

# Evaluation of second order moments in reinforced concrete structures using the $\gamma_z$ and $B_2$ coefficients

## Avaliação dos momentos de segunda ordem em estruturas de concreto armado utilizando os coeficientes $\gamma_z$ e $B_2$

D. M. OLIVEIRA <sup>a</sup>  
danielle@demc.ufmg.br

N. A. SILVA <sup>b</sup>  
ney@dees.ufmg.br

P. M. OLIVEIRA <sup>a</sup>  
priscillameireles@ufmg.br

C. C. RIBEIRO <sup>a</sup>  
ccrstar@demc.ufmg.br

### Abstract

This paper presents an alternative to estimate the magnifier of first order moments to be applied on each storey of reinforced concrete structures, from the values obtained for the  $\gamma_z$  and  $B_2$  coefficients, used to evaluate second order effects in reinforced concrete structures and in steel structures, respectively. In order to develop the study, initially several reinforced concrete buildings of medium height are processed, in first order and in second order, using the ANSYS software. Next,  $\gamma_z$ ,  $B_2$  and the increase in first order moments, when considering the second order effects along the height of the buildings, are calculated. Finally, from the results obtained, the magnifier of the first order moments, differentiated for each storey of the structure and calculated from both  $\gamma_z$  and  $B_2$  coefficients, is estimated and the efficiency of the simplified method of obtaining final moments using the magnifier proposed is evaluated.

**Keywords:** reinforced concrete, second order effects,  $\gamma_z$  coefficient,  $B_2$  coefficient.

### Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma alternativa para estimar o majorador dos momentos de primeira ordem que deve ser aplicado em cada pavimento das estruturas de concreto armado, a partir dos valores obtidos para os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ , utilizados para avaliar os efeitos de segunda ordem em estruturas de concreto armado e de aço, respectivamente. Para conduzir o estudo, inicialmente diversos edifícios de médio porte de concreto armado são processados em primeira e segunda ordem utilizando o programa ANSYS. Em seguida, são calculados os valores dos coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ , bem como dos acréscimos sofridos pelos momentos de primeira ordem, quando considerados os efeitos de segunda ordem, ao longo da altura dos edifícios. Finalmente, a partir dos resultados obtidos, estima-se o majorador dos momentos de primeira ordem, diferenciado para cada pavimento das estruturas e calculado a partir de ambos os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ , e avalia-se a eficiência do método simplificado de obtenção dos momentos finais utilizando o majorador estimado.

**Palavras-chave:** concreto armado, efeitos de segunda ordem, coeficiente  $\gamma_z$ , coeficiente  $B_2$ .

<sup>a</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Deptº de Engenharia de Materiais e Construção, Belo Horizonte, MG, Brasil;

<sup>b</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Deptº de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte, MG, Brasil.

## 1. Introdução

Nas últimas décadas, seguindo o exemplo de outras áreas, a engenharia sofreu grandes avanços, particularmente a de projetos e a de construção civil. As técnicas de otimização no que diz respeito ao peso e à forma, o desenvolvimento de equipamentos de teste e computacionais e modelagens numéricas eficientes levaram a construções mais econômicas e esbeltas, e edifícios mais altos e arrojados. Dessa forma, questões antes não convenientemente abordadas passaram a assumir fundamental importância no projeto estrutural. Dentre estas questões, destacam-se a análise da estabilidade e a avaliação dos efeitos de segunda ordem.

Quando o estudo do equilíbrio da estrutura é efetuado considerando a configuração deformada, ocorre a interação entre as forças existentes e os deslocamentos, o que promove o aparecimento de esforços adicionais. Nestas condições, surgem os denominados efeitos de segunda ordem. Estes efeitos podem ser extremamente importantes e significativos em algumas estruturas; em outras, não precisam ser levados em conta.

Caso os efeitos de segunda ordem sejam significativos, deve-se realizar uma análise de segunda ordem. Sendo esta análise muitas vezes incompatível com fatores limitadores como tempo e praticidade, tem-se buscado processos simplificados capazes de prever o comportamento das estruturas em segunda ordem.

Os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ , comumente empregados em estruturas de concreto armado e de aço, respectivamente, podem ser utilizados para avaliar os efeitos de segunda ordem e fornecer uma estimativa dos esforços finais de uma estrutura, desde que seus valores não ultrapassem determinados limites.

No entanto, um importante aspecto merece ser destacado em relação ao coeficiente  $\gamma_z$ : ao contrário do coeficiente  $B_2$ , ele apresenta um valor único para toda a estrutura, embora, como constatado em diversos trabalhos (Carmo [1], Lima & Guarda [2] e Oliveira [3]), os efeitos de segunda ordem sofram variações ao longo da altura do edifício.

É dentro deste contexto que está inserido o presente trabalho, no qual apresenta-se uma alternativa para avaliar os esforços finais de uma estrutura, que incluem os de segunda ordem, utilizando ambos os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ . Para conduzir o estudo, diversos edifícios de médio porte em concreto armado são analisados em primeira e segunda ordem utilizando o "software" ANSYS-9.0, e o processo simplificado de obtenção dos esforços finais é avaliado levando-se em conta a variação dos efeitos de segunda ordem ao longo da altura das estruturas.

## 2. Classificação das estruturas com relação à deslocabilidade horizontal

Como já apresentado no item anterior, os efeitos de segunda ordem surgem quando o estudo do equilíbrio da estrutura é efetuado considerando a configuração deformada, ou seja, quando os deslocamentos são levados em conta na análise. Dessa forma, as forças existentes interagem com os deslocamentos, produzindo esforços solicitantes adicionais. Os esforços de segunda ordem introduzidos pelos deslocamentos horizontais dos nós da estrutura, quando sujeita a cargas verticais e horizontais, são denominados efeitos globais de segunda ordem.

Em algumas estruturas, mais rígidas, os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos e, conseqüentemente, os efeitos

globais de segunda ordem têm pequena influência nos esforços totais, podendo então ser desprezados. Estas estruturas são denominadas estruturas de nós fixos.

Por outro lado, em estruturas mais flexíveis, os deslocamentos horizontais são significativos e, portanto, os efeitos globais de segunda ordem representam uma parcela importante dos esforços finais, não podendo ser desprezados. É o caso das estruturas de nós móveis, para as quais deve-se realizar uma análise em segunda ordem.

De acordo com a NBR 6118:2007 [4], se os efeitos globais de segunda ordem forem inferiores a 10% dos respectivos esforços de primeira ordem a estrutura pode ser classificada como de nós fixos. Caso contrário (efeitos globais de segunda ordem superiores a 10% dos de primeira ordem) a estrutura é classificada como de nós móveis.

A NBR 6118:2007 [4] também estabelece que a classificação das estruturas pode ser feita utilizando o coeficiente  $\gamma_z$ , comentado no próximo item.

## 3. Coeficiente $\gamma_z$

A NBR 6118:2007 [4] prescreve que o coeficiente  $\gamma_z$ , válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro pavimentos, pode ser determinado a partir de uma análise linear de primeira ordem, reduzindo-se a rigidez dos elementos estruturais, para considerar a não-linearidade física de forma aproximada.

Para cada combinação de carregamento, calcula-se o valor de  $\gamma_z$  por meio da seguinte expressão:

$$\gamma_z = \frac{I}{I - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (1)$$

sendo:

-  $M_{1,tot,d}$  (momento de primeira ordem): soma dos momentos de todas as forças horizontais (com seus valores de cálculo) da combinação considerada, em relação à base da estrutura, ou seja, pode-se escrever:

$$M_{1,tot,d} = \sum (F_{hid} \cdot h_i) \quad (2)$$

sendo que  $F_{hid}$  é a força horizontal aplicada no pavimento  $i$  (com seu valor de cálculo) e  $h_i$  é a altura do pavimento  $i$ .

-  $\Delta M_{tot,d}$  (acréscimo de momentos após a análise de primeira ordem): soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura (com seus valores de cálculo), na combinação considerada, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação:

$$\Delta M_{tot,d} = \sum (P_{id} \cdot u_i) \quad (3)$$

sendo que  $P_{id}$  é a força vertical atuante no pavimento  $i$  (com seu valor de cálculo) e  $u_i$  é o deslocamento horizontal do pavimento  $i$ . Se for satisfeita a condição  $\gamma_z \leq 1,1$ , a estrutura será classificada como de nós fixos.

A NBR 6118:2007 [4] estabelece que os esforços finais (primeira ordem + segunda ordem) podem ser avaliados a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por  $0,95\gamma_z$ , desde que  $\gamma_z$  não ultrapasse 1,3. No entanto, segundo o Projeto de Revisão da NBR 6118:2000 [5], os valores finais dos esforços poderiam ser obtidos pela multiplicação dos momentos de primeira ordem por  $0,95\gamma_z$ , também com a condição de que  $\gamma_z \leq 1,3$ . Nota-se, portanto, que o  $\gamma_z$  deixou de ser o coeficiente majorador dos momentos de primeira ordem, e passou a ser o coeficiente majorador das ações horizontais.

Segundo Franco & Vasconcelos [6], a utilização do  $\gamma_z$  como majorador dos momentos de primeira ordem fornece uma boa estimativa dos resultados da análise de segunda ordem; o método foi empregado com sucesso em edifícios altos com  $\gamma_z$  da ordem de 1,2 ou mais. Vasconcelos [7] acrescenta que este processo é válido mesmo para valores de  $\gamma_z$  inferiores a 1,10, casos nos quais as normas técnicas permitem não considerar os efeitos de segunda ordem.

#### 4. Coeficiente $B_2$

Para a avaliação dos efeitos de segunda ordem em estruturas de aço, o AISC/LRFD [8] adota o método aproximado de amplificação dos momentos de primeira ordem pelos fatores de majoração  $B_1$  e  $B_2$ . O momento fletor solicitante de segunda ordem,  $M_{Sd}$ , deve, então, ser determinado por meio da seguinte expressão:

$$M_{Sd} = B_1 \cdot M_{nt} + B_2 \cdot M_{lt} \tag{4}$$

sendo  $M_{nt}$  o momento fletor solicitante de cálculo, assumindo não existir deslocamento lateral na estrutura, e  $M_{lt}$  o momento fletor solicitante de cálculo devido ao deslocamento lateral do pórtico; ambos  $M_{nt}$  e  $M_{lt}$  são obtidos por análises de primeira ordem. O coeficiente de amplificação  $B_1$  representa o efeito  $P-\delta$ , relacionado à instabilidade da barra, ou aos efeitos locais de segunda ordem;  $B_2$  considera o efeito  $P-\Delta$ , relacionado à instabilidade do pórtico, ou aos efeitos globais de segunda ordem.

O coeficiente  $B_2$  pode ser calculado, para cada pavimento da estrutura, como:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta_{oh}}{L} \frac{\sum N_{Sd}}{\sum H_{Sd}}} \tag{5}$$

sendo  $\sum N_{Sd}$  o somatório das forças normais de compressão solicitantes de cálculo em todos os pilares e outros elementos resistentes a forças verticais do pavimento,  $\Delta_{oh}$  o deslocamento horizontal relativo,  $L$  o comprimento do pavimento e  $\sum H_{Sd}$  o somatório de todas as forças horizontais de cálculo no pavimento que produzem  $\Delta_{oh}$ .

Segundo Silva [9], se em todos os pavimentos o coeficiente  $B_2$  não superar o valor de 1,1 a estrutura pode ser considerada pouco sensível a deslocamentos horizontais e, neste caso, os efeitos globais de segunda ordem podem ser desprezados. Quando o maior  $B_2$  estiver situado entre 1,1 e 1,4, o método aproximado  $B_1-B_2$  pode ser utilizado para o cálculo do momento fletor, sendo os demais esforços (força normal e força cortante) obtidos diretamente da análise de primeira ordem. Finalmente, quando  $B_2 > 1,40$ , recomenda-se a realização de uma análise elástoplástica rigorosa de segunda ordem. Silva [9] ainda acrescenta que, caso  $1,1 < B_2 \leq 1,2$ , pode-se, alternativamente, calcular os momentos fletores com base em uma análise de primeira ordem realizada com os esforços horizontais majorados pelo maior  $B_2$ .

Nota-se então que, assim como o coeficiente  $\gamma_z$ , o coeficiente  $B_2$  constitui um “indicador” da importância dos efeitos globais de segunda ordem em uma estrutura. Dessa forma, Oliveira [10] desenvolveu uma expressão capaz de relacionar estes parâmetros, apresentada no próximo item.

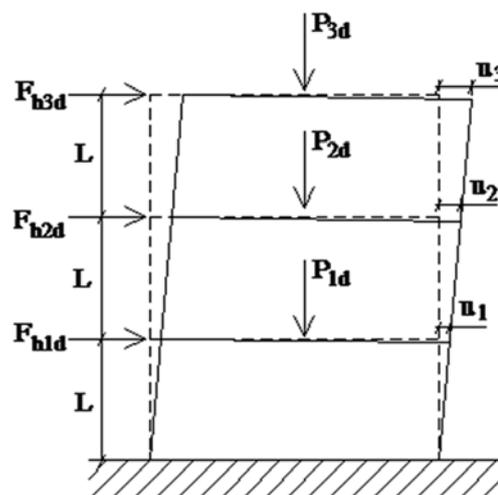
#### 5. Relação entre os coeficientes $\gamma_z$ e $B_2$

A figura [1] mostra uma estrutura composta por três pavimentos de comprimentos iguais ( $L$ ). Nesta figura, estão também representadas as forças de cálculo verticais ( $P_{id}$ ) e horizontais ( $F_{hid}$ ) atuantes em cada pavimento  $i$ , juntamente com seus respectivos deslocamentos horizontais ( $u_i$ ).

Para o cálculo de  $\gamma_z$ , equação (1), é necessário determinar os valores de  $M_{1,tot,d}$  e  $\Delta M_{tot,d}$ . Pelas equações (2) e (3), tem-se, respectivamente:

$$M_{1,tot,d} = (F_{h1d} \cdot L + F_{h2d} \cdot 2L + F_{h3d} \cdot 3L) = F_{h1d} \cdot L + 2 F_{h2d} \cdot L + 3 F_{h3d} \cdot L \tag{6}$$

Figura 1 – Estrutura de três pavimentos submetida às forças verticais e horizontais



$$\Delta M_{tot,d} = P_{1d} u_1 + P_{2d} u_2 + P_{3d} u_3 \quad (7)$$

O coeficiente  $B_2$ , dado pela equação (5), apresenta valores diferenciados para cada pavimento da estrutura. Assim, denominando-se o coeficiente  $B_2$  do pavimento  $i$  de  $B_{2,i}$  e as parcelas  $(L \cdot \Sigma H_{sd})$  e  $(\Delta_{oh} \cdot \Sigma N_{sd})$  de  $M_i$  e  $\Delta M_i$ , respectivamente, obtém-se:

■ 1º pavimento:

$$M_1 = L \cdot (F_{h1d} + F_{h2d} + F_{h3d}) = F_{h1d} L + F_{h2d} L + F_{h3d} L \quad (8)$$

$$\Delta M_1 = (u_1 - 0) \cdot (P_{1d} + P_{2d} + P_{3d}) = P_{1d} u_1 + P_{2d} u_1 + P_{3d} u_1 \quad (9)$$

$$B_{2,1} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_1}{M_1}} \Rightarrow B_{2,1} = \frac{1}{\frac{M_1 - \Delta M_1}{M_1}} \Rightarrow (M_1 - \Delta M_1) = \frac{M_1}{B_{2,1}} \quad (10)$$

■ 2º pavimento:

$$M_2 = L \cdot (F_{h2d} + F_{h3d}) = F_{h2d} L + F_{h3d} L \quad (11)$$

$$\Delta M_2 = (u_2 - u_1) \cdot (P_{2d} + P_{3d}) = P_{2d} u_2 + P_{3d} u_2 - P_{2d} u_1 - P_{3d} u_1 \quad (12)$$

$$B_{2,2} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_2}{M_2}} \Rightarrow B_{2,2} = \frac{1}{\frac{M_2 - \Delta M_2}{M_2}} \Rightarrow (M_2 - \Delta M_2) = \frac{M_2}{B_{2,2}} \quad (13)$$

■ 3º pavimento:

$$M_3 = L \cdot (F_{h3d}) = F_{h3d} L \quad (14)$$

$$\Delta M_3 = (u_3 - u_2) \cdot (P_{3d}) = P_{3d} u_3 - P_{3d} u_2 \quad (15)$$

$$B_{2,3} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_3}{M_3}} \Rightarrow B_{2,3} = \frac{1}{\frac{M_3 - \Delta M_3}{M_3}} \Rightarrow (M_3 - \Delta M_3) = \frac{M_3}{B_{2,3}} \quad (16)$$

Somando-se  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , equações (8), (11) e (14), e  $\Delta M_1$ ,  $\Delta M_2$  e  $\Delta M_3$ , equações (9), (12) e (15) resulta:

$$M_1 + M_2 + M_3 = F_{h1d} L + 2F_{h2d} L + 3F_{h3d} L \quad (17)$$

$$\Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 = P_{1d} u_1 + P_{2d} u_2 + P_{3d} u_3 \quad (18)$$

Comparando as equações (17) e (18) com as equações (6) e (7) pode-se escrever:

$$M_{1,tot,d} = M_1 + M_2 + M_3 \quad (19)$$

$$\Delta M_{tot,d} = \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 \quad (20)$$

Substituindo as equações (19) e (20) na equação (1), o coeficiente  $\gamma_z$  fica definido como:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3}{M_1 + M_2 + M_3}} = \frac{1}{(M_1 + M_2 + M_3) - (\Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3)} \cdot \frac{M_1 + M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \quad (21)$$

$$\gamma_z = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{(M_1 - \Delta M_1) + (M_2 - \Delta M_2) + (M_3 - \Delta M_3)}$$

Invertendo a equação (21) tem-se:

$$\frac{1}{\gamma_z} = \frac{(M_1 - \Delta M_1) + (M_2 - \Delta M_2) + (M_3 - \Delta M_3)}{M_1 + M_2 + M_3} \quad (22)$$

Substituindo as equações (10), (13), (16) e (19) na equação (22), obtém-se:

$$\frac{1}{\gamma_z} = \frac{\frac{M_1}{B_{2,1}} + \frac{M_2}{B_{2,2}} + \frac{M_3}{B_{2,3}}}{M_{1,tot,d}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma_z} = \frac{M_1}{M_{1,tot,d} \cdot B_{2,1}} + \frac{M_2}{M_{1,tot,d} \cdot B_{2,2}} + \frac{M_3}{M_{1,tot,d} \cdot B_{2,3}} \quad (23)$$

Finalmente pode-se escrever a equação (23) como:

$$\frac{1}{\gamma_z} = \frac{c_1}{B_{2,1}} + \frac{c_2}{B_{2,2}} + \frac{c_3}{B_{2,3}} \quad (24)$$

sendo as constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  dadas respectivamente por:

$$c_1 = \frac{M_1}{M_{1,tot,d}} = \frac{F_{h1d} \cdot L + F_{h2d} \cdot L + F_{h3d} \cdot L}{F_{h1d} \cdot L + 2F_{h2d} \cdot L + 3F_{h3d} \cdot L} = \frac{F_{h1d} + F_{h2d} + F_{h3d}}{F_{h1d} + 2F_{h2d} + 3F_{h3d}} \quad (25)$$

$$c_2 = \frac{M_2}{M_{1,tot,d}} = \frac{F_{h2d} \cdot L + F_{h3d} \cdot L}{F_{h1d} \cdot L + 2F_{h2d} \cdot L + 3F_{h3d} \cdot L} = \frac{F_{h2d} + F_{h3d}}{F_{h1d} + 2F_{h2d} + 3F_{h3d}} \quad (26)$$

$$c_3 = \frac{M_3}{M_{1,tot,d}} = \frac{F_{h3d} \cdot L}{F_{h1d} \cdot L + 2F_{h2d} \cdot L + 3F_{h3d} \cdot L} = \frac{F_{h3d}}{F_{h1d} + 2F_{h2d} + 3F_{h3d}} \quad (27)$$

Logo, para uma estrutura composta por  $n$  pavimentos, o coeficiente  $\gamma_z$  pode ser calculado em função do coeficiente  $B_2$  como:

$$\frac{1}{\gamma_z} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{B_{2,i}} \quad (28)$$

sendo

$$c_i = \frac{\sum_{j=i}^n F_{hjd}}{\sum_{j=1}^n j \cdot F_{hjd}} \quad (29)$$

Tabela 1 - Características principais dos edifícios analisados

Edifício	Número de pavimentos	Pé-direito (m)	Número de lajes	Número de vigas	Número de pilares	fck (MPa)
I	16	2,90	8	8	15	20
II	18	2,55	11	21	16	30
III	20	2,75	9	10	15	45
IV	30	2,85	4	6	9	20
V	22	2,75	11	20	22	65
VI	15	2,90	9	8	16	25
VII	18	2,88	10	11	16	25
VIII	18	2,70	17	31	28	25
IX	20	2,56	12	27	14	30
X	20	2,90	6	9	12	25

## 6. Aplicações numéricas

Para conduzir o estudo, dez edifícios de médio porte em concreto armado (cujos pavimentos tipos podem ser encontrados em Oliveira [10]) foram processados em primeira e segunda ordem. A tabela [1] resume as principais características das estruturas analisadas.

O processamento dos edifícios foi realizado para as ações verticais (compostas pelas cargas permanentes e pela carga acidental ou sobrecarga) agindo simultaneamente com o carregamento horizontal (correspondente à ação do vento, nas direções paralelas aos eixos X e Y, e calculado de acordo com as prescrições da NBR 6123:1988 [11]). Os coeficientes aplicados às ações, definidos a partir da combinação última normal que considera o vento como a ação variável principal, foram determinados segundo as recomendações da NBR 6118:2007 [4].

As estruturas foram analisadas utilizando modelos tridimensionais no "software" ANSYS-9.0. Para a representação dos pilares e vigas foi empregado o elemento de barra "beam 4", que apresenta seis graus de liberdade em cada nó: três translações e três rotações, nas direções X, Y e Z.

Vale ressaltar que o processamento dos edifícios em segunda ordem foi realizado por meio de uma análise não linear geométrica, reduzindo a rigidez dos elementos estruturais para considerar a não-linearidade física de forma simplificada (foram adotados os

valores iguais a  $0,8 I_c$  para os pilares e  $0,4 I_c$  para as vigas, sendo  $I_c$  o momento de inércia da seção bruta de concreto).

### 6.1 Resultados obtidos

Inicialmente, com os resultados da análise em primeira ordem, foram calculados os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$  para todos os edifícios, nas direções X e Y. As tabelas [2] e [3] apresentam os valores obtidos, juntamente com a classificação das estruturas, em ambas as direções. Entretanto, no caso do coeficiente  $B_2$ , estão apresentados apenas os valores médio ( $B_{2,méd}$ ) e máximo ( $B_{2,máx}$ ) dos pavimentos. Ressalta-se que, segundo Silva [9], uma estrutura pode ser considerada pouco sensível a deslocamentos horizontais se, em todos os seus pavimentos, o coeficiente  $B_2$  não superar o valor de 1,1. Se  $B_2$  for maior que esse valor em pelo menos um pavimento, a estrutura será considerada muito sensível a deslocamentos horizontais. Dessa forma, a classificação dos edifícios é realizada analisando o valor de  $B_{2,máx}$  obtido.

Obseva-se nas tabelas [2] e [3] que, em todos os casos, os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$  forneceram a mesma classificação das estruturas. Além disso, os valores de  $\gamma_z$  e  $B_{2,méd}$  se mostraram extremamente próximos, sendo que a maior diferença, correspondente à direção X do edifício I, gira em torno de 3,4%. Vale comentar também que, em apenas cerca de 17% dos casos,  $B_{2,méd}$  apresentou-se superior a  $\gamma_z$ .

**Tabela 2 - Valores dos coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ , e classificação das estruturas (edifícios I, II, III, IV e V)**

Edifício	Direção	Coeficiente	Valor	Classificação
I	X	$\gamma_z$	1,19	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,15	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,28	Estrutura de nós móveis
	Y	$\gamma_z$	1,14	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,13	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,20	Estrutura de nós móveis
II	X	$\gamma_z$	1,32	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,29	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,47	Estrutura de nós móveis
	Y	$\gamma_z$	1,16	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,17	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,22	Estrutura de nós móveis
III	X	$\gamma_z$	1,06	Estrutura de nós fixos
		$B_{2,méd}$	1,05	Estrutura pouco sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,07	Estrutura de nós móveis
	Y	$\gamma_z$	1,32	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,29	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,44	Estrutura de nós móveis
IV	X = Y	$\gamma_z$	1,30	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,26	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,45	Estrutura de nós móveis
V	X	$\gamma_z$	1,17	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,15	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,23	Estrutura de nós móveis
	Y	$\gamma_z$	1,28	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,28	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,35	Estrutura de nós móveis

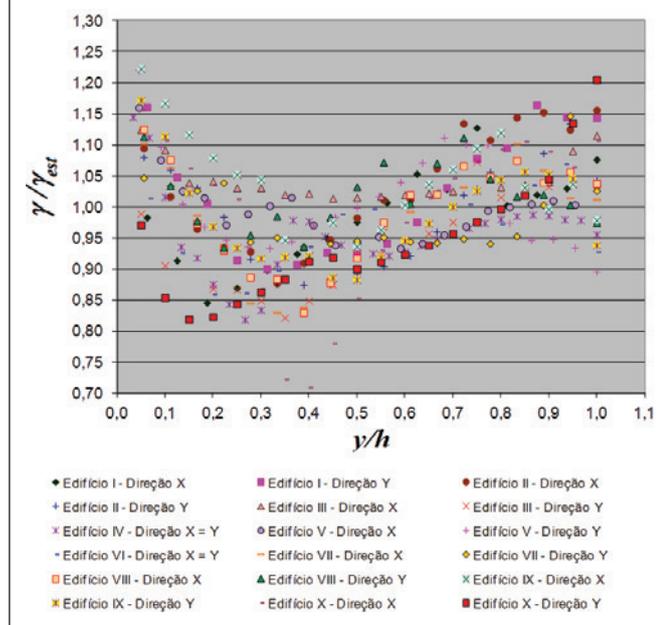
**Tabela 3 – Valores dos coeficientes  $\gamma_z$  and  $B_2$  e classificação das estruturas (edifícios VI, VII, VIII, IX e X)**

Edifício	Direção	Coeficiente	Valor	Classificação
VI	X = Y	$\gamma_z$	1,21	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,18	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,31	Estrutura de nós móveis
	X	$\gamma_z$	1,27	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,25	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,40	Estrutura de nós móveis
VII	Y	$\gamma_z$	1,14	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,14	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,18	Estrutura de nós móveis
	X	$\gamma_z$	1,30	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,28	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,44	Estrutura de nós móveis
VIII	Y	$\gamma_z$	1,22	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,20	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,30	Estrutura de nós móveis
	X	$\gamma_z$	1,31	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,34	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,47	Estrutura de nós móveis
IX	Y	$\gamma_z$	1,29	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,30	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,38	Estrutura de nós móveis
X	X	$\gamma_z$	1,30	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,30	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,44	Estrutura de nós móveis
	Y	$\gamma_z$	1,22	Estrutura de nós móveis
		$B_{2,méd}$	1,18	Estrutura muito sensível a deslocamentos horizontais
		$B_{2,máx}$	1,34	Estrutura de nós móveis

**Tabela 4 – Coeficientes  $\gamma_z$  e valores médios da relação (esforço em segunda ordem/esforço em primeira ordem)**

Edifício	Direção	$\gamma_z$	Pilares		Vigas	
			Força normal	Momento fletor	Força cortante	Momento fletor
I	X	1,19	1,01	1,17	1,01	1,11
	Y	1,14	1,01	1,16	1,01	1,07
II	X	1,32	1,01	1,35	1,02	1,27
	Y	1,16	1,02	1,14	1,03	1,20
III	X	1,06	1,02	1,11	1,03	1,03
	Y	1,32	1,02	1,24	1,04	1,27
IV	X = Y	1,30	1,03	1,23	1,03	1,23
V	X	1,17	1,02	1,16	1,03	1,15
	Y	1,28	1,03	1,28	1,01	1,28
VI	X = Y	1,21	1,02	1,17	1,03	1,20
VII	X	1,27	1,02	1,24	1,04	1,24
	Y	1,14	1,03	1,12	1,04	1,15
VIII	X	1,30	1,02	1,28	1,03	1,32
	Y	1,22	1,02	1,23	1,03	1,20
IX	X	1,31	1,01	1,35	1,02	1,29
	Y	1,29	1,01	1,27	1,02	1,23
X	X	1,30	1,02	1,28	1,03	1,26
	Y	1,22	1,02	1,15	1,03	1,18

**Figura 2 – Variação da razão  $\gamma/\gamma_{est}$  ao longo da altura dos edifícios, em ambas as direções, para os pilares**



### 6.1.1 Avaliação do $\gamma_z$ como coeficiente majorador dos esforços de primeira ordem (momentos fletores, forças normais e cortantes) para a obtenção dos esforços finais

A partir do processamento das estruturas em primeira e segunda ordem, para as ações verticais agindo simultaneamente com as ações horizontais, foi calculada, para todos os pavimentos dos edifícios, a relação entre os esforços obtidos pela análise em segunda ordem e em primeira ordem, nas direções X e Y.

Os esforços levados em conta na análise são apenas os realmente relevantes no dimensionamento estrutural, ou seja, para os pilares, foram considerados os momentos fletores e as forças normais; para as vigas, os momentos fletores e as forças cortantes. Os resultados médios dos pavimentos, juntamente com os coeficientes  $\gamma_z$  obtidos para todos os edifícios, nas direções X e Y, estão apresentados na tabela [4]. Dessa forma, pode-se realizar uma análise comparativa entre os acréscimos sofridos pelos esforços de primeira ordem, quando considerados os efeitos de segunda ordem, e os acréscimos previstos pelo coeficiente  $\gamma_z$ .

Observa-se na tabela [4] que, para todos os edifícios e em ambas as direções, os acréscimos médios obtidos no caso da força normal nos pilares e da força cortante nas vigas são muito pequenos (entre 1% e 4%) e, portanto, geralmente bastante inferiores aos previstos pelo  $\gamma_z$ . Assim, em termos práticos, a majoração dessas forças pelo coeficiente  $\gamma_z$  não se faz necessária, mesmo para altos valores deste (como ocorre, por exemplo, no caso do edifício II, na direção X).

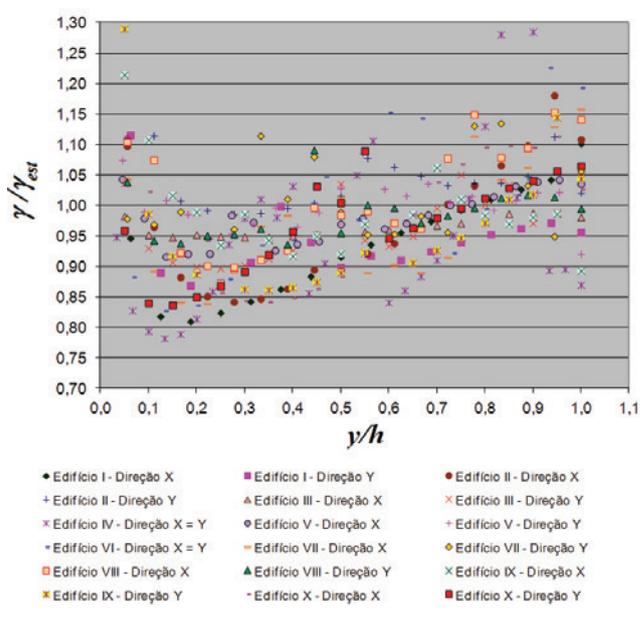
Ainda na tabela [4] verifica-se que, para o momento fletor nos pilares e nas vigas, os acréscimos médios mostram boa proximidade em relação ao  $\gamma_z$ . No caso do momento fletor nos pilares, a maior

diferença entre os acréscimos médios e os previstos pelo  $\gamma_z$  vale cerca de 6% (edifício III, direção Y), a favor da segurança. Para o momento fletor nas vigas, a máxima diferença, correspondente ao acréscimo obtido para o edifício I, na direção X, é da ordem de 6,7%, também a favor da segurança. No entanto, considerando apenas os casos em que a majoração por  $\gamma_z$  estaria contra a segurança, observam-se diferenças máximas inferiores a 5%, para o momento nos pilares (edifício III, direção X), e a 4%, para o momento nas vigas (edifício II, direção Y).

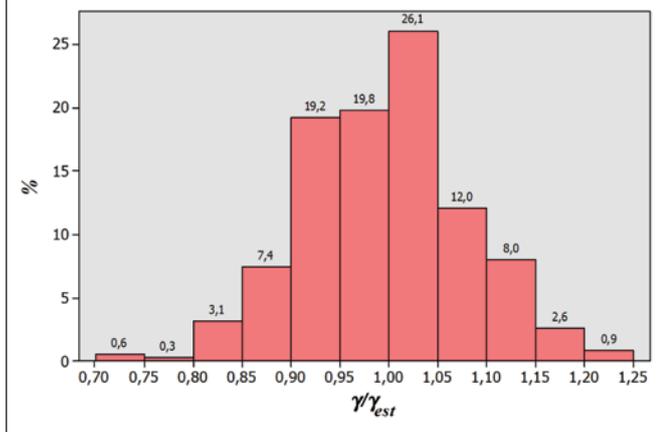
Assim, pode-se afirmar que, a princípio, a obtenção dos momentos finais (primeira ordem + segunda ordem) a partir da majoração dos momentos de primeira ordem por  $\gamma_z$  mostra-se satisfatória. Vale mencionar, entretanto, que o presente estudo foi realizado para estruturas que apresentam valores máximos de  $\gamma_z$  da ordem de 1,3, ou seja, para as quais, segundo a NBR 6118:2007 [4], o processo simplificado de avaliação dos esforços finais utilizando o coeficiente  $\gamma_z$  ainda é válido. Além disso, foram considerados os acréscimos médios das estruturas como um todo, sem levar em conta a variação dos efeitos de segunda ordem ao longo da altura dos edifícios, constatada em diversos trabalhos (Carmo [1], Lima & Guarda [2] e Oliveira [3]). Isto significa que, caso apenas o coeficiente  $\gamma_z$  seja utilizado como majorador dos momentos de primeira ordem, os momentos finais poderiam ser subestimados em alguns pavimentos, e superestimados em outros.

Assim, uma melhor estimativa dos momentos finais poderia ser realizada utilizando também o coeficiente  $B_2$ , que é calculado para cada pavimento da estrutura e cujo valor médio se aproxima de  $\gamma_z$ . O majorador dos momentos de primeira ordem seria então, diferenciado para cada pavimento  $i$  da estrutura, e dado por  $(B_{2,i}/B_{2,méd}) \cdot \gamma_z$ . Dessa forma, considera-se, ao mesmo tempo, a valida-

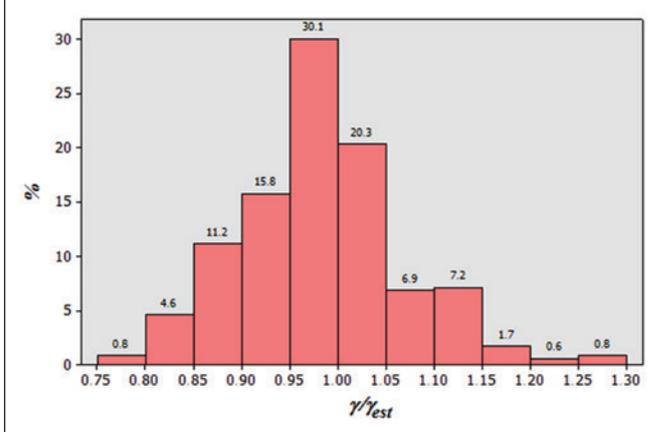
**Figura 3 – Variação da razão  $\gamma/\gamma_{est}$  ao longo da altura dos edifícios, em ambas as direções, para as vigas**



**Figura 4 – Histograma para a variável  $\gamma/\gamma_{est}$  correspondente aos pilares**



**Figura 5 – Histograma para a variável  $\gamma/\gamma_{est}$  correspondente às vigas**



de da utilização do coeficiente  $\gamma_z$  para obter os momentos finais médios dos pavimentos e a capacidade do coeficiente  $B_2$  de levar em conta a variação dos efeitos de segunda ordem ao longo da altura dos edifícios. Esta alternativa para levar em conta a variação dos efeitos de segunda ordem com a altura dos pavimentos nos edifícios de concreto armado será avaliada no próximo item.

**6.1.2 Estudo da variação dos efeitos de segunda ordem com a altura dos pavimentos nos edifícios**

Com os resultados da análise em primeira ordem foi calculado o majorador “estimado” dos momentos de primeira ordem, dado por:

$$\gamma_{est} = \frac{B_{2,i}}{B_{2,méd}} \cdot \gamma_z \tag{30}$$

Foi também calculada, como comentado anteriormente, a relação entre os momentos obtidos pela análise em segunda ordem e em primeira ordem (para os pilares e vigas), ao longo da altura de todos os edifícios, nas direções X e Y.

Esta relação entre os momentos (momento em segunda ordem/momento em primeira ordem) pode ser denominada de majorador dos momentos de primeira ordem, “ $\gamma$ ”, uma vez que representa o valor pelo qual os momentos de primeira ordem devem ser multiplicados para que se obtenham os momentos finais, que incluem

os de segunda ordem. Na situação ideal, na qual a majoração dos momentos de primeira ordem por  $\gamma_{est}$  fornece os momentos finais com 100% de precisão, os valores de  $\gamma$  e  $\gamma_{est}$  devem coincidir para todos os pavimentos dos edifícios, isto é,  $\gamma/\gamma_{est} = 1$  ao longo de toda a altura.

Tendo em vista as considerações apresentadas, foram construídos os gráficos mostrados nas figuras [2] e [3], que representam a variação da razão  $\gamma/\gamma_{est}$  ao longo da altura de todos os edifícios, em ambas as direções, para os pilares e vigas, respectivamente. Nestes gráficos, o eixo das abscissas corresponde à relação  $y/h$ , onde  $y$  representa a altura do pavimento considerado e  $h$  é a altura total da estrutura.

Verifica-se nas figuras [2] e [3] que a maior parte dos valores de  $\gamma/\gamma_{est}$  parece estar situada entre, aproximadamente, 0,85 e 1,10, tanto no caso dos pilares quanto no caso das vigas. Consta-se também que não é possível avaliar com precisão a variação e a distribuição da variável  $\gamma/\gamma_{est}$  a partir da simples observação das figuras [2] e [3]. Assim, para uma melhor avaliação dos resultados obtidos, foi realizada uma análise estatística, utilizando o “software” MINITAB-14.

Foram calculadas as medidas de tendência central (média e mediana) e de variabilidade (desvio padrão, coeficiente de variação, mínimo e máximo) para a variável envolvida no estudo, a relação  $\gamma/\gamma_{est}$ . Os resultados obtidos encontram-se na tabela [5]. Para visualizar graficamente a distribuição da variável  $\gamma/\gamma_{est}$  foram construídos os histogramas apresentados nas figuras [4] e [5], correspondentes aos pilares e vigas, respectivamente.

**Tabela 5 – Medidas descritivas básicas para a variável  $\gamma/\gamma_{est}$**

Variável	Tamanho da amostra (n)	Média	Desvio padrão	Coefficiente de variação (%)	Mínimo	Mediana	Máximo
$\gamma/\gamma_{est}$ pilares	349	0,991	0,084	8,442	0,709	0,992	1,222
$\gamma/\gamma_{est}$ vigas	349	0,978	0,085	8,677	0,782	0,973	1,290

Nota-se na tabela [5] que a relação  $\gamma/\gamma_{est}$  varia de 0,71 a 1,29, sendo a média obtida inferior a 1,0, tanto para os pilares quanto para as vigas. Verifica-se também que aproximadamente 50% dos valores de  $\gamma/\gamma_{est}$  são menores que 0,992 no caso dos pilares e 0,973 no caso das vigas. Além disso, pode-se considerar pequena a variabilidade de  $\gamma/\gamma_{est}$ , uma vez que os coeficientes de variação obtidos encontram-se entre 8% e 9%. Vale comentar que o coeficiente de variação é uma medida que expressa a variabilidade em termos relativos, comparando o desvio padrão com a média, e pode ser considerado pequeno quando não ultrapassa 30%. Observando os histogramas das figuras [4] e [5], verifica-se que a razão  $\gamma/\gamma_{est}$  apresenta valor inferior a 1,05 em aproximadamente 77% dos casos para os pilares e 83% dos casos para as vigas. Isto significa que, para a maior parte das situações, a majoração dos momentos em primeira ordem por  $\gamma_{est}$  forneceria um erro máximo contra a segurança inferior a 5%. Constata-se também que, no caso dos pilares, as freqüências são maiores para valores de  $\gamma/\gamma_{est}$  situados entre 0,90 e 1,05. Para as vigas, a freqüência é mais alta no intervalo  $0,95 \leq \gamma/\gamma_{est} < 1,00$ .

## 7. Considerações finais

Neste trabalho apresentou-se uma alternativa para estimar o majorador dos momentos de primeira ordem que deve ser aplicado em cada pavimento das estruturas de concreto armado, a partir dos valores obtidos para os coeficientes  $\gamma_z$  e  $B_2$ , utilizados para avaliar os efeitos de segunda ordem em estruturas de concreto armado e de aço, respectivamente. Para conduzir o estudo, diversos edifícios de médio porte em concreto armado foram analisados em primeira e segunda ordem utilizando o "software" ANSYS-9.0, e o processo simplificado de obtenção dos momentos finais foi avaliado levando-se em conta a variação dos efeitos de segunda ordem ao longo da altura das estruturas.

Definiu-se a relação  $\gamma/\gamma_{est}$ , sendo " $\gamma$ " denominado de majorador dos momentos de primeira ordem (relação entre os momentos obtidos pela análise em segunda e em primeira ordem, para os pilares e vigas, ao longo da altura dos edifícios) e  $\gamma_{est}$  o majorador "estimado" dos momentos de primeira ordem, diferenciado para cada pavimento  $i$  da estrutura, e dado por  $(B_{2,i}/B_{2,méd}) \cdot \gamma_z$ . Observou-se que a razão  $\gamma/\gamma_{est}$  variou de 0,71 a 1,29, sendo as médias e medianas obtidas inferiores a 1,0, tanto para os pilares quanto para as vigas. Além disso, em aproximadamente 77% dos casos para os pilares e 83% dos casos para as vigas, a razão  $\gamma/\gamma_{est}$  apresentou-se inferior a 1,05. Sendo assim, para a maior parte das situações analisadas, a majoração dos momentos em primeira ordem pelo majorador estimado  $\gamma_{est}$  forneceria um erro máximo contra a segurança inferior a 5%.

Finalmente, sugere-se, como novas pesquisas, realizar outros estudos sobre o assunto, contemplando um maior número de edifícios e estruturas que apresentem porte mais elevado ou irregularidades na geometria, como, por exemplo, mudanças bruscas de inércia e de pés-direitos entre os pavimentos.

## 8. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Programa Institucional de Auxílio a Pesquisa de Doutores Recém-Contratados da PRPq/UFMG o apoio concedido.

## 9. Referências bibliográficas

- [01] CARMO, R.M.S. Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1995.
- [02] LIMA, J.S.; GUARDA, M.C.C. Comparação entre o parâmetro alfa e o coeficiente  $\gamma_z$  na análise da estabilidade global de edifícios altos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 41., Salvador. *Anais*, 1999.
- [03] OLIVEIRA, D.M. Parâmetros de instabilidade global das estruturas de concreto armado segundo a nova NBR-6118. Belo Horizonte. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.
- [04] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- [05] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de revisão da NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2000.
- [06] FRANCO, M.; VASCONCELOS, A.C. Practical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro. *Proceedings*, p.307-323, 1991.
- [07] VASCONCELOS, A.C. Revisão da NB-1: O problema dos efeitos de 2ª ordem. *Jornal TQS News*, n.3, Out., p.10-11, 1996.
- [08] AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION – AISC. Load and resistance factor design specification for structural steel buildings. Chicago, 1999.
- [09] SILVA, R.G.L. Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em edifícios de aço utilizando métodos aproximados e análise rigorosa. Belo Horizonte. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- [10] OLIVEIRA, D.M. Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração das não-linearidades física e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado. Belo Horizonte. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.
- [11] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.