

## Three-dimensional analysis of two-pile caps

### *Análise numérica tridimensional de blocos sobre duas estacas*



T.E.T. BUTTIGNOL<sup>a</sup>  
butignol@hotmail.com

L.C. ALMEIDA<sup>b</sup>  
almeida@fec.unicamp.br

#### Abstract

This paper compares the results between a non-linear three-dimensional numerical analysis of pile caps with two piles and the experimental study conducted by Delalibera. It is verified the load-carrying capacity, the crack pattern distribution, the principal stress in concrete and steel, the deflection and the fracture of the pile cap. The numerical analysis is executed with the finite-element software ATENA 3D, considering a perfect bond between concrete and steel. The numerical and experimental results are presented and have demonstrated a good approximation, reasserting the results of the experimental model and corroborating the theory.

**Keywords:** pile caps, finite elements, reinforced concrete, foundation.

#### Resumo

Neste artigo é realizado um estudo comparativo entre o comportamento experimental de blocos de concreto armado apoiados sobre duas estacas, a partir de modelo experimental de Delalibera, e o obtido a partir de análise numérica tridimensional não-linear. A comprovação de resultados é feita observando-se a força última, o panorama de fissuração, o fluxo de tensões atuantes no concreto e no aço, as deformações e o padrão de ruína. A simulação numérica do comportamento estrutural do bloco de concreto armado é realizada com o emprego do programa computacional de elementos finitos ATENA 3D, considerando a aderência perfeita entre as barras de aço da armadura e o concreto. Os resultados numéricos e experimentais são apresentados e quando comparados apresentam uma boa aproximação, comprovando os fundamentos teóricos e os resultados experimentais.

**Palavras-chave:** blocos sobre estacas, elementos finitos, concreto armado, fundações.

<sup>a</sup> Mestre em Estruturas pela Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, butignol@hotmail.com, Rua Capitão José de Sousa, 118 – Centro – Campinas-SP - Brasil

<sup>b</sup> Professor Doutor do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, almeida@fec.unicamp.br, Campus Zeferino Vaz - Av. Albert Einstein, 951 - Campinas-SP - Brasil

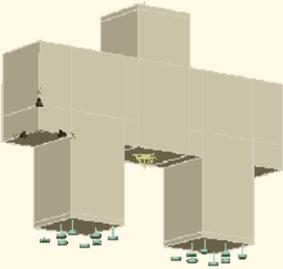
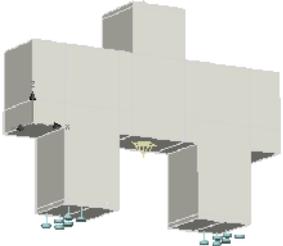
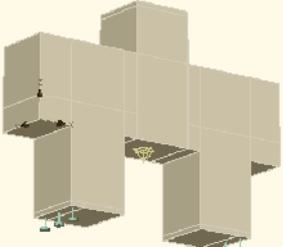
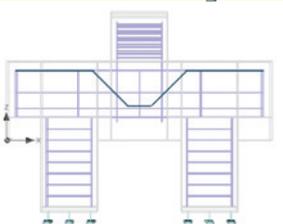
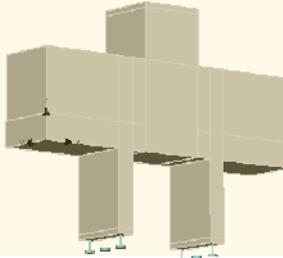
## 1. Introdução

Os blocos sobre estacas constituem-se em um importante elemento estrutural de ligação e transferência de esforços da superestrutura para a infra-estrutura. Nas últimas décadas, houve um grande avanço nos estudos sobre o comportamento estrutural dos blocos, com refinamento das técnicas de análise a partir da introdução da computação e do Método de Elementos Finitos (MEF). A teoria atual de blocos sobre estacas se deve aos trabalhos ori-

ginalmente desenvolvidos por Blévo & Frémy [3] que, em 1967, publicaram um estudo que se tornou referência para todos os trabalhos posteriores e serviu de base para a formulação da maioria das normas sobre o assunto, perdurando até hoje.

A partir dos resultados obtidos em laboratório, Blévo & Frémy [3] elaboraram a teoria de bielas e tirantes para explicar o comportamento estrutural de blocos sobre estacas. Foi observado que a ruína da maioria dos modelos de blocos sobre estacas analisados ocorria por fendilhamento do concreto (abertura de fissuras para-

**Tabela 1 – Modelos numéricos analisados**

<b>Modelo 1</b>	Bloco com restrição total ao deslocamento vertical na base das estacas	
<b>Modelo 2</b>	Bloco com 50% de restrição ao deslocamento vertical na base das estacas	
<b>Modelo 3</b>	Bloco com 25% de restrição ao deslocamento vertical na base das estacas	
<b>Modelo 4</b>	Bloco com armadura de fendilhamento	
<b>Modelo 5</b>	Bloco com redução da largura das estacas	

**Tabela 2 – Propriedades do concreto**

	Bloco sobre estacas	Estacas e pilares
Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,2	0,2
Energia Específica de Fratura ( $G_F$ )	79 J/m <sup>2</sup>	116 J/m <sup>2</sup>
Tension Stiffening Factor ( $c_{ts}$ )	0,40	0,40
Módulo de Elasticidade ( $E_c$ )	30.320 MPa	41.060 MPa
Resistência Característica à Compressão ( $f_{ck}$ )	40 MPa	73 MPa
Resistência Última à Tração do Concreto ( $f_{tk}$ )	3,2 MPa	4,6 MPa

lelas ao fluxo de tensões principais de compressão como resultado da ação de esforços de tração perpendiculares a estas no interior da estrutura), com formação de várias fissuras antes da ruína. Em relação à ancoragem e aos ganchos, foi comprovado que o escorregamento das barras de aço sem ganchos e com mossas ocorreu somente após a ruptura da biela.

Mautoni [4] constatou que grande parte dos blocos sofria ruptura frágil por fendilhamento das bielas comprimidas na zona nodal e que antes da ruína houve formação de fissuras paralelas às bielas, fato que também foi constatado nos ensaios de Clarke [5] e de Sabnis & Gogate [6].

Nos estudos de Adebar et al. [7] observou-se a eficácia do método de bielas e tirantes. Foi comprovada a ruína dos blocos por fendilhamento ocasionada pela expansão das tensões de compressão (esmagamento do concreto e aumento da fissuração) e posterior escoamento da armadura dos tirantes.

Delalibera & Giongo [8] demonstraram que nos modelos de blocos analisados houve formação de fissuras paralelas às bielas com ruína por fendilhamento e esmagamento do concreto nos nós junto ao pilar (C-C-C) e às estacas (T-C-C). Ademais, os autores consideraram ser correto considerar que metade da seção transversal do pilar receba metade da força aplicada pelo pilar nos blocos.

A análise da aderência das barras de aço conduzida por Delalibera [1] mostrou que não há escorregamento da armadura devido à ação favorável da tensão de compressão atuante na biela que reduz o valor da força de tração e leva a uma redução significativa nas deformações das barras de aço na região nodal inferior.

Sobre o dimensionamento de blocos sobre estacas, é importante mencionar que, segundo Souza et. al. [9], ainda não há um procedimento geral padrão aceito para execução de projetos de blocos sobre estacas. Apesar da existência de muitos modelos de cálculo, há grande variação entre eles. A maioria das normas recomenda a utilização de modelos de vigas-parede, flexão ou treliça. No entanto, Souza et. al. [9] demonstraram que muitos blocos dimensionados para o rompimento à flexão acabaram por apresentar ruptura frágil por cisalhamento. Os autores também atestaram que os blocos são submetidos a uma complexa distribuição tridimensional de deformações não-lineares denominadas de região D. Em geral as regiões D se manifestam a partir de perturbações de ordem estática (causada pela presença de cargas) e geométrica (causada por mudanças bruscas na geometria). No caso de blocos sobre estacas, todo o bloco se comporta como uma região D devido à concentração de tensões tanto na seção superior como na seção inferior, provocas pelos encontros pilar-bloco e estacas-bloco.

Cabe destacar que, nas duas últimas décadas, segundo Su & Chandler [10], o modelo de bielas e tirantes tem sido um dos métodos mais populares e racionais de análise de estruturas não submetidas à flexão. E as diretrizes de cálculo principais foram fornecidas por normas de diversos países tais quais a canadense (CSA Standard A23.3-94), a australiana (AS3600-1994), a neo-zeolandeza (NZS3101:Part2:1995) e o código internacional CEB-FIP:1990. A despeito disso, cada uma das normas listadas acima possui os seus próprios fatores de segurança em relação aos carregamentos e materiais, além de diferentes metodologias de dimensionamento. Especificamente sobre a NBR-6118:2007 [11], a norma apenas faz menção pela preferência do modelo de bielas e tirantes tridimensional em relação aos modelos lineares e não tridimensionais.

### 1.1 Justificativa

Como visto, as pesquisas tem progredido para um consenso de que o método de bielas e tirantes é o mais correto e realista para representar o comportamento estrutural dos blocos sobre estacas. Não obstante, ainda há dissenso na literatura, por exemplo, sobre a conformação das bielas de compressão e a distribuição das tensões no interior da peça. Delalibera [1] afirma que há “falta de conhecimento da forma geométrica do fluxo de tensões que formam as bielas de compressão em blocos sobre estacas submetidas a forças centradas e excêntricas” e que “a análise de modelos numéricos de blocos rígidos demonstrou que a distribuição de forças nas estacas não é uniforme, devendo ser adaptadas a hipóteses utilizadas”.

Dessa forma, este artigo tem como objetivo a corroboração, através de análise numérica não-linear, do comportamento estrutural de blocos de concreto armado sobre duas estacas a partir de comparação com resultados experimentais obtidos por Delalibera [1]. A comparação de resultados entre os modelos numéricos e experimentais tem o mérito de expor as discrepâncias e convergências existentes de modo a justificar os estudos através de programas baseados no Método de Elementos Finitos. Além disso, contribuem para comprovar os fundamentos teóricos dos blocos sobre estacas.

São analisados o panorama de fissuração com o estágio inicial de formação de fissuras no Estádio II e a sua propagação no interior da peça, a distribuição de tensões e deformações no bloco e na armadura, e, a força última e o modo de ruína por meio do fendilhamento do concreto e esmagamento das bielas nas regiões nodais.

## 2. Metodologia de análise

Foi realizada a modelagem numérica de cinco blocos de concreto armado apoiados sobre duas estacas, como mostra a Tabela 1. Para tanto, foi utilizado o programa de elementos finitos ATENA 3D [2] de propriedade da empresa Cervenka Consulting. O bloco sobre estacas analisado é oriundo dos trabalhos de Delalibera [1]. Nos cinco blocos modelados foram mantidas as configurações originais da geometria do bloco, da armadura e das características dos materiais do modelo experimental B35P25E25e0 do trabalho de Delalibera [1].

No modelo 1 foram impedidos todos os deslocamentos verticais dos nós da base das estacas (Tabela 1, modelo 1), e nos modelos 2 e 3 foram impedidos respectivamente 50% e 25% desses deslocamentos, conforme mostrados na Tabela 1. A redução da área de vinculação dos apoios das estacas teve como função precípua o estudo de sua influência na rigidez dos blocos.

O modelo 4 é semelhante ao bloco do modelo 1 com o acréscimo de uma armadura de fendilhamento em forma de cavalete, como pode ser observado na Tabela 1. O objetivo deste reforço é de se observar a sua contribuição na capacidade portante do bloco. Outro aspecto analisado foi o da concentração de tensões de compressão das bielas na região da estaca mais próxima do pilar. Para tanto, foi modelado um bloco com redução da largura da estaca (Tabela 1, modelo 5) de modo a se observar o comportamento estrutural da peça.

### 2.1 Programa computacional

A análise numérica foi realizada com o auxílio do programa computacional ATENA 3D [2]. A sua arquitetura básica de funcionamento é baseada na teoria de elementos finitos e na análise não-linear de estruturas de concreto armado.

O programa simula o comportamento real das estruturas através de análises lineares e não-lineares. A força máxima atuante é definida pela integral no tempo de incrementos de forças, com aplicação dos Métodos Newton-Rhapson ou Arc-Length. Para a determinação do comportamento estrutural da peça deformada são utilizadas as formulações de Lagrange ou de Euler.

### 2.2 Especificação dos materiais

Para o concreto é adotado um modelo de fratura plástico como descrito por Cervenka [2] e mostrado na Tabela 3. As principais características do material são apresentadas na Tabela 2.

O efeito denominado *tension stiffening* é o valor limite da tensão à tração do concreto que contribui para evitar a propagação de fissuras, aumentando a rigidez estrutural, e é definido a partir da determinação do fator *tension stiffening factor* ( $c_{ts}$ ).

No regime elástico, o concreto obedece à Lei de Hooke. Já no regime de tensão pós-fissuração, o plano de ruptura da estrutura é determinado pelos critérios de plasticidade (compressão) de Drucker-Prager e de ruptura (tração) de Rankine. A Energia Específica de Fratura é determinada a partir da equação 1. Ela é um parâmetro essencial para a simulação numérica de estruturas de concreto e corresponde à taxa de energia de deformação potencial armazenada no sistema que é liberada com a abertura e a propagação de fissuras. O seu valor compreende a área interna do gráfico tensão *versus* abertura de fissuras mostrado na Tabela 3 que descreve o comportamento do concreto no regime de pós-fissuração (comportamento não-linear).

$$G_F = 0,000025 \cdot f_t^{ef} \text{ [MN/m]} \quad (1)$$

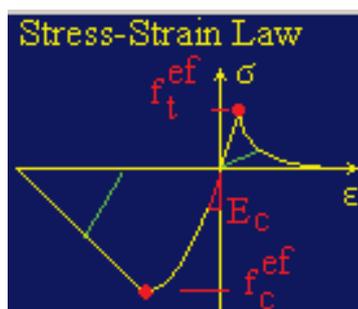
Para as barras de aço foi adotado um comportamento elásto-plástico perfeito, com as propriedades listadas na Tabela 4. O critério de escoamento do aço é baseado nas definições de von Mises.

Por último, para as chapas de aço dos apoios das estacas foi considerado um material elástico isotrópico como definido na Tabela 5.

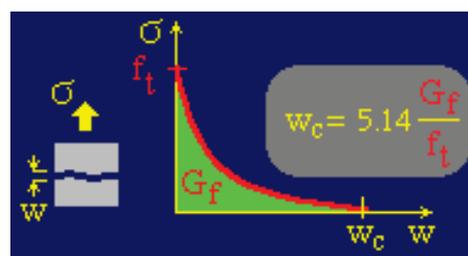
### 2.3 Modelo geométrico e disposição das armaduras

A Figura 1 mostra as características geométricas dos modelos utilizados. A disposição das armaduras é mostrada nas Figuras 1, 2, 3 e 4.

Tabela 3 – Leis constitutivas do concreto (Cervenka (2))



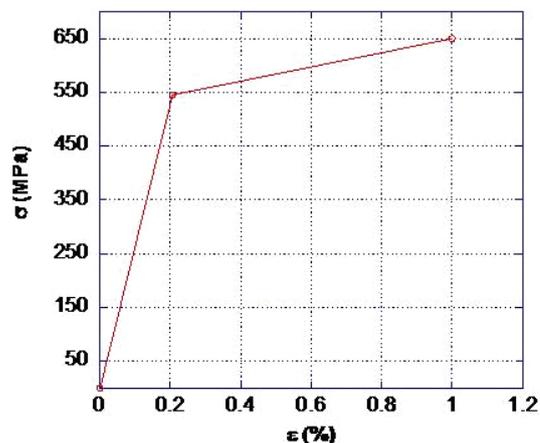
Lei constitutiva - tensão *versus* deformação



Curva tensão *versus* abertura de fissuras

Tabela 4 - Propriedades da armadura

Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,3
Módulo de Elasticidade ( $E_s$ )	210 GPa
Resistência Característica de Escoamento ( $f_{yk}$ )	545 MPa
Resistência Última do Aço ( $f_{tk}$ )	650 MPa
Escoamento da armadura ( $\epsilon_{yd}$ )	0,207%
Deformação última ( $\epsilon_{lim}$ )	1%



Para o bloco sobre duas estacas com armadura de fendilhamento, foram utilizadas duas barras de aço com diâmetro de 16 mm dispostas em forma de cavalete, conforme recomendação de Delalibera [1]. A armadura de fendilhamento foi dimensionada conforme os requisitos de cálculo propostos por [1] de acordo com as equações 2, 3 e 4.

$$A_{sf,min} = \frac{R_{ct,min}}{f_{yd}} \quad (2)$$

$$R_{ct,min} = h_f \cdot h_y \cdot f_{ctk,inf} \quad (3)$$

$$h_f = \sqrt{\left(\frac{L_{est}}{2} + \frac{a_x}{4}\right)^2 + d^2} \quad (4)$$

Onde:

$R_{ct,min}$ : força de tração mínima;

$h_f$ : dimensão vertical – modelo de bielas e tirantes (Delalibera [1]);

$h_y$ : seção transversal do pilar;

Tabela 5 - Propriedades das chapas de aço

Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,3
Módulo de Elasticidade ( $E_s$ )	210 GPa

$f_{ctk,inf}$ : valor inferior da resistência característica à tração do concreto;

$L_{est}$ : distância entre os eixos das estacas;

$A_x$ : dimensão da estaca na direção considerada.

#### 2.4 Método de análise

O critério de análise adotado foi o de Newton-Rhapson, com carregamento pontual no centro do pilar e incrementos de força a cada 25 kN. Além disso, foi utilizada uma malha de elementos finitos hexaédrica para o bloco, as estacas e o pilar, como mostrado na Figura 5. Para as chapas de aço foi definida uma malha tetraédrica. Os apoios na base das estacas sofreram restrição total (100%) e parcial (50% e 25%) ao movimento vertical. Nas faces de contato entre as estacas e o bloco e entre o pilar e o bloco foram adotados elementos de interface 3D, baseados nos critérios de Mohr-Coulomb, com as propriedades da Tabela 6.

### 3. Considerações sobre os modelos numéricos e experimental

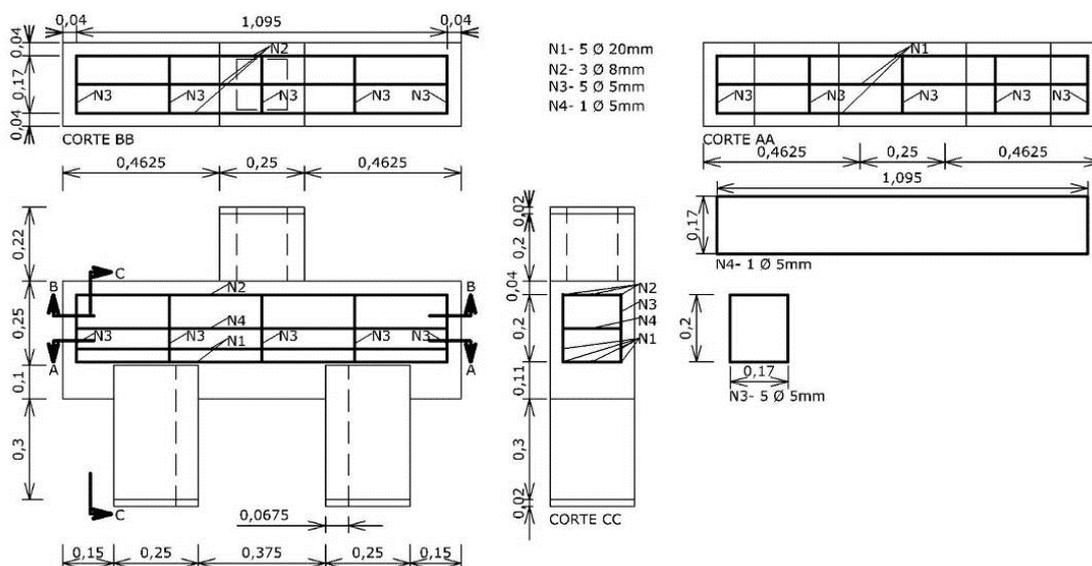
#### 3.1 Divergências entre os modelos numéricos e experimental

Um dos pontos mais discrepantes observados nas análises numéricas em relação ao modelo experimental foi o da rigidez estrutural dos blocos sobre estacas que foi de sobremaneira acentuada nos modelos numéricos. Este fato demonstra a complexidade inerente dos ensaios em laboratório.

Delalibera [1] aponta três motivos principais para esta diferença de rigidez, quais sejam, a acomodação dos protótipos no início do ensaio, a suposição de aderência perfeita entre as barras de aço e o concreto nos modelos numéricos, e, a ligação perfeita entre o bloco e as estacas.

Em relação ao primeiro ponto, [1] cita a acomodação do bloco no início do ensaio observada na curva força versus deslocamento. Em relação à aderência perfeita dos modelos, o autor não con-

**Figura 1 - Detalhamento da geometria e armadura (estribos e tirantes) dos blocos sobre estacas**



firmou a hipótese em testes preliminares realizados. O terceiro motivo, segundo [1], é o que provavelmente mais colaborou para o aumento da rigidez da estrutura, visto que houve um descolamento das faces das estacas sobre a face bloco durante o ensaio experimental. Dessa forma, [1] sugere a utilização de elementos de contato para as ligações entre os elementos estruturais.

Em face disto, todas as modelagens numéricas foram realizadas com elementos de contato nas interfaces do bloco com o pilar e as estacas. Além disso, foi reduzida a restrição imposta à movimentação das estacas para observar o comportamento da estrutura quanto à rigidez.

A diminuição da área dos apoios na base das estacas permitiu que o bloco tivesse um maior deslocamento e apresentasse maiores deformações. Isto está de acordo com as observações de Ramos

[12] que, através de análise computacional, mostrou que “o comportamento estrutural do bloco é fortemente influenciado pelo tipo de vinculação das estacas e pela rigidez do bloco”.

### 3.2 Resumo dos resultados experimentais de Delalibera [1]

Os resultados de Delalibera [1] demonstram que os blocos resistiram até o início do processo de esmagamento do concreto, quando se inicia a formação de um plano de ruptura ao longo da altura da peça originado pela ação da força cortante. A ruína ocorreu por esmagamento do concreto na região nodal (superior ou inferior) e por fendilhamento do bloco ao longo das bielas comprimidas. Na maioria dos casos, a ruptura do concreto ocorreu antes do escoamento da armadura.

As deformações dos tirantes não foram constantes ao longo das barras de aço dos tirantes, ocorrendo redução significativa nas regiões nodais inferiores. E a deformação nas extremidades das barras dos tirantes foi praticamente nula, independentemente da existência de ganchos de ancoragem.

Nos modelos ensaiados com armadura de fendilhamento (barras de aço dispostas perpendicularmente às bielas com a função de absorver as tensões de tração e resistir ao fendilhamento do concreto) proposta por [1], houve aumento da resistência do bloco, que apresentou deformações intensas na seção que atravessa as bielas.

Todos os modelos apresentaram comportamento semelhante, com a formação da primeira fissura na zona nodal inferior, junto à estaca, e sua propagação até a zona nodal superior, junto ao pilar. As fissuras se desenvolveram ao longo das bielas com formação nítida de um plano de ruptura.

Por meio do fluxo de tensões principais de compressão, [1] constatou que houve maior concentração de tensões logo abaixo do pilar e nas seções das estacas mais afastadas das bordas do bloco.

**Figura 2 - Detalhamento da armadura de fendilhamento do modelo 4**

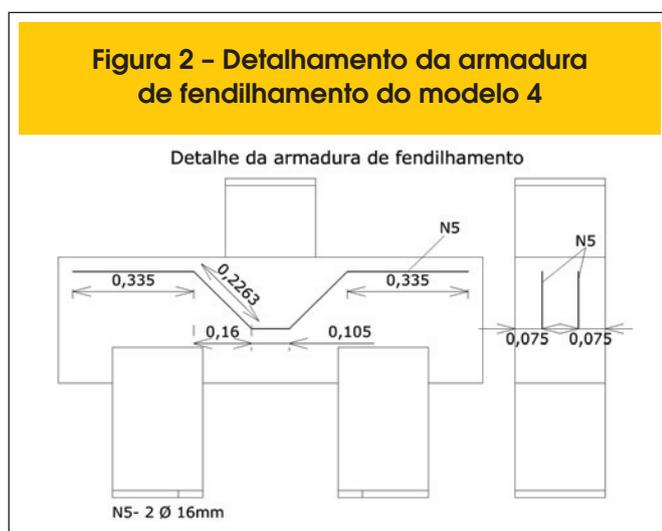


Figura 3 - Detalhamento da armadura das estacas - (a) modelos 1, 2, 3 e 4; (b) modelo 5

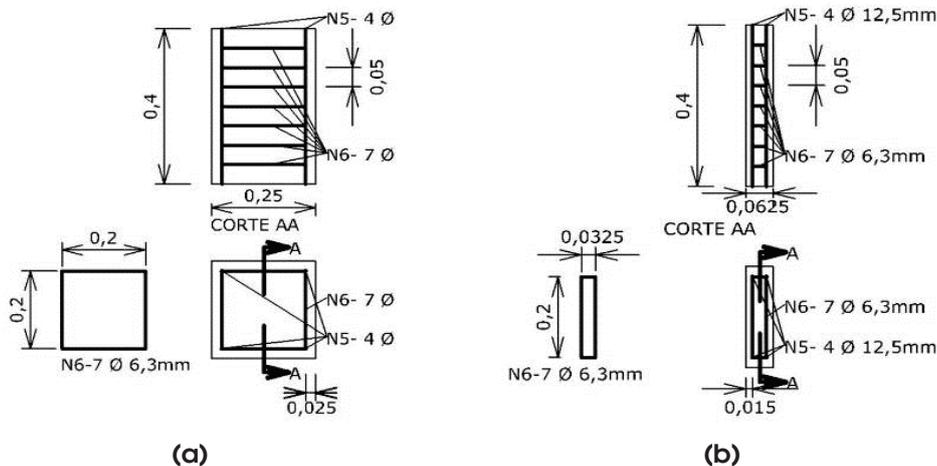


Figura 4 - Detalhamento da armadura do pilar dos blocos sobre estacas

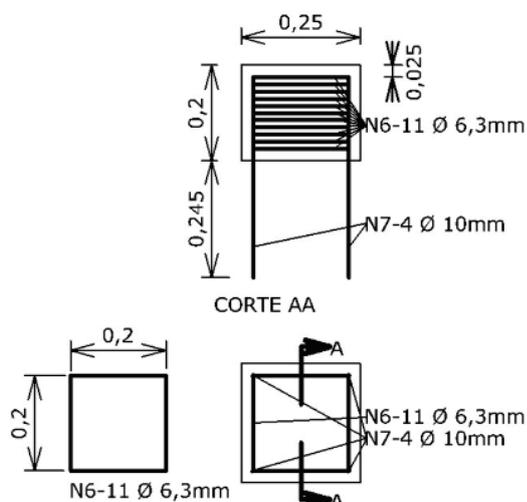
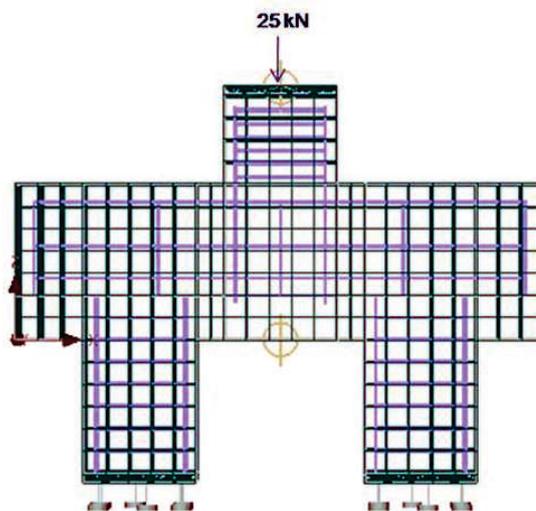


Figura 5 - Detalhe da malha de elementos finitos, da vinculação dos apoios e da força aplicada. (ATENA)



#### 4. Resultados dos modelos numéricos e discussões

##### 4.1 Panorama de fissuração

Em todos os modelos numéricos, a primeira fissura surgiu na região nodal inferior do bloco, junto às estacas, e se propagou ao longo do eixo das bielas até a face inferior do pilar. Durante as etapas de incrementos de força observou-se a formação de diversas fissuras paralelas às bielas comprimidas, como e pode observar nas Figuras 6 e 7. Nos modelos 2 e 3, com vinculação parcial das estacas, houve aumento da intensidade da fissuração durante o carregamento. Foi observa-

Tabela 6 - Propriedades do elemento de contato

Rigidez normal ( $K_{nn}$ )	$2,0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^3$
Rigidez tangencial ( $K_{tt}$ )	$2,0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^3$
Coesão	0,0
Coefficiente de Fricção	0,0
Resistência Última à Tração do Concreto ( $f_{tk}$ )	3,2 MPa

Figura 6 – Evolução das fissuras do modelo 1 - (a) início da aplicação das etapas de força; (b) metade das etapas de força; (c) ruína (ATENA)

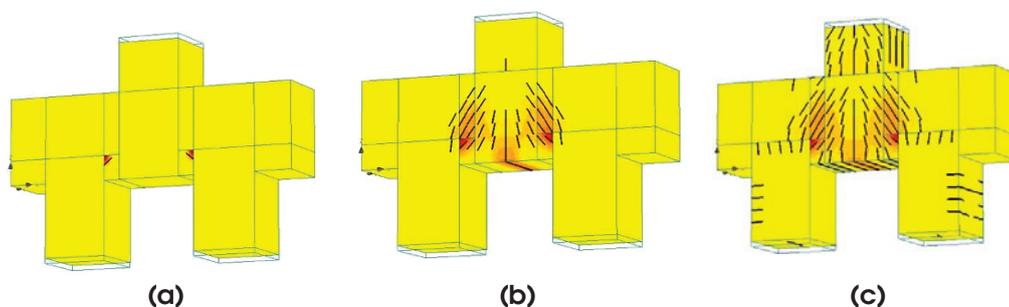


Figura 7 – Fissuras na ruína - (a) modelo 2; (b) modelo 3; (c) modelo 4; (d) modelo 5 (ATENA)

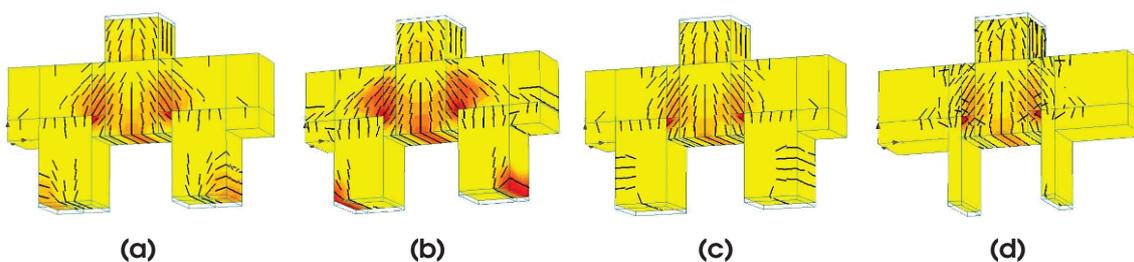
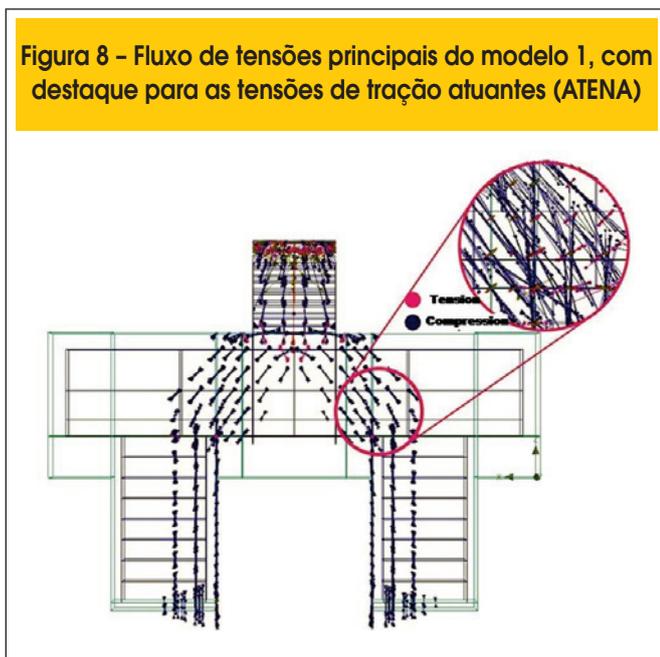


Tabela 7 – Valores de abertura de fissuras dos modelos numéricos e de Delalibera (1)

Intensidade da força (kN)	Delalibera (1)	110	219	438	548	780	1005	1225
	Análise Numérica	125	225	425	550	775	1000	1225
Abertura de fissuras (mm)	Delalibera (1)	0	0	0	0,147	0,230	0,263	0,266 <sup>(1)</sup>
	Modelo 1	0	0,017	0,087	0,127	0,181	0,25	0,315
	Modelo 2	0	0,023	0,098	0,129	0,209	0,264	0,337
	Modelo 3	0	0,040	0,110	0,145	0,227	0,312	0,425
	Modelo 4	0	0,017	0,086	0,126	0,167	0,230	0,293
	Modelo 5	0	0,014	0,077	0,109	0,175	0,270	0,321

Nota: <sup>(1)</sup> No ponto 2, a abertura de fissuras foi de 0,32mm no bloco experimental (1).

**Figura 8 - Fluxo de tensões principais do modelo 1, com destaque para as tensões de tração atuantes (ATENA)**



do o desenvolvimento de fissuras na base das estacas e na região dos apoios devido à excentricidade formada pelos vínculos que gerou uma rotação no eixo das estacas e, conseqüentemente, uma área de concentração de tensões, como pode-se notar nas Figuras 7(a) e 7(b). No modelo 4, a armadura de fendilhamento contribuiu efetivamente para a redução e controle da fissuração no bloco, havendo redução da intensidade da abertura de fissuras.

Já em relação ao modelo 5, com redução da largura das estacas, os resultados foram similares aos registrados no modelo 1.

De forma geral, foi observado uma boa aproximação entre os resultados numéricos e experimentais obtidos por Delalibera [1], como comprovam os resultados da abertura de fissuras mostrados na Tabela 7.

#### 4.2 Fluxo de tensões

Em todos os modelos houve formação de bielas comprimidas com formato prismático. O fluxo de tensões dividiu-se igualmente na metade

da seção transversal do pilar, comprovando a afirmação de [1] de que é correto considerar que metade da seção transversal do pilar na face do bloco receba metade da força aplicada pelo pilar. Além disso, as tensões de compressão propagaram-se até a face das estacas, com formação de bielas comprimidas, concentrando-se na região das estacas mais próxima do pilar, como mostram as Figuras 8 e 9.

As tensões máximas de compressão, apresentadas na Tabela 8, ocorreram nas regiões de interface do bloco com o pilar e com as estacas, indicando a ruptura do bloco nas regiões nodais, de maneira similar ao modelo experimental de [1].

Nos modelos 2 e 3, a excentricidade provocada pela redução da área dos apoios das estacas e o conseqüente aumento do deslocamento da estrutura, provocou uma expansão das bielas nas regiões nodais inferiores, acarretando uma redistribuição das tensões no interior do bloco. No modelo 3, o fluxo de tensões das bielas passou a se concentrar na região das estacas mais afastada do pilar como mostra a Figura 9(b).

No modelo 5, apresentado na Figura 9(d), as tensões de compressão das bielas distribuíram-se-se por toda a seção transversal das estacas. No entanto, as tensões máximas ficaram próximas das obtidas no modelo 1, como pode-se observar na Tabela 8, comprovando que no modelo 1 apenas parte da seção transversal das estacas é solicitada pelas tensões de compressão das bielas comprimidas.

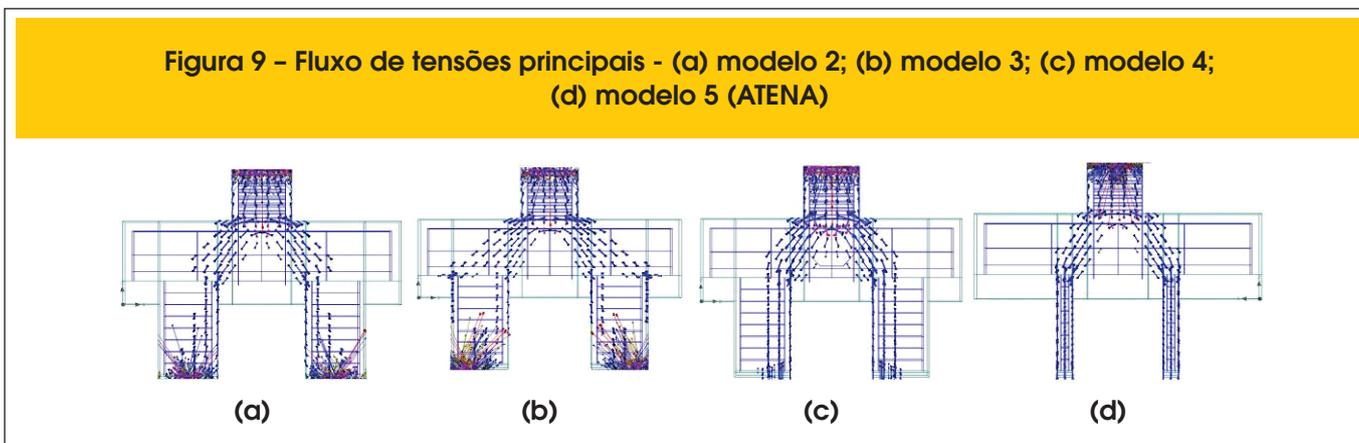
Também houve a formação de esforços de tração perpendiculares às bielas caracterizando o fenômeno de fendilhamento do concreto, evidenciado pelos vetores de tração perpendiculares aos vetores de compressão mostrados em detalhes na Figura 8.

A armadura de fendilhamento presente no modelo 4 absorveu parte das tensões de tração perpendiculares às bielas, contribuindo para o aumento da resistência do bloco, como previsto por Delalibera [1], e também foi observado uma significativa redução das tensões de tração atuantes na seção inferior do bloco, como está apresentado na Figura 12(a). Estes resultados comprovam a ação favorável da armadura de fendilhamento para a capacidade resistente à tração longitudinal e às tensões de cisalhamento. Nos demais modelos, as tensões de tração atuantes na seção inferior do bloco ficaram próximas, como mostram as Figuras 10, 11 e 12 (a, b).

#### 4.3 Força última e ruína

Em todos os modelos houve ruína frágil por ruptura do concreto, com intensa fissuração da peça e formação de bielas comprimidas.

**Figura 9 - Fluxo de tensões principais - (a) modelo 2; (b) modelo 3; (c) modelo 4; (d) modelo 5 (ATENA)**



**Tabela 8 – Valores das tensões máximas (em MPa) na força última dos modelos numéricos e experimental de Delalibera (1)**

Especificação do bloco	Delalibera (1)	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	
<b>Tensão máxima de compressão (MPa)</b>	<b>Bielas</b>	-	35	35	32	35	35
	<b>Região nodal inferior</b>	-	30	27	28	35	34
	<b>Região nodal superior</b>	-	36	37	34	35	34
	<b>Interface bloco-pilar</b>	58,3	52	50	67	54	48
	<b>Interface bloco-estaca</b>	58,3	52	50	37	54	62
<b>Tensão máxima de tração</b>	-	2,5	2,5	2,3	2,4	2,3	

Em comparação com o modelo experimental, a força última do modelo 1 foi de 1900 kN, muito próxima da obtida por [1], como apresentado na Tabela 9.

No modelo 3, com vinculação em apenas 25% da seção inferior das estacas, ocorreu escoamento da armadura principal dos tirantes e redução da força última do bloco. Nos outros modelos, houve escoamento somente após a ruína da peça.

No modelo 4, com armadura de fendilhamento, foi observado um aumento da força última do bloco, como mostra a Tabela 9. No entanto, não houve variação significativa no padrão de ruína, rigidez e capacidade portante. Os resultados são similares aos obtidos por [1] em ensaio experimental com blocos com armadura de fendilhamento, nos quais houve aumento das forças suportadas pelo bloco.

No modelo 5, apesar da redução da largura das estacas, não houve diferença significativa na capacidade resistente do bloco. A força última resistida pela peça foi de 1825 kN, muito próxima do modelo experimental. O resultado reitera que as estacas do modelo 1 são solicitadas apenas parcialmente, havendo concentração de tensões na região mais próxima do pilar.

#### 4.4 Tensões e deformações nas armaduras

As deformações das barras de aço, à exceção do modelo 3, não atingiram o limite de escoamento até o instante da ruína. Além disso, as tensões atuantes nas barras de aço dos tirantes principais não foram uniformes, havendo significativa redução na região nodal inferior devido ao efeito de compressão das bielas, como se pode observar na Figura 13. A redução dos vínculos nos apoios das estacas provocou um aumento das deformações na seção inferior do bloco – em virtude da rotação do eixo das estacas – e, conseqüentemente, um aumento das tensões de tração dos tirantes principais.

Os estribos horizontais absorveram parte das tensões de tração atuantes na região das bielas, sendo que no modelo 3, as tensões

da armadura complementar superior atingiram 360 MPa, como mostra a Figura 13(c). Além disso, em função da concentração de tensões gerada pela vinculação parcial das estacas, no modelo 3 houve um aumento da intensidade das tensões nos estribos das estacas localizados próximos aos apoios, como destacado na Figura 13(c).

A armadura de fendilhamento do modelo 4 mostrou-se eficaz na atuação contra as tensões de tração ao longo do bloco, absorvendo parte das tensões no interior do bloco, como mostra a Figura 14.

Na Tabela 10 são apresentados os valores de tensão e deformação máximos obtidos através da análise numérica em conjunto com os resultados experimentais de [1], os quais demonstram a semelhança entre os resultados. E, nas Figuras 15 a 19, são apresentadas em detalhes a zona nodal inferior do bloco e a região de ancoragem (lanc) dos tirantes, conjuntamente com os gráficos e os valores das tensões nos tirantes, além dos vetores de forças atuantes na região nodal inferior (C-C-T).

Como se pode notar nas Figuras 15 a 19, em todos os modelos, as deformações nas extremidades das barras dos tirantes foram muito pequenas. Não obstante, à medida que se diminuiu a vinculação das estacas, houve um progressivo aumento da zona nodal. Também ocorreu um aumento das tensões nas barras de aço dos tirantes atrás da região nodal, com repercussão nas extremidades das barras, como mostram as Figuras 15, 16 e 17. Contudo, as tensões nas extremidades dos tirantes permaneceram pequenas. Isto comprova a afirmação de Clarke [5] de que a ancoragem das barras de aço dos tirantes é influenciada positivamente pela ação confinante das bielas, o que dispensaria a necessidade de utilização de ganchos.

No bloco com armadura de fendilhamento (modelo 4), foram observadas maiores tensões nas barras de aço no início da região nodal inferior. Entretanto, ocorreu uma grande redução das tensões ao longo da zona nodal, que chegaram nas extremidades dos tirantes com valores muito pequenos, como demonstrado na Figura 18.

Já no modelo 5, apesar da redução da seção transversal das estacas, as deformações nas extremidades das barras dos tirantes foram nulas, como mostrado na Figura 19.

#### 4.5 Rigidez e capacidade portante

O modelo 1 mostrou-se mais rígido que o modelo experimental, apresentando deslocamentos menores. Isto foi resultado do tipo

de vinculação utilizado nas estacas do modelo numérico que gerou um efeito de engastamento, limitando a liberdade de rotação das estacas e o deslocamento do bloco.

A redução da área de vinculação dos apoios das estacas levou a uma redução da rigidez dos blocos, levando a uma crescente convergência da curva força versus deslocamento. A curva do modelo 3, como se pode observar na Figura 20, sobrepôs-se à curva do bloco experimental ajustada (para

Figura 10 – Detalhe das tensões de tração no modelo 1 (ATENA)

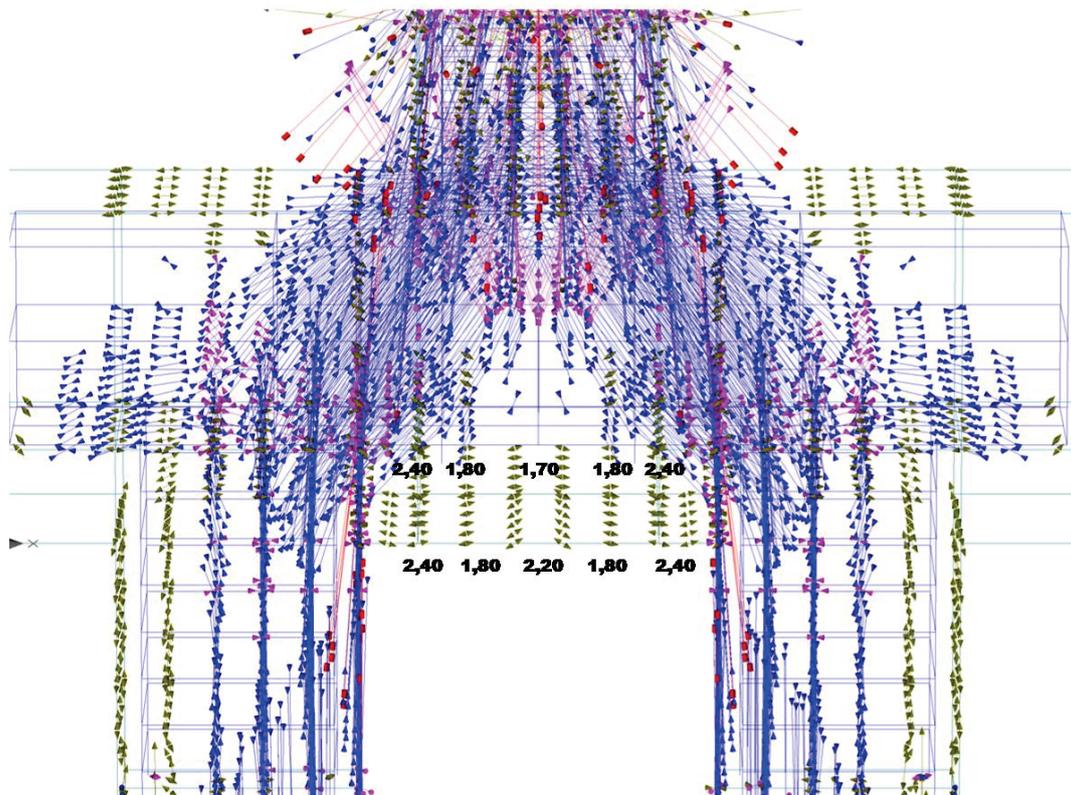


Figura 11 – Tensões de tração (em MPa) na base do bloco: (a) modelo 2; (b) modelo 3 (ATENA)

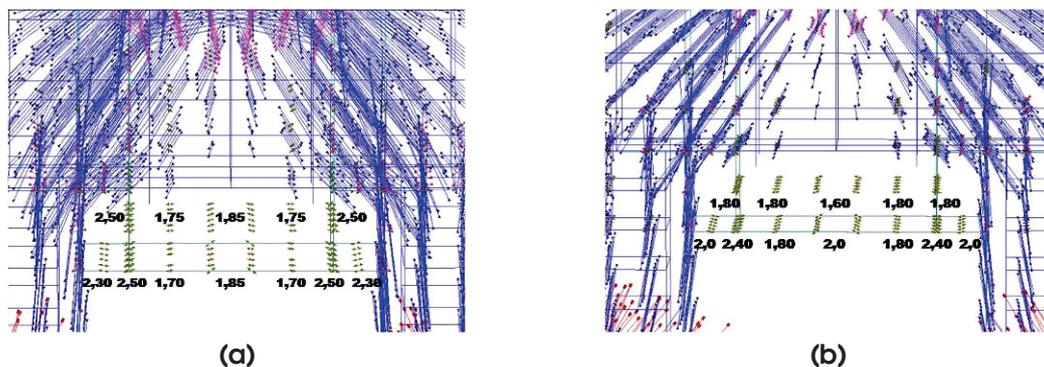


Figura 12 - Tensões de tração (em MPa) na base do bloco: (a) modelo 4; (b) modelo 5 (ATENA)

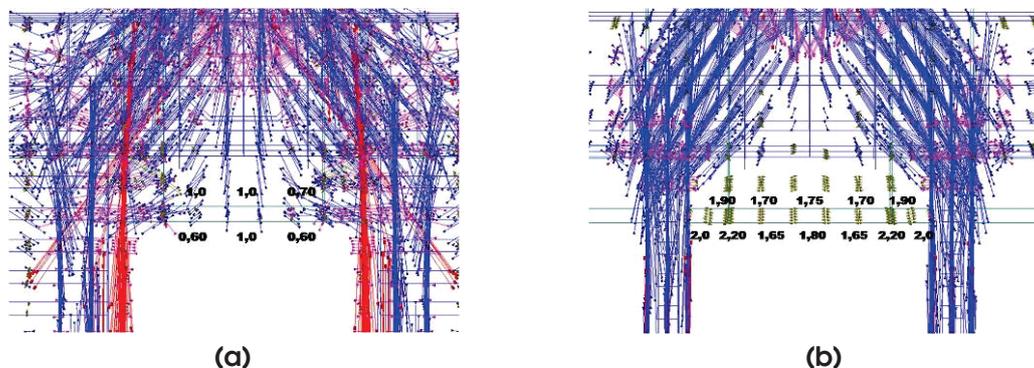


Tabela 9 - Força última dos modelos numéricos e experimental de Delalibera (1)

Modelo	Força (kN)
Delalibera (1)	1820
Modelo 1	1900
Modelo 2	1980
Modelo 3	1775
Modelo 4	2075
Modelo 5	1825

expurgar o deslocamento devido à acomodação do modelo no início do ensaio).

Isto comprova que o tipo de vinculação utilizada nos modelos numéricos afeta a rigidez dos elementos estruturais. Entretanto, a capacidade portante do bloco não foi influenciada de forma significativa. Tanto o modelo numérico quanto o modelo experimental atingiram a força última com intensidades de forças e panoramas de fissuração muito próximos.

Ademais, à medida que se diminuiu a vinculação dos apoios das estacas, ocorreu uma mudança na incidência das maiores defor-

mações plásticas. Na Figura 21, é possível observar o deslocamento das deformações das zonas nodais inferiores para a zona nodal superior. A redução da área dos apoios das estacas se, por um lado, permitiu um maior deslocamento da estrutura, por outro lado, gerou uma zona de elevada compressão na seção superior do bloco junto ao pilar. De forma geral, houve uma redução das tensões na face de contato do bloco com as estacas de até 30%, com respectivo aumento em até 28% nas tensões na face de contato do bloco com o pilar, como mostrado na Tabela 8.

No modelo 4, a existência de armadura de fendilhamento contribuiu para o aumento da capacidade portante e resistência do bloco.

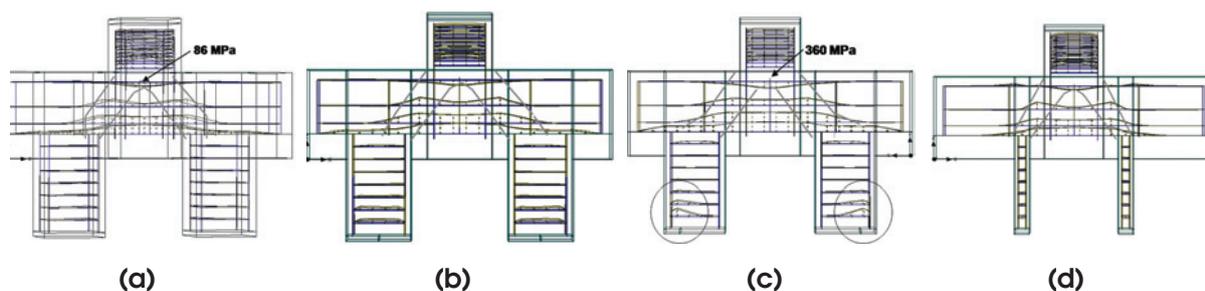
Já o modelo 5, com menor largura das estacas, apresentou rigidez e capacidade portante similares às do modelo 1.

## 5. Conclusões

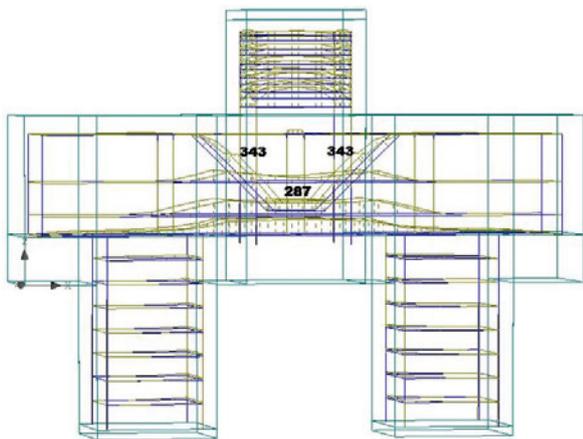
Os resultados das modelagens numéricas mostraram que a variação da vinculação dos apoios das estacas influenciou diretamente na capacidade portante dos modelos e exerceu uma influência não-desprezível na rigidez dos blocos sobre estacas.

No modelo numérico 1 o impedimento do deslocamento vertical em toda a superfície da base das estacas gerou um efeito de engastamento que provocou o enrijecimento estrutural. Apesar da existência do efeito de confinamento nas estacas, provocada pela reação do

Figura 13 - Tensões nas armaduras - (a) modelo 1; (b) modelo 2; (c) modelo 3; (d) modelo 5 (ATENA (2))



**Figura 14 – Tensões atuantes na armadura de fendilhamento do modelo 4 (ATENA)**



solo sobre as mesmas, este fato não ocorre nos blocos, visto que os solos não trabalham a tração, e, além disso, pequenos deslocamentos das estacas podem exercer grande influência na rigidez do bloco. Este fator pode tornar-se crítico e merece grande atenção nos modelos ensaiados em laboratório e analisados numericamente.

A comparação entre os resultados dos modelos numéricos e experimentais mostraram uma boa aproximação, sendo observada a ruína frágil em todos os casos por esmagamento do concreto e fendilhamento do bloco.

Houve formação de bielas com conformação prismática e desenvolvimento de tensões de tração ao longo das bielas, responsáveis pelo fenômeno de fendilhamento.

O fluxo de tensões no interior do bloco dividiu-se igualmente na metade da seção inferior do pilar e se propagou até as faces das estacas, onde houve concentração de tensões na região mais próxima do pilar. As primeiras fissuras surgiram nas regiões nodais inferiores e se propagaram em direção à zona nodal superior. Houve intensa fissuração do bloco, com formação de plano de ruptura ao longo das bielas.

As tensões nos tirantes principais não foram constantes, havendo uma redução abrupta nas regiões nodais inferiores em função do efeito da atuação das bielas comprimidas.

Nas extremidades das barras dos tirantes as tensões foram pe-

**Tabela 10 – Valores de tensão e deformação na força última dos modelos numéricos e experimental de Delalibera (1)**

Especificação do bloco	Delalibera (1)	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Deformação máxima das barras de aço dos tirantes	0,196%	0,195%	0,239%	0,390%	0,198	0,190
Tensão máxima das barras de aço dos tirantes	392 MPa	414 MPa	501 MPa	547 MPa	415 MPa	399 MPa

**Figura 15 – Comprimento de ancoragem e tensões atuantes (em MPa) nos tirantes na região nodal inferior do modelo 1**

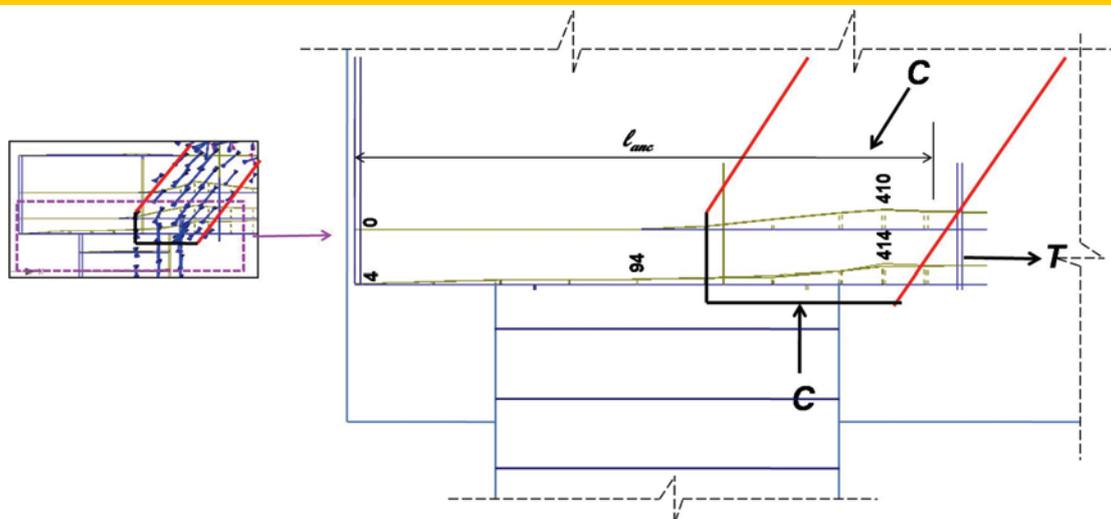


Figura 16 - Comprimento de ancoragem e tensões atuantes (em MPa) nos tirantes na região nodal inferior do modelo 2

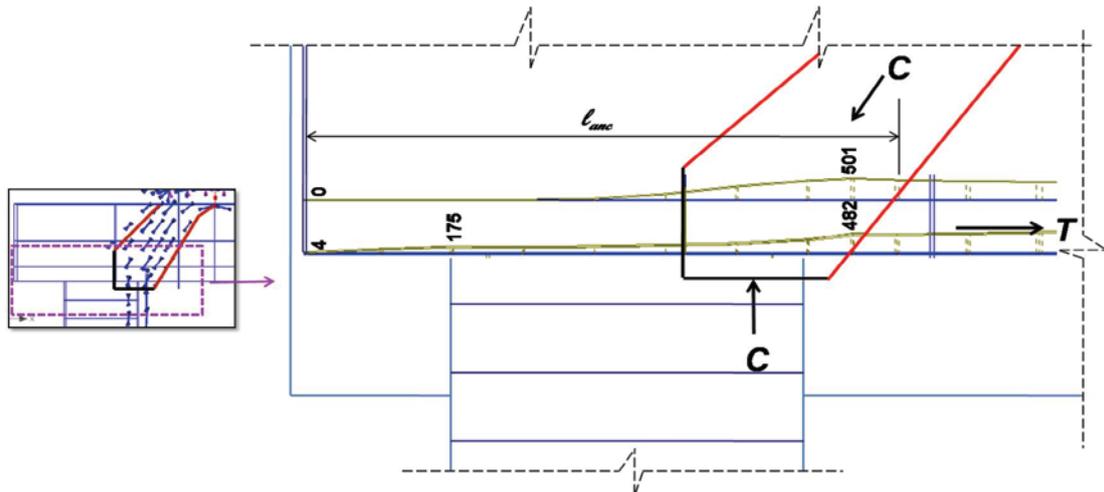


Figura 17 - Comprimento de ancoragem e tensões atuantes (em MPa) nos tirantes na região nodal inferior do modelo 3

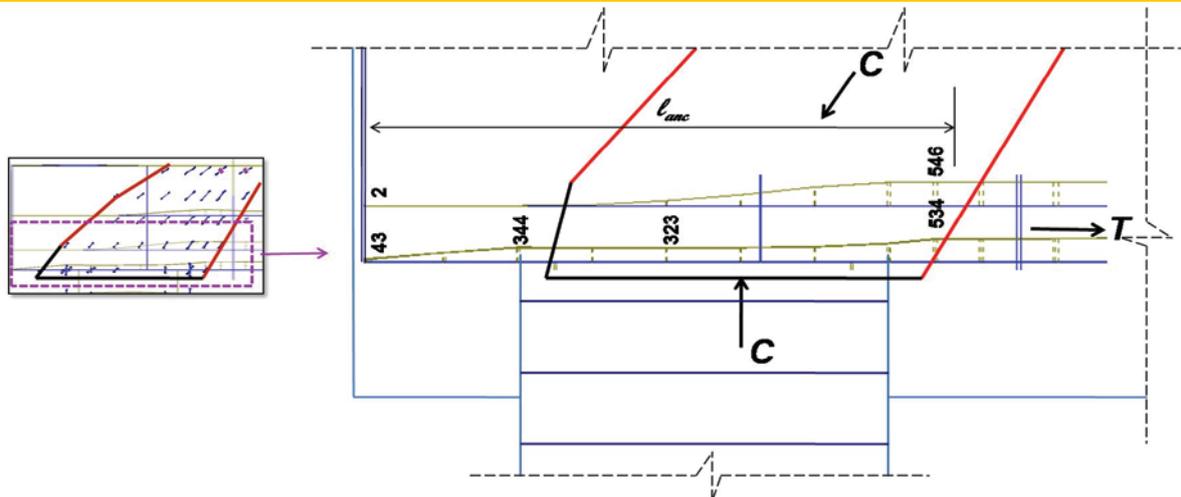


Figura 18 - Comprimento de ancoragem e tensões atuantes (em MPa) nos tirantes na região nodal inferior do modelo 4

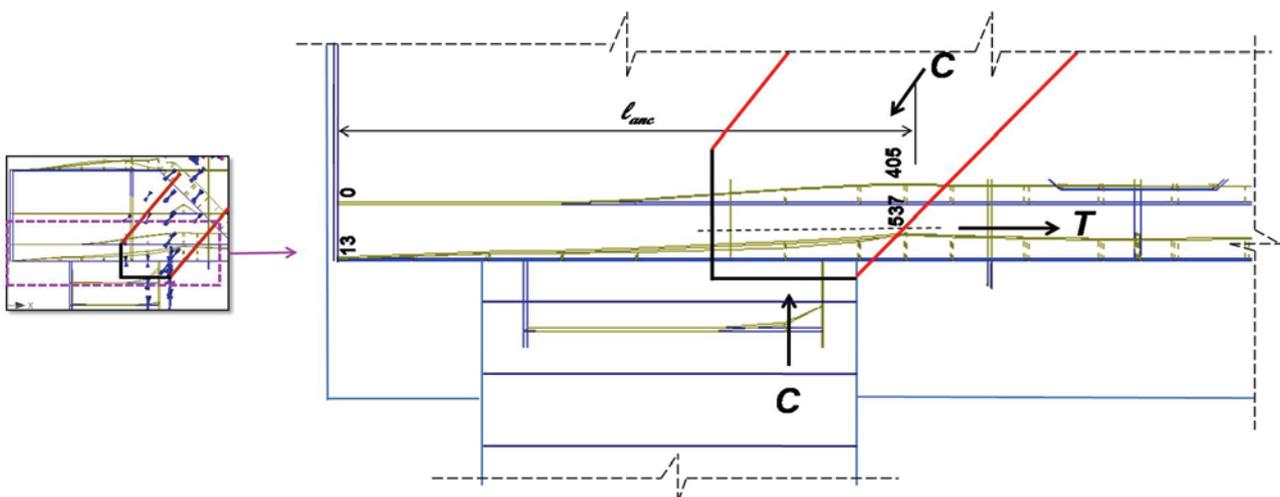
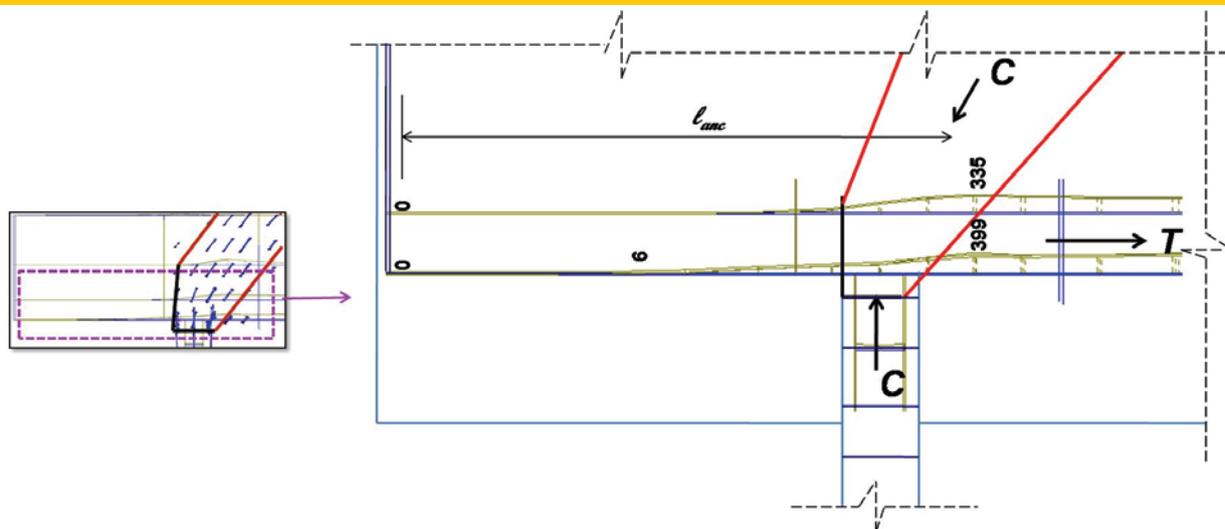


Figura 19 - Comprimento de ancoragem e tensões atuantes (em MPa) nos tirantes na região nodal inferior do modelo 5



quenas ou nulas, o que comprova a não-necessidade de utilização de ganchos de ancoragem.

A utilização de armadura de fendilhamento contribuiu para o aumento da força última resistida pelo bloco e para a redução e controle da fissuração da peça.

A aderência das barras de aço não foi um fator determinante para a resistência última dos blocos analisados. Em todos os modelos não houve escorregamento da armadura principal dos tirantes até a ruína dos blocos.

## 6. Agradecimentos

Um agradecimento à FEC-UNICAMP pela disponibilização das ferramentas necessários para a execução deste trabalho. E à CAPES pelo apoio à participação no 52º Congresso Brasileiro do Concreto que resultou na publicação e divulgação de um artigo que originou esta publicação.

Figura 20 - Curva força versus deslocamento

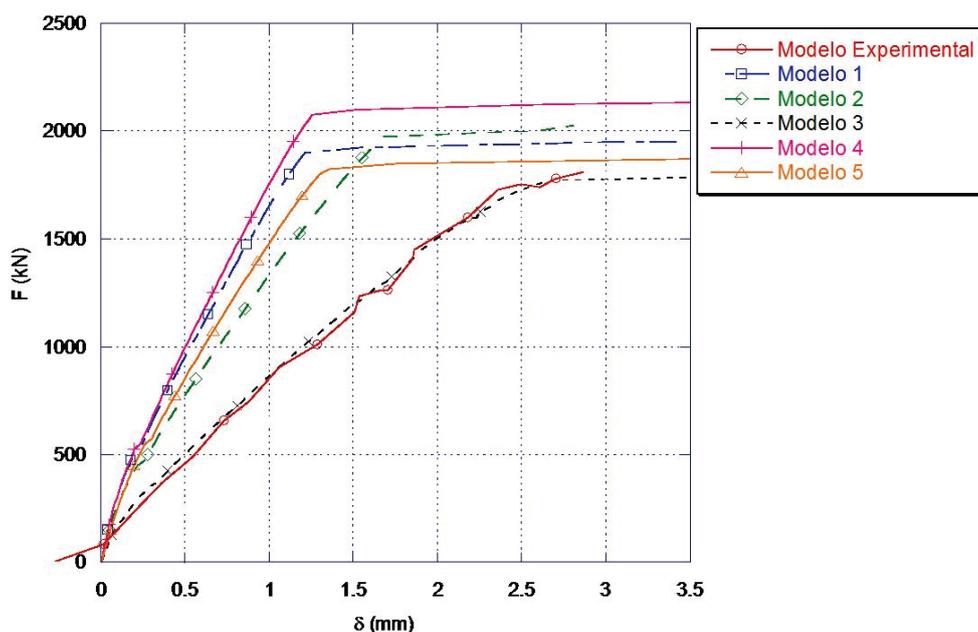
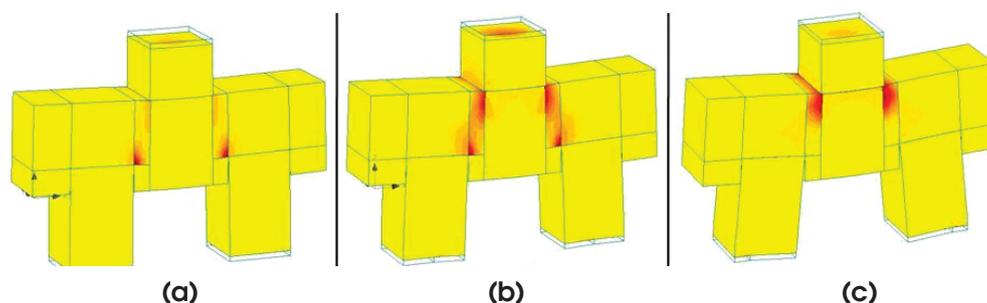


Figura 21 – Deformações plásticas principais - (a) modelo 1; (b) modelo 2; (c) modelo 3



## 7. Referências bibliográficas

- [01] DELALIBERA, R. G. Numerical and experimental analysis of pile caps with two piles submitted to axial and eccentric forces. Thesis (Doctorate). School of Engineering of São Carlos, São Paulo University, São Carlos, 2006 (in Portuguese).
- [02] CERVENKA, V.; JENDELE, L. e CERVENKA, J. ATENA Program Documentation—Part 1: Theory. Praha, Czech Republic, 2005.
- [03] BLÉVOT, J. L.; FRÉMY, R. Semelles sur Pieux. Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, V. 20, No. 230, pp. 223-295, 1967.
- [04] MAUTONI, M. Pile caps with two piles. São Paulo, Grêmio Politécnico, 1972 (in Portuguese).
- [05] CLARKE, J. L. Behavior and design of pile caps with four piles. Cement and Concrete Association, London, Technical Report n.42.489, 1973.
- [06] SABNIS, G. M.; GOGATE, A. B. Investigation of thick slab (pile cap) behavior. ACI Structural Journal, V. 81-5, No. 2, pp. 35-39, Jan-Feb 1984.
- [07] ADEBAR, et al. Strut-and-tie models for design of pile caps: an experimental study. ACI Journal, v. 87, pp. 81-91, Jan-Febr, 1990.
- [08] DELALIBERA R, G.; GIONGO, J. S. Variance analysis applied to pile caps with two piles with embedded chalice for concrete precast column submitted to axial and eccentric loads. 50º Brazilian Concrete Congress, IBRACON, São Paulo, 2008 (in Portuguese).
- [09] SOUZA, R. et al. Adaptable Strut-and-Tie Model for Design and Verification of Four-Pile Caps. ACI Structural Journal, V. 106, No. 2, pp. 142-150, March-April 2009.
- [10] SU R. K. L.; CHANDLER A. M. Design criteria for Unified Strut and Tie Models. Progress in Structural Engineering and Materials, V.3, No. 3, pp 288-298, October 2001.
- [11] BRAZILIAN ASSOCIATION STANDARDS. NBR 6118:2007 – Design of concrete structures. Rio de Janeiro (in Portuguese).
- [12] RAMOS, F. A. C. Numerical analysis of pile caps with

ten piles: Supports reactions calculus. São Carlos. Thesis (Master) - School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, 2007 (in Portuguese).