua revolução mensal ao redor da Terra, que ocorre devido a excentricidade da órbita da Lua e produz uma variação em sua longitude eclíptica.

aparentes da Lua no céu. Dessa forma, a Lua deveria aparecer aproximadamente duas vezes maior quando estivesse mais próxima da Terra do que quando estivesse mais distante. Porém, isto não estava de acordo com os dados observacionais [1]. Apesar desta incoerência não poder ter passado despercebida por Ptolomeu, ele não aborda este problema no *Almagesto* [20].

Devemos chamar atenção para o fato de que os resultados obtidos por Ptolomeu estão em unidades convencionadas a partir do raio do círculo padrão $R = 60$. Portanto, ele ainda necessita de um parâmetro para obter uma unidade de medida de comprimento física absoluta, o que ele conseguirá a partir da análise da paralaxe da Lua.

Com esse novo modelo lunar, Ptolomeu foi capaz de descrever com boa precisão a posição da Lua tanto nas sizílgias quanto nas quadraturas. No entanto, ao colocá-lo em teste nas posições intermediárias, como nas oitantes,⁷ quando a Lua está em forma de “foice”, suas observações mostraram que a Lua estava em uma posição levemente diferente daquela prevista teoricamente pelo segundo modelo, de forma que foi necessário ainda um terceiro modelo do movimento lunar. A diferença entre a posição observada da Lua nas oitantes e a prevista por Ptolomeu é explicada por ele “dando ao epiciclo o que ele chama de $\pi\rho\delta\sigma\nu\epsilon\nu\iota\varsigma$ ou inclinação” [14, p. 192].

6. O Modelo Final da Teoria Lunar Ptolomaica

Uma das ferramentas mais importantes na astronomia matemática ptolomaica era o equante, “um dispositivo [...] desenvolvido na antiguidade para ajudar na reconciliação da teoria dos epiciclos com os resultados das observações exatas” [7]. O equante tem uma característica importante: a velocidade de rotação do deferente deve ser uniforme em relação a ele, ou seja, o planeta se desloca de forma que o segmento que o une ao equante gira uniformemente com o tempo [7]. Portanto, ao introduzir o equante em seu modelo, além de tentar “salvar as aparências” das observações, Ptolomeu estava também, de uma forma bastante peculiar, tentando satisfazer o axioma platônico, pois assim o movimento era circular em relação ao ponto excêntrico e uniforme em relação ao ponto equante.

Ptolomeu fez uma menção direta ao conceito de equante apenas no Livro IX do *Almagesto*, quando ele apresentou o início de sua teoria planetária e, portanto, depois de já ter discutido sua teoria solar e lunar (Livros III, IV e V). Porém, os fundamentos do conceito do equante já estavam implícitos em seu modelo de movimento da Lua, onde ele admite que o movimento é uniforme em relação a um determinado ponto (definido

por ele como o centro da eclíptica) e não-uniforme em relação ao centro do deferente [21]. De fato, na sua teoria lunar final (representada esquematicamente na Figura 6), Ptolomeu fez “a Lua girar em torno de seu epiciclo a uma taxa não-uniforme em relação [ao segmento $\overline{OA_v}$], mas uniforme em relação [ao segmento $\overline{M'A}$], onde o ponto $[M']$ é tal que $[O]$ é o ponto médio do [segmento $\overline{MM'}$]” [22, p. 73]. O ponto equante, por sua vez, é definido na teoria planetária de forma que a Terra é o ponto médio do segmento que une o equante ao centro do deferente [22].

Atualmente sabemos que o movimento orbital da Lua e dos planetas é melhor descrito através das três leis do movimento orbital propostas por Johannes Kepler. A primeira lei de Kepler afirma que as órbitas dos planetas (e da Lua) são elipses, com o Sol (ou a Terra, no caso do sistema Terra-Lua) ocupando um dos seus focos, sendo a excentricidade da elipse a distância entre os dois focos. A segunda lei, conhecida como lei das áreas, diz que a linha que une o centro do Sol aos planetas cobre áreas iguais em tempos iguais, o que implica que a velocidade do planeta varia conforme ele se aproxima ou se afasta do centro gravitacional do seu sistema, de forma que, no caso da Lua, sua velocidade orbital é maior quando ela se encontra no perigeu e menor quando está no apogeu. Uma aproximação da segunda lei de Kepler pode ser enunciada em termos do foco vazio da elipse:

Tirando algumas pequenas correções proporcionais ao quadrado da excentricidade, a segunda lei de Kepler é igual à asserção de que a linha até o planeta a partir do *outro* foco (aquele onde não está o Sol) gira numa velocidade constante – isto é, gira no mesmo ângulo a cada segundo. Assim, para uma boa aproximação, a segunda lei de Kepler apresenta as mesmas velocidades planetárias da velha ideia de um equante, um ponto do lado oposto do centro do círculo em relação ao Sol (ou, para Ptolomeu, em relação à Terra) e à mesma distância do centro, em torno do qual a linha até o planeta gira numa velocidade constante. O equante, portanto, revelou-se como o foco vazio da elipse [20, p. 165].

Dessa forma, sabemos que a razão de o equante ter funcionado, pelo menos de forma aproximada, está relacionada à verdadeira órbita dos corpos, que é uma elipse, e do fato de que o movimento do astro em sua órbita deve obedecer a lei das áreas de Kepler. Porém, se a excentricidade da órbita não for muito grande, podemos aproximar o movimento considerando que ao invés de obedecer a lei das áreas, o astro se movimenta com velocidade uniforme em relação ao foco vazio, que seria o equivalente na elipse ao ponto equante na circunferência.

⁷ Fases intermediárias da Lua, ocorrem entre duas fases principais, existindo, portanto, quatro oitantes: entre as fases cheia e quarto crescente, entre o quarto crescente e a cheia, entre a cheia e o quarto minguante, entre o quarto minguante e a nova.

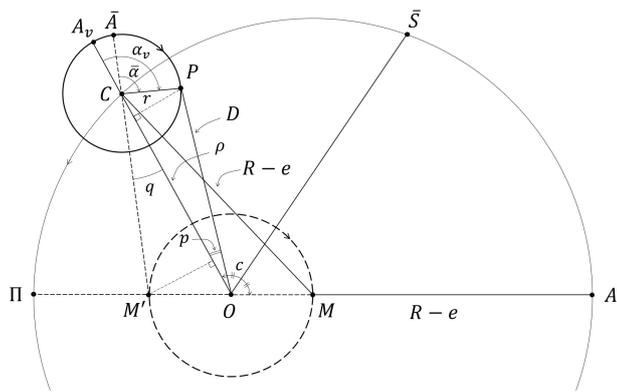


Figura 6: O terceiro modelo lunar de Ptolomeu.

Para compreendermos o terceiro modelo lunar de Ptolomeu, vamos nos basear em Pedersen [14, pp. 192–195] e começaremos examinando a Figura 6. Nela temos o ponto O , que é o centro da Terra; o ponto M , que é o excêntrico e possui uma característica importante, ele realiza um movimento circular uniforme em relação a posição média do Sol \bar{S} e com centro em O ; M' é o ponto diametralmente oposto a M ; e A e Π são o apogeu e o perigeu, respectivamente. Vamos nomear a distância do centro da Terra, O , até o centro do epiciclo, C , de ρ . O raio do deferente é $R - e$ e D é a distância do centro da Terra ao centro da Lua. A *inclinação* proposta por Ptolomeu significava que o movimento médio em anomalia $\bar{\alpha}(t) = \widehat{A\bar{C}P}$, agora seria tomado em relação a um ponto médio, \bar{A} , chamado de apogeu médio do epiciclo, enquanto o ângulo $\alpha_v(t) = \widehat{A_v\hat{C}P}$ era o movimento verdadeiro em anomalia, que deveria ser tomado em relação a um ponto A_v , chamado de apogeu verdadeiro do epiciclo. Essa substituição do apogeu verdadeiro A_v pelo apogeu médio \bar{A} é a única diferença entre a segunda e a terceira teoria lunar.

Partindo da data da época padrão, t_0 , a anomalia média em uma data específica pode ser determinada por computação a partir da equação:

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t_0) + \omega_a \cdot (t - t_0) \tag{45}$$

O ângulo q , chamado de equação do centro, é uma função de c e é oposto pelo vértice ao ângulo $\widehat{A_v\hat{C}\bar{A}}$, de forma que as anomalias média e verdadeira estão relacionadas por:

$$\alpha_v(t) = \bar{\alpha}(t) + q(c) \tag{46}$$

O ângulo $c(t)$ é uma função do tempo, chamada de *centrum*, e é duas vezes a diferença entre as longitudes médias do Sol e da Lua:

$$c(t) = 2 \cdot (\bar{\lambda}_{\text{Lua}} - \bar{\lambda}_{\text{Sol}}) \tag{47}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔMCO e resolvendo a equação resultante para encontrar ρ ,

obtemos o seguinte resultado:

$$\rho(c) = e \cos c + \sqrt{(R - e)^2 - e^2 \sin^2 c} \tag{48}$$

Pelo triângulo $\Delta M'CO$, podemos obter o ângulo $q(c)$:

$$\begin{aligned} q(c) &= \arctg \left[\frac{e \sin(180^\circ - c)}{\rho(c) - e \cdot \cos(180^\circ - c)} \right] \\ &= \arctg \left[\frac{e \sin c}{\rho(c) + e \cdot \cos c} \right] \end{aligned} \tag{49}$$

Com estes novos parâmetros a equação da anomalia (31) e a equação da distância da Terra à Lua (33) da segunda teoria lunar podem ser reescritas de uma forma mais geral, que engloba todas as posições da Lua:

$$\text{tg } p(\alpha_v, c) = -\frac{r \sin \alpha_v}{\rho(c) + r \cos \alpha_v} \tag{50}$$

$$D(\alpha_v, c) = \sqrt{[\rho(c) + r \cos \alpha_v]^2 + (r \sin \alpha_v)^2} \tag{51}$$

Com isso, a teoria lunar de Ptolomeu está completa, sem que ele considere necessário testá-la em outras posições fora das sizíguas, quadraturas ou oitantes. Agora, a partir dela, é possível determinar a longitude e a latitude verdadeiras da Lua com uma precisão que as outras duas versões do modelo não possuíam.

7. A Determinação da Longitude e Latitude Eclíptica da Lua

Para compreender como Ptolomeu utilizou sua teoria lunar, vamos considerar como exemplo a data específica de 1 de outubro de 135 EC, às 5h50min depois do meio-dia, onde ele realizou uma observação da Lua no meridiano, e que resulta em um intervalo de tempo, em relação a data padrão, igual a:

$$\Delta t = t - t_0 = 882 \text{ anos } 72 \text{ dias } 5\text{h}20\text{min} \tag{52}$$

Partindo de sua teoria solar, Ptolomeu também obtém a longitude média do Sol, igual a $\bar{\lambda}_{\text{Sol}} = 187^\circ 31'$, e sua longitude verdadeira, igual a $\lambda_{\text{Sol}} = 185^\circ 28'$. A partir de (5), (6), (36), (37) e (52), podemos determinar a longitude média da Lua na data da observação:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\text{Lua}} &= \bar{\lambda}_{0, \text{ Lua}} + (\bar{\omega}_\lambda, \text{ ano} + \bar{\omega}_\lambda, \text{ dia} + \bar{\omega}_\lambda, \text{ hora}) \\ &\cdot \Delta t = 265^\circ 43' 15'' \quad [265^\circ 44'] \end{aligned} \tag{53}$$

A anomalia média da Lua na data padrão era [19]:

$$\bar{\alpha}_0 = 268^\circ 49' \tag{54}$$

E a partir das tabelas do *Almagesto* [5, p. 184], a velocidade angular média por ano em anomalia da Lua era:

$$\bar{\omega}_a, \text{ ano} = 88^\circ 43' 7'' 28''' 41'''' 13''''' 55'''''' / \text{ano} \tag{55}$$

O que nos permite, utilizando (9), (10), (52), (54) e (55), determinar a anomalia média da Lua na data da observação:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 + (\bar{\omega}_a, \text{ano} + \bar{\omega}_a, \text{dia} + \bar{\omega}_a, \text{hora}) \cdot \Delta t = 262^\circ 19' 51'' \quad [262^\circ 20'] \quad (56)$$

Com o valor de $\bar{\lambda}_{\text{Sol}}$ e com as equações (47) e (53), obtemos o valor da equação do *centrum* $c(t)$ para a data:

$$c(t) = 2 \cdot (265^\circ 43' 15'' - 187^\circ 31') = 156^\circ 24' 30 \quad [156^\circ 26'] \quad (57)$$

A partir de (41), (42), (48), (49) e (57), obtemos os resultados:

$$\begin{aligned} \rho(c) &= (10; 19, 8) \cos(156^\circ 24' 30'') \\ &+ \sqrt{(49; 40, 52)^2 - (10; 19, 8)^2 \sin^2(156^\circ 24' 30'')} \\ &= 40; 3, 10 \quad [40; 4] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} q(c) &= \arctg \left[\frac{(10; 19, 8) \sin(156^\circ 24' 30'')}{(40; 3, 10) + (10; 19, 8) \cos(156^\circ 24' 30'')} \right] \\ &= 7^\circ 41' 14'' \quad [7^\circ 40'] \end{aligned} \quad (59)$$

Substituindo (56) e (59) em (46), chegamos a:

$$\begin{aligned} \alpha_v(t) &= (262^\circ 19' 51'') + (7^\circ 41' 14'') \\ &= 270^\circ 1' 5'' \quad [270^\circ 0'] \end{aligned} \quad (60)$$

Considerando $r = 5; 15$, e substituindo (58) e (60) em (50), podemos obter o valor da equação de anomalia:

$$\begin{aligned} p(\alpha_v, c) &= \arctg \left[-\frac{(5; 15) \sin(270^\circ 1' 5'')}{(40; 3, 10) + (5; 15) \cos(270^\circ 1' 5'')} \right] \\ &= 7^\circ 28' 2'' \quad [7^\circ 26'] \end{aligned} \quad (61)$$

Como vimos na equação (39), existe uma relação entre a longitude eclíptica verdadeira da Lua em um determinado instante, $\lambda(t)$, a longitude média neste instante, $\bar{\lambda}(t)$, e a equação de anomalia, $p(\alpha_v, c)$, que pode ser expressa de forma mais geral da seguinte maneira:

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(t) + p(\alpha_v, c) \quad (62)$$

Substituindo (53) e (61) em (62), encontramos a longitude verdadeira da Lua na data da observação:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (265^\circ 43' 15'') + (7^\circ 28' 2'') \\ &= 273^\circ 11' 17'' \quad [273^\circ 10'] \end{aligned} \quad (63)$$

Segundo dados obtidos a partir do *software Stellarium* [23], a longitude eclíptica verdadeira da Lua na data e hora da medida de Ptolomeu era $\lambda_{\text{Lua}} \approx 274^\circ 49'$, que é bem próximo ao valor obtido por ele.

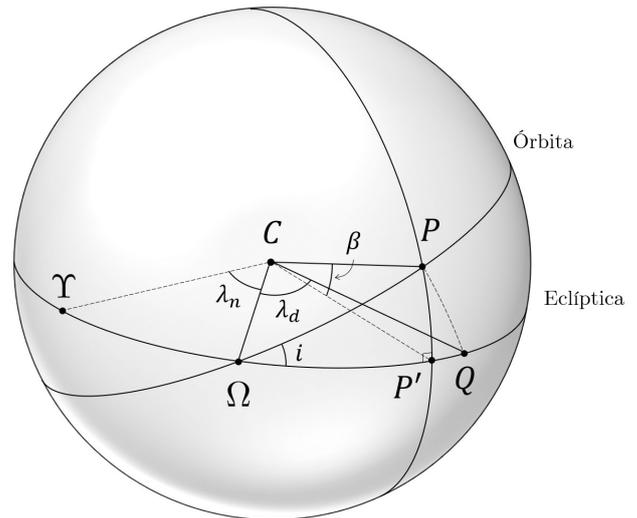


Figura 7: Inclinação da órbita da Lua em relação a eclíptica na esfera celeste.

Uma vez resolvido o problema de encontrar a longitude eclíptica da Lua, Ptolomeu se debruçou sobre o problema de determinar a sua latitude eclíptica. Vamos analisar a Figura 7, que representa um esquema simplificado da esfera celeste cujo centro C coincide com o centro da Terra. O ponto Υ é o ponto vernal, Ω é o nó ascendente,⁸ P é a posição real da Lua, P' é a projeção da posição de P na eclíptica e Q é um ponto sobre a eclíptica cujo comprimento do segmento $\overline{Q\Omega}$ é igual ao comprimento do segmento \overline{QP} . O ângulo i é a inclinação da órbita da Lua em relação à eclíptica, λ_n é a longitude do nó ascendente, $\lambda_d = \Omega\hat{C}P' = \Omega\hat{C}P$ é o ângulo entre a posição da Lua e o nó ascendente em relação ao centro da Terra que é o mesmo ângulo entre o nó ascendente e a projeção da posição da Lua na eclíptica em relação ao centro da Terra. Além disso, β é a latitude eclíptica da Lua.

Podemos escrever a seguinte relação entre as longitudes λ_d , λ_n e a longitude da Lua λ :

$$\lambda_d = \lambda - \lambda_n \quad (64)$$

Onde λ_n pode ser obtido por computação a partir do movimento angular retrógrado do nó (cuja velocidade angular é ω_Ω) e do intervalo de tempo em relação a época padrão, ou seja:

$$\lambda_n(t) = \lambda_n(t_0) + \omega_\Omega \Delta t \quad (65)$$

A partir da regra de triângulos esféricos [24, p. 54] aplicada ao triângulo retângulo $\Delta\Omega P P'$, obtemos:

$$\sen \beta = \sen i \cdot \sen \lambda_d \quad (66)$$

No entanto, Ptolomeu não utiliza o valor de λ_d diretamente nos seus cálculos, mas sim o valor λ_β , que

⁸ Ponto no qual a órbita da Lua cruza a eclíptica em trajetória ascendente.

corresponde a longitude de um ponto que está a 90° à leste do nó na órbita lunar, e que é, portanto, a longitude do ponto sobre a órbita que está mais afastado, ou mais ao norte, da eclíptica. Assim, também podemos escrever:

$$\text{sen } \beta = \text{sen } i \cdot \text{sen } (\lambda_\beta + 90^\circ) \quad (67)$$

A longitude λ_β corresponde à longitude verdadeira da Lua quando se encontra no máximo afastamento da eclíptica, o que tornava mais fácil a determinação de seu valor e, conseqüentemente, do valor de λ_d .

Para determinar o valor da inclinação da órbita lunar i em relação à eclíptica, Ptolomeu fez observações da Lua, a partir de Alexandria, numa data próxima ao solstício de verão e com a Lua perto de seu afastamento máximo da eclíptica, pois

Na região desses pontos a latitude da Lua permanece sensivelmente a mesma durante um intervalo considerável e, além disso, como a Lua está muito próxima do zênite no paralelo através de Alexandria (no qual fizemos nossas observações), sua posição aparente é aproximadamente igual à sua posição real. Em tais situações, verificou-se que a distância do centro da Lua ao zênite era sempre cerca de $2^{1/8^\circ}$. Portanto, por este método também a maior latitude da Lua em ambos os lados da eclíptica mostra-se igual a 5° [5, p. 247].

Dessa forma, com a Lua na sua aproximação máxima do zênite (conseqüentemente passando pelo meridiano local), os efeitos de paralaxe são desprezíveis sendo, portanto, sua posição observada muito próxima de sua posição verdadeira. Essa situação é ilustrada na Figura 8, na qual Z representa o zênite do observador O , H é o horizonte do mesmo observador e onde, segundo os dados observacionais de Ptolomeu, $z = 2^{1/8^\circ} \approx 2^\circ 7'$ é a distância zenital da Lua. Como a Lua se encontra próxima ao meridiano, o arco formado neste instante entre o equador e a eclíptica sobre o meridiano, corresponde exatamente a obliquidade da eclíptica (sua inclinação em relação ao equador), cujo valor determinado por Ptolomeu na época era $\varepsilon = 23^\circ 51'$. Além disso, Ptolomeu utiliza o valor $\varphi = 30^\circ 58'$ para a latitude de Alexandria, o que resulta em $\beta = \varphi - \varepsilon - z \approx 5^\circ$ como sendo a latitude eclíptica máxima da Lua. A partir da esfera apresentada na Figura 7, podemos perceber que essa latitude máxima corresponde a inclinação da órbita da Lua em relação a eclíptica, de modo que $i = \beta_{\text{max}} = 5^\circ$. Então a latitude a qualquer instante pode ser determinada através desse resultado e da equação (66) ou (67):

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsen[\text{sen } (5^\circ) \cdot \text{sen } \lambda_d] \\ &= \arcsen[\text{sen } (5^\circ) \cdot \text{sen } (\lambda_\beta + 90^\circ)] \end{aligned} \quad (68)$$

A longitude do nó ascendente na época padrão era $\lambda_n(t_0) = 317^\circ 7'$ [19]. De modo que a longitude do nó $\lambda(n)$ pode ser obtida a partir de (52),

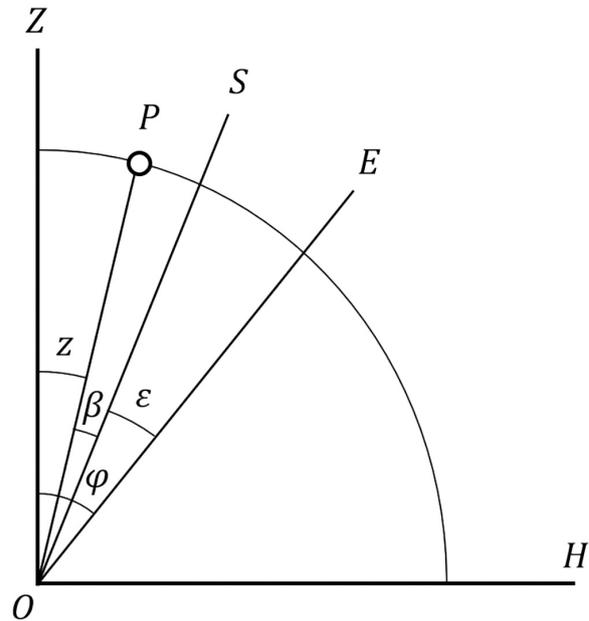


Figura 8: Parâmetros lunares durante uma observação realizada próxima ao solstício de verão.

(65) e do valor da velocidade angular do nó, $\omega_\Omega = -0^\circ 3' 10'' 41''' 15'''' 26''''' 7''''''$ /dia [8] em relação ao ponto vernal:

$$\lambda_n(t) = 181^\circ 3' 45'' \quad [181^\circ 4'] \quad (69)$$

Substituindo (63) e (69) em (64), obtemos:

$$\lambda_d = 92^\circ 7' 15'' \quad [92^\circ 7'] \quad (70)$$

Que quando substituído em (68), resulta no valor da latitude eclíptica da Lua na data:

$$\beta = 4^\circ 59' 25'' \quad [4^\circ 59'] \quad (71)$$

Com base no *Stellarium* [23], a latitude eclíptica da Lua na hora e data da observação era $\beta_{\text{Lua}} \approx 5^\circ 18'$, que mais uma vez está próximo ao resultado obtido por Ptolomeu.

Dessa forma, a teoria lunar de Ptolomeu permitiu a ele determinar a longitude eclíptica da Lua e, a partir dela, a sua latitude eclíptica. De posse desse resultado e sabendo que no instante da observação a Lua estava próxima da culminação, ou seja, próxima a uma passagem dela pelo meridiano local, Ptolomeu conseguiu determinar o ângulo de paralaxe da Lua, como veremos na seção seguinte.

8. A Determinação da Paralaxe da Lua

No fim do capítulo V do *Almagesto*, Ptolomeu apresentou sua discussão acerca da determinação da paralaxe lunar. Como vimos na seção 2, a paralaxe é um problema que surge ao observar astros relativamente próximos

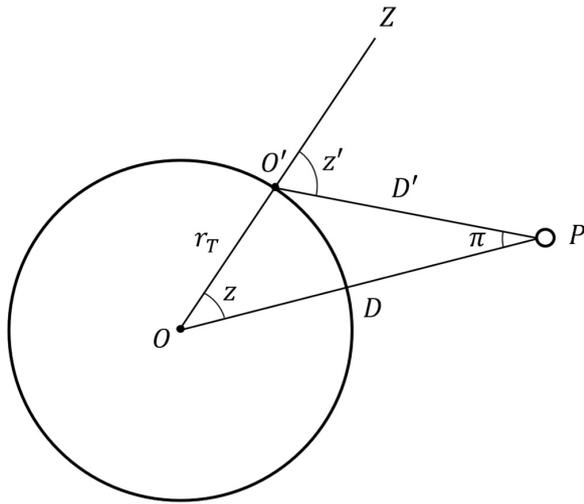


Figura 9: A paralaxe da Lua.

a Terra, como é o caso da Lua, e que faz com que a posição dela seja ligeiramente diferente da posição real, ou da sua posição em relação a um observador no centro da Terra. Para compreender as observações de Ptolomeu e seus cálculos vamos considerar a Figura 9. Nela temos dois observadores, O localizado no centro da Terra e O' localizado sobre a superfície do planeta. Os dois observam a Lua no ponto P ao mesmo tempo. A distância entre o observador O' e o centro da Lua é D' , e a distância entre o centro da Terra (de raio r_T) e o centro da Lua é D . Enquanto a distância zenital z é medida em relação a O , z' é medida pelo observador O' , e as duas se relacionam com a paralaxe π pela equação:

$$\pi = z' - z \tag{72}$$

Assim, segundo [10, p. 233], podemos dizer que:

O modelo lunar fornece posições geocêntricas da Lua que são independentes da localização do observador na superfície da Terra. Assim, a diferença entre a distância zenital observada e calculada da Lua em um círculo vertical, ou seja, um grande círculo perpendicular ao horizonte, é uma medida direta da paralaxe lunar.

A observação de Ptolomeu se deu no dia 1 de outubro de 135 EC, às 5h50min depois do meio-dia (mesma data utilizada como exemplo na seção anterior). O ângulo z' é medido diretamente por observação e o valor obtido por Ptolomeu foi:

$$z' = 50^\circ 55' \tag{73}$$

Já o ângulo z é determinado a partir da teoria lunar de Ptolomeu, que utiliza apenas parâmetros geocêntricos. Na data e hora da observação, a configuração da posição P da Lua, da eclíptica S e do equador E ,

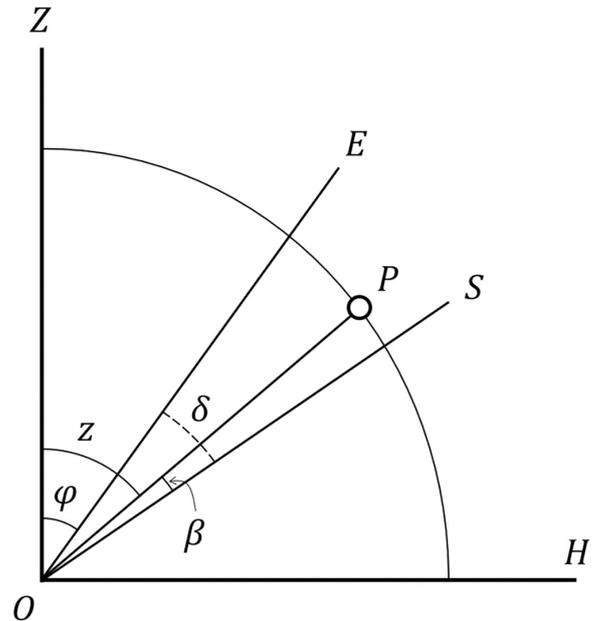


Figura 10: Configuração do céu durante a passagem da Lua pelo meridiano local na data da observação.

é mostrada na Figura 10. A elongação⁹ da Lua era $\lambda_{\text{Lua}} - \lambda_{\text{Sol}} = 273^\circ 11' 17'' - 185^\circ 28' = 87^\circ 43' 17''$, o que nos permite encontrar a partir da *tabela de declinação* do Almagesto [5, p. 72], que relaciona um arco sobre a eclíptica com um arco sobre o meridiano, a declinação do ponto eclíptico δ (ou seja, o ângulo do arco formado entre o ponto meridiano da eclíptica e o equador). Podemos calcular os valores desta tabela a partir de trigonometria esférica em um processo semelhante ao que nos levou a equação (66), o que vai resultar em:

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varepsilon \cdot \text{sen } (\lambda_{\text{Lua}} - \lambda_{\text{Sol}}) \tag{74}$$

E uma vez que conhecemos a elongação da Lua na data e a obliquidade da eclíptica ($\varepsilon = 23^\circ 51'$), podemos obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \delta &= \text{arcsen} [\text{sen } (23^\circ 51') \cdot \text{sen } (87^\circ 43' 17'')] \\ &= 23^\circ 49' 48'' \quad [23^\circ 49'] \end{aligned} \tag{75}$$

Dessa forma, sendo a latitude local considerada por Ptolomeu $\varphi = 30^\circ 58'$, e a partir de (71) e (75), podemos obter a distância zenital verdadeira (ou geocêntrica) da Lua:

$$z = \varphi + \delta - \beta = 49^\circ 48' 23'' \quad [49^\circ 48'] \tag{76}$$

E substituindo (73) e (76) em (72), chegamos ao ângulo de paralaxe obtido por Ptolomeu:

$$\pi = 1^\circ 6' 37'' \quad [1^\circ 7'] \tag{77}$$

⁹ Ângulo entre a posição do Sol e a posição da Lua.

No entanto, este valor contém um erro significativo, causado pelo valor errado da latitude local utilizada por Ptolomeu (o valor correto seria $\varphi = 31^{\circ}13'$) e por imprecisões do instrumento que ele utilizou, sendo, portanto, o valor correto igual a $\pi = 0^{\circ}44'$ [14].

9. A Determinação da Distância da Terra à Lua

Tendo obtido o ângulo de paralaxe π , Ptolomeu foi capaz de determinar a distância entre o centro da Terra e o centro da Lua no instante da medida (1 de outubro de 135 EC, às 5h50min depois do meio-dia) em termos do raio terrestre. Consideremos novamente a Figura 9. Aplicando a lei dos senos ao triângulo $\Delta OPO'$, obtemos o seguinte:

$$\frac{D}{\sin z'} = \frac{r_T}{\sin \pi} \tag{78}$$

Onde D é a distância entre os centros da Terra e da Lua e r_T o raio da Terra. Se substituirmos os valores de (73) e (77) em (78), o resultado é a distância da Terra à Lua em termos do raio terrestre:

$$D = \frac{\sin(50^{\circ}55')}{\sin(1^{\circ}6'37'')} \cdot r_T = 40; 3, 35 r_T \quad [39; 45 r_T] \tag{79}$$

Mas, como vimos, esta distância também pode ser obtida utilizando a equação (51), do terceiro modelo lunar, que, a partir do raio do epiciclo $r = 5; 15$ e dos parâmetros anteriormente calculados para a data, (58) e (60), resulta em:

$$D = \sqrt{[(40; 3, 10) + (5; 15)\cos(270^{\circ}1'5'')]^2 + [(5; 15) \sin(270^{\circ}1'5'')]^2} = 40; 23, 49 \quad [40; 25] \tag{80}$$

A distância dada por (80) foi calculada com base na convenção $R = 60$, sendo R o raio do deferente no primeiro modelo lunar de Ptolomeu. Portanto, temos agora uma forma de escrever todas as distâncias lunares obtidas por Ptolomeu em termos do raio terrestre a partir da seguinte relação:

$$\frac{D(r_T)}{D(R = 60)} = \frac{39; 45}{40; 25} \approx \frac{59}{60} \tag{81}$$

Assim, a partir da relação (81), podemos montar os valores da Tabela 2, com os resultados das distâncias considerando $R = 60$ e em termos do raio da Terra r_T .

Utilizando o *software Stellarium* [23], podemos verificar a distância D na data da observação de Ptolomeu, o que nos leva ao valor $D = 59; 51 r_T$, com $r_T = 6371$ km. Este resultado difere do valor obtido por ele, pois o ângulo de paralaxe encontrado estava incorreto. Caso tivesse encontrado o valor correto da paralaxe ($\pi = 0^{\circ}44'$),

Tabela 2: Distâncias determinadas por Ptolomeu [5].

Distâncias	Considerando $R = 60$	Em termos de r_T
r	5; 15	5; 10
e	10; 19	10; 8
$r - e$	49; 41	48; 52
D_{\max}	65; 15	64; 10
D_{\min}	34; 7	33; 33

a distância D encontrada seria muito mais próxima a distância obtida através do *Stellarium*. Além disso, as distâncias médias no perigeu e apogeu determinadas por métodos modernos são, respectivamente, $D_{\min} = 56; 55 r_T$ e $D_{\max} = 63; 38 r_T$, o que corresponde a uma variação de aproximadamente 12%, muito menor que a variação prevista na teoria lunar de Ptolomeu. Nem mesmo as posições onde a Lua se encontraria no perigeu e apogeu, que segundo Ptolomeu ocorreriam sempre nas quadraturas e sizígias, respectivamente, foram previstas de maneira correta.

10. Considerações e Discussões Finais

O uso de deferentes e epiciclos foi uma tentativa realizada pelos astrônomos matemáticos da antiguidade de manter válido o axioma platônico e, ao mesmo tempo, explicar com precisão a posição dos astros. A inclusão do equante e do excêntrico na teoria ptolomaica foi realizada com o intuito de fazer ajustes mais precisos nas posições do Sol, da Lua e dos planetas.

O *Almagesto* é, além de um livro que influenciou a Astronomia por séculos, também um grande tratado matemático de importância e alcance semelhantes no desenvolvimento posterior da Matemática de sua época (de fato, o nome original da obra era, em latim, *Syntaxis Mathematica*). Nele Ptolomeu realizou cálculos trigonométricos e demonstrações geométricas que formaram a base da matemática de toda sua obra e influenciaram astrônomos-matemáticos de muitas gerações posteriores. Utilizando o sistema de numeração sexagesimal babilônico e baseando seus cálculos dos lados de triângulos no uso de arcos e cordas, ferramentas matemáticas equivalentes a funções trigonométricas elementares modernas, Ptolomeu criou um complexo sistema matemático capaz de explicar, até certa medida, a posição dos astros no céu. Como exemplo, ao invés de utilizar a função tangente (desconhecida na época), Ptolomeu aplicava o teorema de Pitágoras para determinar o comprimento da hipotenusa do triângulo estudado. O fato de usar estas ferramentas fez com que fossem necessários um número maior de cálculos e computações do que aquele que seria necessário utilizando funções e identidades trigonométricas, o que faz com que os modelos ptolomaicos se tornem ainda mais difíceis de decifrar. No mundo Ocidental, a utilização de funções trigonométricas pelos astrônomos só começou a ocorrer a partir do século XV [9], sobre influência da Matemática e Astronomia dos árabes:

[...] Quando os europeus voltaram a se ocupar com a ciência, encontraram a astronomia praticamente no mesmo estado em que Ptolomeu a deixara no século II. Mas os árabes colocaram uma ferramenta poderosa em suas mãos, transformando o cálculo das cordas de Ptolomeu no cálculo dos senos ou na trigonometria, e assim influenciaram o avanço da astronomia de uma maneira muito importante [9, pp. 279–280].

Considerando que o principal objetivo do modelo lunar ptolomaico era salvar as aparências das posições da Lua, podemos dizer que a sua teoria foi razoavelmente bem-sucedida durante um longo tempo. No entanto, em relação a determinação da sua distância entre o centro da Terra e o da Lua a teoria ptolomaica não obteve o mesmo êxito. Depois de Ptolomeu, outras tentativas de determinar esta distância foram realizadas, sendo que, atualmente, o método mais preciso consiste em determinar o intervalo de tempo entre a emissão de um *laser* e recepção do seu sinal refletido em espelhos colocados na superfície da Lua pelas missões Apollo [25], no fim da década de 1960 e início da década de 1970.

Além da discrepância na variação das distâncias que deveria resultar em uma alteração muito maior no tamanho aparente da Lua, o sistema de epiciclos de Ptolomeu tinha ainda outra objeção, levantada por astrônomos posteriores a ele. Segundo Aristóteles [3, pp. 119–121],

[...] Como então nem o movimento de ambos [os astros e o céu inteiro] nem aquele dos astros isoladamente revelam-se razoáveis, só nos resta concluir pelo movimento dos círculos e o repouso dos astros que, não possuindo movimento próprio, são movidos com os círculos nos quais estão fixamente instalados. É a única forma de não acarretar o *irracional*. [...] Por outro lado, outra coisa que se evidencia é os astros não executarem um movimento de revolução, posto que esta implica necessariamente rotação, ora, tudo o que a *Lua* nos exhibe é o que denominamos *face* [grifos do autor].

Assim, Aristóteles acreditava que os astros não poderiam ter um movimento próprio de rotação, sendo seu movimento resultado apenas do movimento do círculo no qual estava posto. Um exemplo disso era a Lua, que sempre mantinha a mesma face voltada para a Terra, o que podia ser inferido pela observação de suas manchas, e da mesma forma os planetas deveriam ter esta mesma característica [26]. Baseados nesta concepção aristotélica, alguns dos sucessores de Ptolomeu acreditavam que o uso de epiciclos era incompatível com o fato de a Lua sempre mostrar a mesma face para a Terra, pois, se a Lua era transportada por um epiciclo ela deveria manter sua face sempre voltada para o centro deste, o que faria com que apresentasse uma face diferente

quando vista da Terra em posições diferentes no epiciclo. No entanto, nenhuma das dificuldades levantadas contra a teoria lunar foi considerada relevante por Ptolomeu, visto que “ele considerava sua teoria simplesmente um dispositivo para calcular a latitude e longitude da Lua, e não um modelo físico da realidade” [22, p. 75].

O sistema de epiciclos, equantes, deferentes e excêntricos foi tão bem-sucedido em seu objetivo de descrever os céus que dominou a astronomia matemática até o tempo de Copérnico, tendo inclusive este utilizado um sistema semelhante, porém sem o uso do equante, na sua obra principal, *As Revoluções dos Orbes Celestes*, conhecida também pelo nome abreviado em latim, *De Revolutionibus* [27]. O sistema ptolomaico se manteve aceito por um longo período, sofrendo apenas algumas pequenas correções em seus parâmetros no decorrer dos anos pois, como o seu sistema não estava correto, com o tempo ele foi se degenerando, fazendo com que se tornasse necessário recalcular a velocidade angular média dos astros, a posição do excêntrico, o tamanho do deferente e do epiciclo etc., de forma a permitir que o modelo ainda funcionasse. As dificuldades encontradas por Ptolomeu para descrever o movimento da Lua só seriam justificadas a partir da inserção da dinâmica do movimento dos corpos na Astronomia, através do trabalho de Isaac Newton, onde ficou claro que a Lua tinha um movimento tão difícil de ser entendido, quando comparado aos dos planetas, porque ela está sobre forte influência gravitacional de dois corpos, a Terra e o Sol, enquanto os planetas sofrem influência quase inteiramente apenas do Sol [20].

Os modelos matemáticos de Ptolomeu tiveram grande impacto na Astronomia durante os séculos que se seguiram à escrita do *Almagesto*, sendo utilizados por astrônomos Árabes e medievais, e considerados a grande referência em astronomia matemática até a aceitação da teoria de Copérnico, que no *De Revolutionibus* apresenta e crítica o modelo ptolomaico. Apenas a partir das observações telescópicas de Galileu e da descoberta das leis de Kepler é que o sistema ptolomaico se tornou insustentável, pois não conseguia explicar de forma satisfatória muitas das novas observações que estavam sendo realizadas, como foi o caso das fases de Vênus, nem ser tão preciso quanto era o modelo kepleriano de órbitas elípticas.

Referências

- [1] H.A. Barros-Pereira, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 2602 (2011).
- [2] P. Duhem, Cadernos de História e Filosofia da Ciência **3**, 1 (1984).
- [3] Aristóteles, *Do Céu* (Edipro, São Paulo, 2014), 1 ed.
- [4] A.M. Velásquez-Toribio e M. Oliveira, Revista Brasileira de Ensino de Física **41**, e20180096 (2018).
- [5] G.J. Toomer, *Ptolemy's Almagest* (Princeton University Press, Princeton, 1998).

- [6] N.M.L. Costa, *Educação Matemática em Revista* **10**, 60 (2003).
- [7] T.S. Kuhn, *A Revolução Copernicana* (Edições 70, Lisboa, 2020).
- [8] O. Neugebauer, *A history of ancient mathematical astronomy* (Springer, New York, 1975).
- [9] J.L.E. Dreyer, *A history of astronomy from Thales to Kepler* (Dover, New York, 1953).
- [10] N.M. Swerdlow e O. Neugebauer, *Mathematical Astronomy in Copernicus' De Revolutionibus: In Two Parts* (Springer-Verlag, Nova York, 1984).
- [11] F.R. Stephenson, *Historical eclipses and Earth's rotation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [12] J.M. Steele, *Centaurus* **42**, 89 (2000).
- [13] V.M. Petersen, *Centaurus* **14**, 142 (1969).
- [14] O. Pedersen, *A Survey of the Almagest: with annotation and new commentary by Alexander Jones* (Springer, Nova York, 2010).
- [15] Euclides, *Os Elementos* (Editora Unesp, São Paulo, 2009).
- [16] S.M. Mozaffari, *Archive for History of Exact Sciences* **68**, 67 (2014).
- [17] H. Thurston, *Early astronomy* (Springer, Nova York, 1996).
- [18] J. Shah, *Annals of Mathematical Sciences and Applications* **3**, 7 (2018).
- [19] R.H. van Gent, *Almagest Ephemeris Calculator (2016)*, disponível em: https://webspace.science.uu.nl/~gent0113/astro/almagestephemeris_main.htm#calendar, acessado em 13/02/2022.
- [20] S. Weinberg, *Para explicar o mundo: a descoberta da ciência moderna* (Companhia das Letras, São Paulo, 2015).
- [21] G.L. Recio e C.C. Carman, *Journal for the History of Astronomy* **49**, 401 (2018).
- [22] C.M. Linton, *From Eudoxus to Einstein: a history of mathematical astronomy* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [23] Stellarium (2022), <http://www.stellarium.org/pt/>, acessado em 14/02/2022.
- [24] G. Van Brummelen, *Heavenly mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry* (Princeton University Press, Princeton, 2013).
- [25] J. Faller, I. Winer, W. Carrion, T.S. Johnson, P. Spadin, L. Robinson, E.J. Wampler e D. Wieber, *Science* **166**, 99 (1969).
- [26] E. Grant, *History of Science* **25**, 335 (1987).
- [27] N. Copérnico, *As Revoluções dos Orbes Celestes* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984), 3 ed.