

## Comparative analysis of design models for concrete corbels

### *Análise comparativa de modelos de cálculo para consolos de concreto*

D. L. ARAÚJO <sup>a</sup>  
dlaraujo@ufg.br

A. P. SILVA NETO <sup>a</sup>  
antonioneto117@hotmail.com

F. A. LOBO <sup>a</sup>  
faustinhoalobo@gmail.com

M. K. EL DEBS <sup>b</sup>  
mkdebs@sc.usp.br

#### Abstract

The main objective of this paper is performing a comparative analysis of some design models for precast concrete corbels. For this, it was analyzed design models from Brazilian (NBR 9062) and European (EUROCODE 2) Codes and a US design handbook (PCI). Moreover, three analytical models showed in the literature are analyzed. The objective of this comparative is identifying the best design models to represent the failure load of concrete corbels by the tie yields or by the concrete crushing. Moreover, it is intended to evaluate the contribution of horizontal stirrups to resistance of concrete corbels. For this, a database was assembled from test results of concrete corbels carried out by several researchers and they are showed in the literature. The design models were applied to this database and from statistical tools, adjustments coefficients are recommended to be applied on these design models to take into account the results dispersion found in the analysis.

**Keywords:** corbels, precast concrete, design models, horizontal stirrup.

#### Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise comparativa de alguns modelos de cálculo para consolos de concreto pré-moldado. Para isso, são analisados os modelos de cálculo das normas brasileiras (NBR 9062) e europeia (EUROCODE 2) e de um manual de projeto norte-americano (PCI). Além disso, são analisados três modelos de cálculo sugeridos na literatura. Busca-se nessa comparação identificar os modelos que melhor representam a força de ruína dos consolos, seja pelo escoamento do tirante ou pelo esmagamento do concreto da biela. Além disso, busca-se identificar a contribuição da armadura de costura na resistência do consolo. Para isso, foi montado um banco de dados a partir de resultados de ensaios de consolos de concreto realizados por diversos pesquisadores presentes na literatura, no qual os modelos em questão foram aplicados. Utilizando-se de ferramentas estatísticas, são definidos coeficientes de ajustes a serem aplicados aos modelos para uso em projeto e que levam em conta a dispersão de resultados encontrada na análise.

**Palavras-chave:** consolos, concreto pré-moldado, modelos de cálculo, armadura de costura.

<sup>a</sup> Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO, Brasil;  
<sup>b</sup> Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

### 1. Introdução

O uso de concreto pré-moldado vem crescendo gradativamente na sociedade, o que faz com que a necessidade por aprimorar seus modelos de cálculos se torne cada vez mais importante. Esse crescimento ocorre por conta das vantagens de se utilizar esse processo construtivo. Ao se utilizar elementos pré-moldados na construção, ocorre uma significativa redução no prazo de execução da mesma, além do fato de que as peças pré-moldadas apresentam um melhor acabamento e um melhor controle de qualidade, podendo, muitas das vezes, ficarem aparentes na edificação sem que haja significativo prejuízo estético.

Um desses elementos pré-moldados é o consolo, que é um elemento estrutural que se projeta normalmente dos pilares e serve de apoio a outros elementos estruturais, como vigas e lajes. Apesar do consolo de concreto ser um elemento bem conhecido, existem diferentes modelos de cálculo que levam a diferentes arranjos de armadura.

Na maioria dos modelos de cálculo, o projeto de consolos é realizado a partir da simplificação de sua geometria por meio de modelos de bielas e tirantes. Essa simplificação é possível porque surgem nos consolos regiões tracionadas e regiões comprimidas que formam, aproximadamente, uma treliça no interior do consolo. Na região tracionada é colocado o tirante de aço para resistir às tensões de tração e na região comprimida é verificada a resistência do concreto para suportar a força de compressão. Além disso, surgem linhas de tração ao longo da altura do consolo, mesmo que não tão concentradas como na região do tirante. Por isso, algumas normas recomendam a colocação de uma armadura de

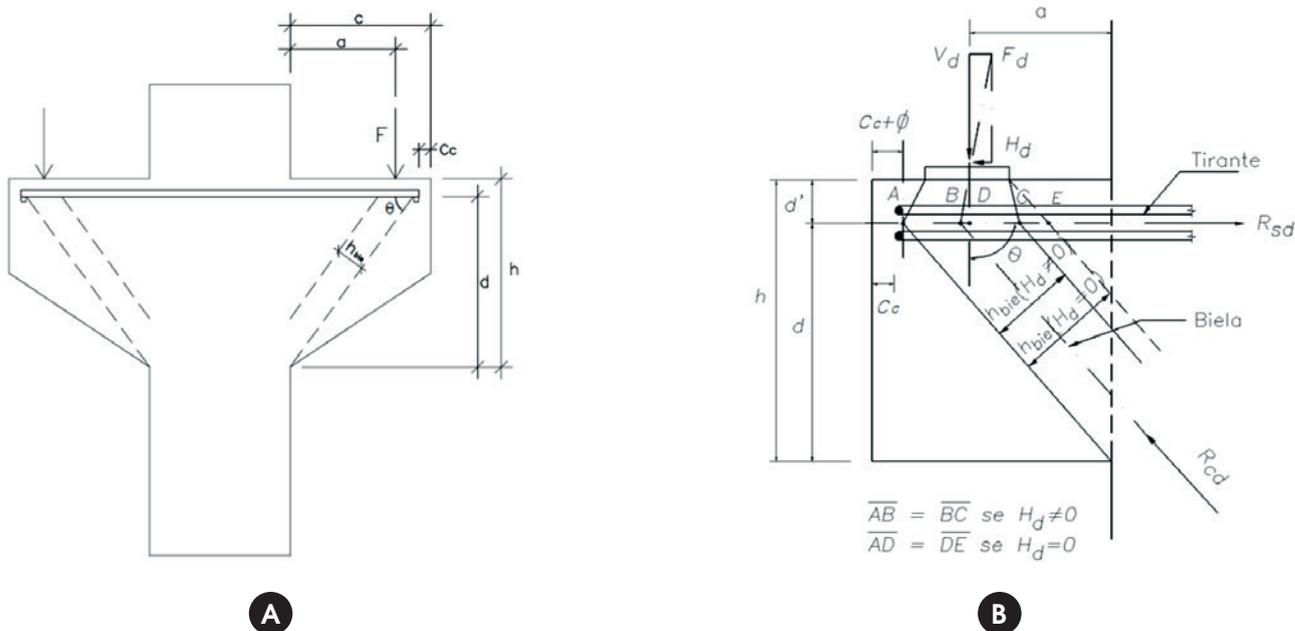
costura longitudinal espaçada nessa região a fim de combater esses esforços de tração.

Foram escolhidas para análise a norma brasileira ABNT NBR 9062 [1] e a norma europeia EUROCODE 2 [2]. Além disso, foi escolhido o modelo proposto pelo manual do Precast Concrete Institute- PCI [3] por também ser de ampla aplicação no projeto de estruturas de concreto pré-moldado. Esses modelos apresentam diferentes recomendações para o dimensionamento do tirante, entretanto a principal diferença entre eles reside na verificação da resistência da biela comprimida. Além disso, eles não consideram a armadura de costura em sua formulação, apesar da ABNT NBR 9062 e do EUROCODE 2 exigirem a colocação da armadura de costura.

Devido à ausência de modelos de cálculo adequados, muitas vezes a armadura de costura é definida como uma fração da armadura dimensionada para o tirante, como no caso da norma ABNT NBR 9062. Por essa razão, além dos modelos de normas e códigos de projeto, são analisados três modelos analíticos formulados com a presença da armadura de costura. O primeiro é uma adaptação proposta por Fernandes e El Debs [4] do modelo clássico apresentado por Leonhardt e Mönning [5], o segundo é uma adaptação do modelo proposto por Hagberg [6] e o terceiro modelo foi proposto por Campione e colaboradores [7].

Utilizando-se de ferramentas estatísticas, são definidos coeficientes de ajustes a serem aplicados aos modelos para uso em projeto e que levam em conta a dispersão de resultados observados a partir da comparação com o banco de dados montado com base em trabalhos experimentais encontrados na literatura [8-21]. Esse banco de dados é formado por 62 consolos curtos, isto é, com relação  $a/d$  variando entre 0,5 e 1,0 e com resistência à compres-

Figura 1 - (a) Geometria do modelo e (b) largura da biela segundo a norma ABNT NBR 9062 (1)



são do concreto variando de 25 MPa a 105 MPa. Além disso, foram considerados apenas consolos ensaiados sem a presença de força horizontal.

## 2. Modelos de cálculo para consolos

Os modelos recomendados pelas normas e códigos são voltados para execução de projetos. Por conta disso, elas definem as equações de forma que, a partir do valor da força que será aplicada no consolo e de sua geometria, seja possível obter os valores da área de aço do tirante e da resistência da biela comprimida de concreto para suportar essa força. Entretanto, para se analisar a precisão de cada modelo, as suas equações devem ser trabalhadas para se obter um novo equacionamento de forma que, ao se fornecer a geometria do consolo, a área de aço do tirante e a resistência do concreto, seja possível estimar a força máxima que o consolo suporta. Assim, essa força pode ser comparada com a força de ruína dos consolos presentes no banco de dados experimentais levantados, ou seja, a força relativa ao escoamento do tirante ou a força relativa ao esmagamento do concreto da biela.

Neste item são apresentadas as equações deduzidas para os seis modelos de cálculo de consolos escolhidos para análise. Os três primeiros modelos apresentados são baseados na teoria de bielas e tirantes e fornecem uma geometria fixa para a treliça resistente, sem considerar a presença da armadura de costura. Já os três modelos analíticos escolhidos consideram a presença da armadura de costura na formulação do mecanismo resistente dos consolos. Desses, nos dois primeiros modelos a armadura de costura é considerada por meio da modificação da posição do tirante que forma a treliça resistente obtida do modelo de biela e tirante. Além disso, a largura da biela comprimida é tomada com valor constante. Já o terceiro modelo propõe uma treliça secundária formada pela armadura de costura e que resiste a parte da força aplicada no consolo. Neste modelo, a largura da biela varia em função do equilíbrio de momento fletor no consolo.

### 2.1 Modelo da ABNT NBR 9062

O primeiro modelo analisado é o normatizado no Brasil pela ABNT NBR 9062 [1] para projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado, sendo o consolo simplificado pelo modelo de biela e tirante mostrado na Figura 1a. Nesse modelo, a ruptura pode ocorrer pelo escoamento do tirante ou pela ruptura da biela comprimida. Entretanto, nele não é prevista a verificação dos nós formados pela treliça imaginária que serve para cálculo dos esforços, como ocorre nos demais modelos.

Segundo a norma ABNT NBR 9062, a área de aço do tirante é determinada pela equação (1).

$$A_s = \left( 0,1 + \frac{a}{d} \right) \frac{V_d}{f_{yd}} \quad (1)$$

Isolando-se a força, encontra-se a equação (2) que pode ser utilizada para determinar a força relativa ao escoamento do tirante do consolo ( $V_d$ ), conhecidas a geometria do consolo, a tensão de escoamento do aço e a área de aço do tirante.

$$V_d = \frac{A_s f_{yd}}{\left( 0,1 + \frac{a}{d} \right)} \quad (2)$$

Para a biela comprimida, a norma ABNT NBR 9062 propõe a geometria mostrada na Figura 1b. A partir dessa geometria, é possível determinar pela equação (3) a força de ruína do consolo ( $V_d$ ) quando ela se dá na biela comprimida conhecidas as dimensões do consolo e a resistência à compressão do concreto. Essa equação foi obtida a partir da equação (3), onde o valor da força na biela ( $F_{bie}$ ) foi substituído pelo produto da resistência do concreto pela área da seção transversal da biela.

$$F_{bie} = \frac{V_d}{\sin \theta} \quad (3)$$

$$f_{cd} b (l \sin \theta) = \frac{V_d}{\sin \theta} \quad (4)$$

$$V_d = f_{cd} b 2 (c - a - \phi - c_c) \sin^2 \theta \quad (5)$$

$$V_d = \frac{2 f_{cd} b d^2 (c - \phi - c_c - a)}{d^2 + (c - c_c - \phi)^2} \quad (6)$$

### 2.2 Modelo do EUROCODE 2

O segundo modelo de cálculo estudado é o recomendado pelo EUROCODE 2 [2], que adota o modelo de biela e tirante mostrado na Figura 2a. Entretanto, para o dimensionamento do consolo curto foi adotado o modelo simplificado mostrado na Figura 2b, o que o torna semelhante ao modelo da norma ABNT NBR 9062, com a verificação adicional da resistência do nó 1 [22].

Realizando o equilíbrio da treliça da Figura 2b e impondo a verificação adicional da resistência do nó, chega-se à equação (7) para avaliação da força de ruína do consolo devida ao escoamento do tirante e à equação (8) para avaliação da força de ruína do consolo devida ao esmagamento do concreto na biela.

$$V_d = \sqrt{\left[ a b k_1 \left( 1 - \frac{f_{cd}}{250 \times 10^6} \right) \frac{f_{cd}}{\gamma_c} \right]^2 + 1,6 b d f_{yd} A_s k_1 \left( 1 - \frac{f_{cd}}{250 \times 10^6} \right) \frac{f_{cd}}{\gamma_c} - a b k_1 \left( 1 - \frac{f_{cd}}{250 \times 10^6} \right) \frac{f_{cd}}{\gamma_c}} \quad (7)$$

$$V_d = 0,8 b d f_{cd} \sqrt{\frac{\left[ \frac{V_d}{b k_1 \left( 1 - \frac{f_{cd}}{250 \times 10^6} \right) \frac{f_{cd}}{\gamma_c}} \right]^2 + 0,04 d^2}{\left[ a + \frac{V_d}{2 b k_1 \left( 1 - \frac{f_{cd}}{250 \times 10^6} \right) \frac{f_{cd}}{\gamma_c}} \right]^2 + 0,64 d^2}} \quad (8)$$

### 2.3 Modelo do PCI

O terceiro modelo estudado é o recomendado pelo PCI [3], sendo o modelo de biela e tirante representado pela treliça mostrada na Figura 3a. No caso de consolos duplos, esse modelo pode ser modificado, obtendo-se a treliça mostrada na Figura 3b. O modelo mostrado na Figura 3a difere do recomendado pelas normas ABNT NBR 9062 e EUROCODE 2 por sugerir uma treliça com mais elementos, sendo os tirantes representados pela armadura do consolo e pela armadura do pilar, que são os trechos MN e NO. Além disso, aparecem duas bielas comprimidas, que são as NP e OP. Já no consolo duplo, aparece apenas uma biela comprimida de cada lado. Dessa forma, esse modelo se torna semelhante ao modelo recomendado pelas demais normas analisadas. Outra aspecto do modelo do

PCI é a exigência da verificação dos nós da treliça.

A partir do equilíbrio da treliça da Figura 3a, ou Figura 3b, e da verificação da segurança do nó *p* dessa treliça, tem-se a distância  $w_s$  que define a geometria da treliça, dada pela equação (9).

$$w_s = \frac{V_d}{0,85 \gamma \beta_n b f_{cd}} \quad (9)$$

A partir dessa equação, é possível determinar a força de ruína do consolo ( $V_d$ ) quando ela se dá pelo escoamento do tirante conhecidas as dimensões do consolo, a tensão de escoamento do aço, a resistência à compressão do concreto e a área de aço do tirante (Eq. 12).

$$A_s = \frac{F_{tir}}{\gamma f_y} \Rightarrow V_d = A_s \gamma f_y \tan \theta \Rightarrow V_d = \frac{A_s \gamma f_y d}{a + \frac{V_d}{2 \times 0,85 \gamma \beta_n b f_{cd}}} \quad (10)$$

$$V_d^2 + 1,7 \gamma \beta_n b f_{cd} a V_d - 1,7 A_s f_y d \gamma^2 \beta_n b f_{cd} = 0$$

∴

$$V_d = \frac{\sqrt{(1,7 \gamma \beta_n b f_{cd} a)^2 + 6,8 A_s f_y d \gamma^2 \beta_n b f_{cd}} - 1,7 \gamma \beta_n b f_{cd} a}{2} \quad (12)$$

Figura 2 - (a) Geometria do modelo do EUROCODE 2 (2) e (b) geometria simplificada

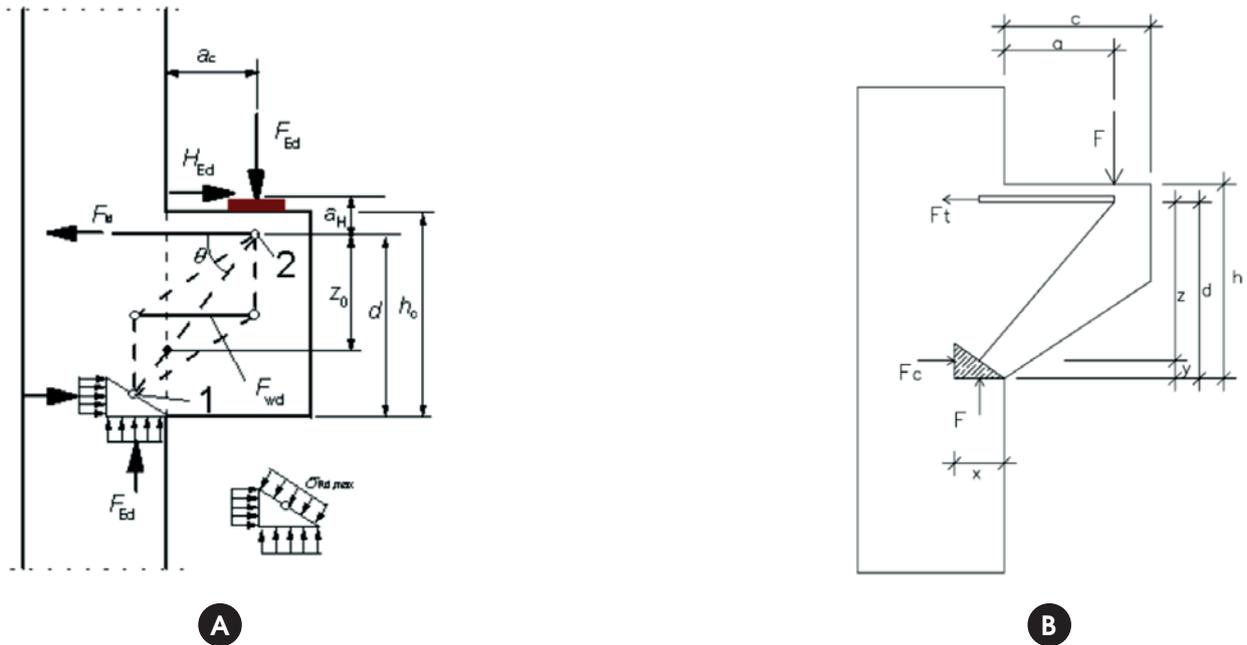
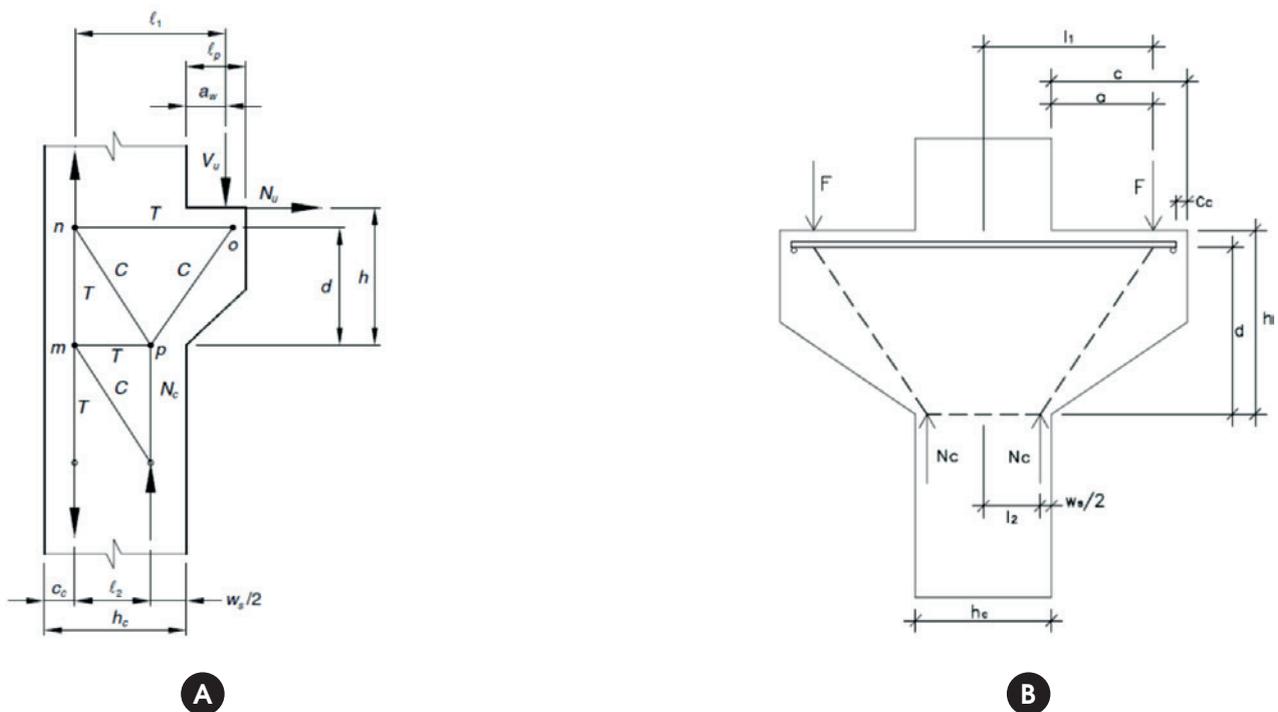


Figura 3 - (a) Geometria do modelo do PCI (3) e (b) adaptação para o caso de consolo duplo



Para o caso de esmagamento da biela comprimida segundo o modelo do PCI, chega-se à equação (13), que é a equação da biela OP da figura 3. Essa equação foi obtida admitindo-se que o nó formado no ponto P apresente a forma de um triângulo retângulo, como admitido pelo PCI [3]. Quando considera-se o nó livre, sem que seja necessariamente um triângulo retângulo, chega-se à equação (14). Foi deduzida a equação apenas para a biela OP, e não para a biela NP, devido ao fato que todos os consolos presentes no banco de dados são duplos e, por isso, não apresentam a biela NP (Figura 3b).

$$V_d = 0,85\gamma\beta_s f_{cd} b d^2 \frac{\left[ (h_c - c_c) - \sqrt{(h_c - c_c)^2 - \frac{2V_d(a + h_c - c_c)}{0,85\gamma\beta_n f_{cd} b}} \right]}{d^2 + \left[ a + \sqrt{(h_c - c_c)^2 - \frac{2V_d(a + h_c - c_c)}{0,85\gamma\beta_n f_{cd} b}} \right]^2} \tag{13}$$

$$V_d = \frac{0,425\gamma\beta_n f_{cd} b}{(a + h_c - c_c)} \left[ (h_c - c_c)^2 - \frac{d^2}{\left( \frac{\beta_n^2}{\beta_s^2} + 1 \right) + \left[ \frac{(2a + h_c - c_c)}{2d} - \sqrt{\left( \frac{h_c - c_c}{2d} \right)^2 - V_d \frac{(a + h_c - c_c)}{1,7\phi f_{cd} b \beta_n d^2}} \right]^2} \right] \tag{14}$$

### 2.4 Modelo propostos por Fernandes e El Debs

O quarto modelo analisado é uma proposta apresentada por Fernandes e El Debs [4]. Neste caso, os autores partem do modelo apresentado por Leonhardt e Mönig [5] e reescrevem as equações de modo a levar em conta a contribuição da armadura de costura que se encontra na região até 2d/3 do topo do consolo (Figura 4). Essa limitação de altura é devida ao fato que a armadura de costura fora dessa faixa tem deformação muito pequena, não contribuindo para a resistência do consolo.

A força de ruína do consolo pelo escoamento do tirante é avaliada pela equação (15), sendo “i” o número de camadas de barras transversais, incluindo o tirante. Ela é resultado da equação do trabalho original de Fernandes e El Debs [4], porém foi aqui modificada para considerar que nem todas as barras da armadura de costura atingem a tensão de escoamento do aço. Para isso, foi introduzido um coeficiente ponderador definido pela relação entre a distância de cada barra à base do consolo (d<sub>i</sub>) e a altura útil do consolo (d). Esse fato é comprovado nos ensaios, onde se constata que, quando o tirante entra em escoamento, as demais armaduras de costura ainda permanecem no regime elástico [16]:

$$V_d = \sum_{i=1}^n A_{si} f_{ydi} \frac{z_i}{a} \frac{d_i}{d} \tag{15}$$

$$z_i = 0,9 d_i$$

Para o caso da ruína por esmagamento do concreto da biela, ob-

tem-se a equação (16) para avaliar a força de ruína do consolo. Neste caso, foi admitido que a largura da biela fosse igual a 0,2 d, como inicialmente apresentado por Leonhardt e Mönig [5].

$$V_d = \frac{0,18 f_{cd} b d^*}{\sqrt{0,9^2 + \left( \frac{a}{d^*} \right)^2}} \tag{16}$$

$$d^* = \sum_{i=1}^n \frac{d_i R_{sdi}}{R_{sd}} \tag{17}$$

$$R_{sdi} = A_{si} f_{ydi}$$

$$R_{sd} = \sum_{i=1}^n R_{sdi} \tag{18}$$

### 2.5 Modelo proposto por Hagberg

O modelo proposto por Hagberg [6] é semelhante ao modelo

proposto por Leonhardt e Mönning e também considera a contribuição da armadura de costura. A diferença deste modelo é a consideração de uma posição fictícia onde o tirante e toda a armadura horizontal situada a uma altura de  $2d/3$  do topo do consolo estaria concentrada (Figura 5). Com isso, determina-se a altura equivalente  $d^*$  e calcula-se a força como se houvesse apenas um tirante nessa posição e com a área de aço resultante da soma do tirante com todas as armaduras de costura localizadas na região de  $2d/3$ . A força máxima vertical suportada pelo consolo, quando a ruína do mesmo se dá pelo escoamento do tirante equivalente, é dada pela equação (19), definida por:

$$V_d = \sum_{i=1}^n A_{sti} f_{ydi} \frac{z_i}{a^*} \quad (19)$$

Em que:

$$a^* = 0,5 \left[ a + \sqrt{a^2 + d^{*2} \omega^* (2 - \omega^*)} \right] \quad (20)$$

$$d^* = \sum_{i=1}^n \frac{d_i R_{sdi}}{R_{sd}} \quad (21)$$

$$R_{sdi} = A_{si} f_{ydi} \frac{d_i}{d} \quad (22)$$

$$R_{sd} = \sum_{i=1}^n R_{sdi}$$

$$\omega^* = \sum_{i=1}^n \frac{A_{si} f_{ydi}}{b d^* f_{cd}^*} \quad (23)$$

$$f_{cd}^* = 0,85 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} \quad (24)$$

$$z_i = d_i - 0,5 \omega^* d^* \quad (25)$$

A equação (22), relativa à força resultante no tirante equivalente

**Figura 4 – Modelo proposto por Fernandes e El Debs (4) baseado no modelo apresentado em Leonhardt e Mönning (5)**

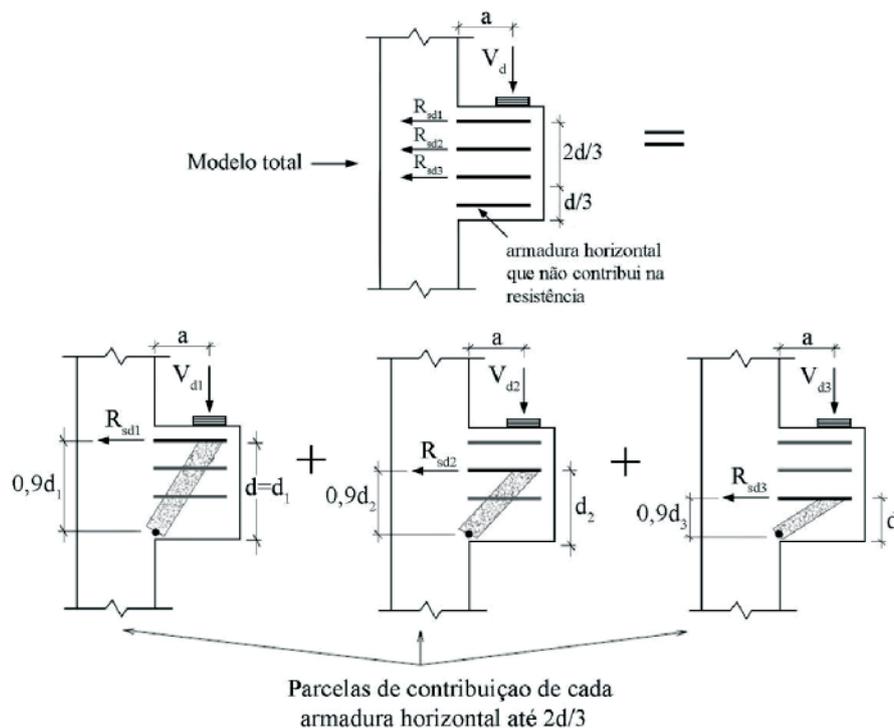
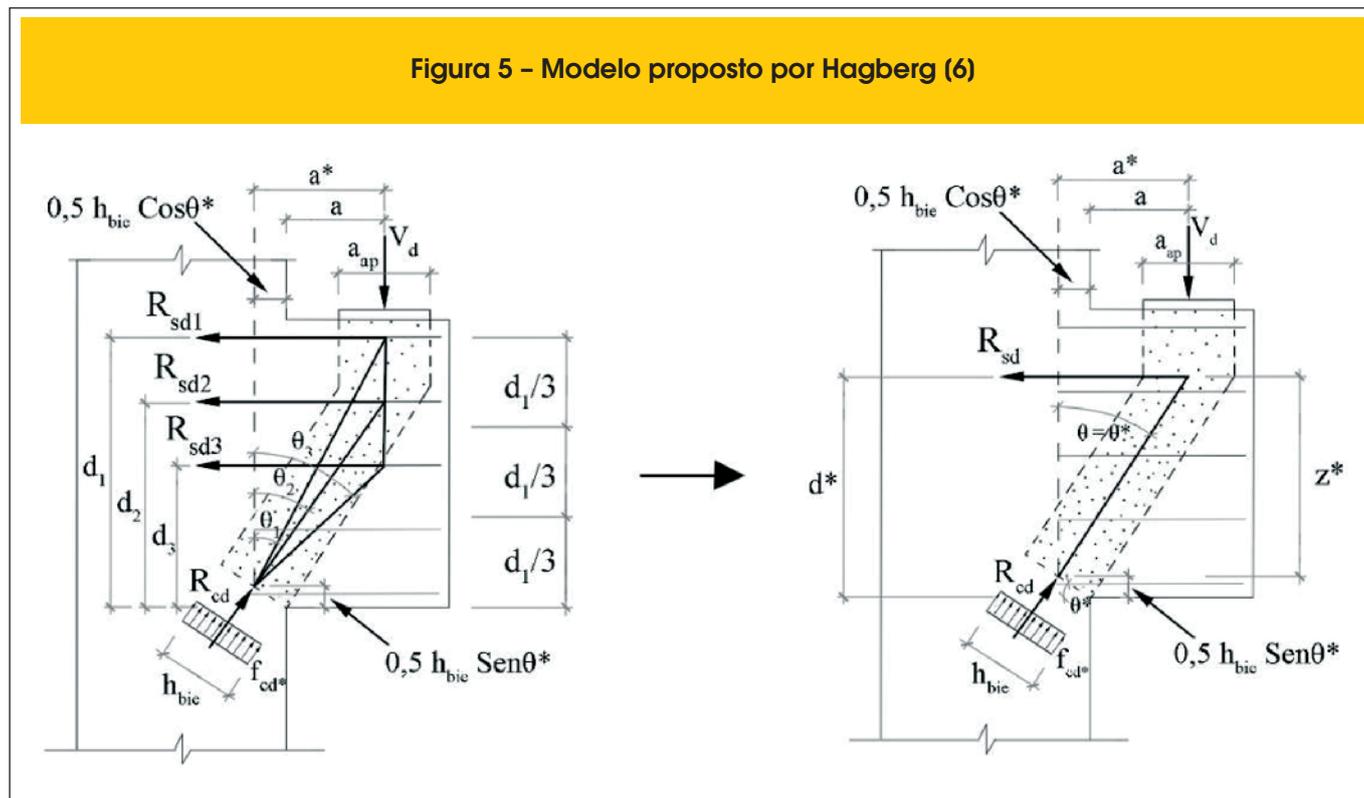


Figura 5 - Modelo proposto por Hagberg (6)



( $R_{sd}$ ), também foi aqui modificada de modo a considerar que a força resistida por cada barra fosse proporcional à relação entre a distância da barra à base do consolo ( $d$ ) e a altura útil do consolo ( $d$ ). Quando a ruína do consolo se dá pelo esmagamento da biela comprimida, a força atuante na biela é obtida pela equação (26), sendo o valor de  $a_{bie}$  apresentado na equação (27).

$$R_{cd} = \frac{V_d a^*}{a_{bie}} \quad (26)$$

Com:

$$a_{bie} = \frac{a^*}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^*}{z^*}\right)^2}} \quad (27)$$

$$z^* = d^* - 0,5 \omega^* d^*$$

A tensão de compressão na biela vale:

$$\sigma_{cd} = \frac{R_{cd}}{h_{bie} b} \quad (28)$$

Da equação (28), fazendo uma inversão para isolar o valor da força aplicada no consolo,  $V_d$ , e agrupando as equações, chega-se à equação (29).

$$V_d = \frac{f_{cd} h_{bie} b a_{bie}}{a^*} \quad (29)$$

Nessa equação,  $h_{bie}$  representa a largura da biela comprimida e que pode ser obtida de diferentes recomendações de projeto. Se for adotada a largura da biela recomendada pela NBR 9062, chega-se à equação (30):

$$h_{bie} = \frac{2d^*(c'-a)}{\sqrt{d^{*2} + c'^2}} \quad (30)$$

Se for adotada a recomendação de Leonhardt e Mönning [5] de se utilizar  $h_{bie} = 0,2 d$ , chega-se à equação (31).

$$V_d = \frac{0,2 f_{cd} b d^* a_{bie}}{a^*} \quad (31)$$

Substituindo o valor de  $a_{bie}$  apresentado na equação (27) na equação (29), admitindo os dois valores para  $h_{bie}$ , tem-se:

$$V_d = \frac{0,2 f_{cd} b d^*}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^*}{z^*}\right)^2}} \quad (32)$$

$$V_d = \frac{2 f_{cd} b d^* (c' - a)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^*}{z^*}\right)^2} \sqrt{d^{*2} - c'^2}} \quad (33)$$

A equação (32) admite a biela com largura igual a 20% da altura de cálculo do consolo e na equação (33) a largura da biela é estimada segundo a norma brasileira NBR 9062.

### 2.6 Modelo proposto por Campione e colaboradores

Campione e colaboradores [7] propõem em seu trabalho dois modelos de cálculo para consolos, um para consolos sem armadura de costura e outro para consolos com armadura de costura. Para o caso de consolos sem armadura de costura, é feito, basicamente, um equilíbrio das barras da treliça simplificada mostrada na Figura 6. A partir do equilíbrio de forças nas barras e da resistência mecânica dos materiais, é determinada a equação para cálculo da força de ruína do consolo pelo escoamento do tirante, equação (34), e pelo esmagamento da biela comprimida, equação (35).

$$V_d = f_{yd} A_s \tan \alpha \quad (34)$$

$$V_d = \xi f'_c b x_c \cos \alpha \sin \alpha \quad (35)$$

A altura da linha neutra,  $x_c$ , pode ser determinada pela equação (36) e o coeficiente  $\xi$ , que estima a diminuição da resistência da biela de compressão devido à atuação de tensões normais de tração à mesma, pode ser determinado pela equação (37).

$$x_c = \left( \sqrt{A_s^2 + \frac{2E_c b A_s d}{E_s}} - A_s \right) \frac{E_s}{b E_c}; E_c = 4700 \sqrt{f_c} \quad (36)$$

$$\xi = \frac{5,8}{\sqrt{f_c}} \frac{1}{\sqrt{1 + 400 \epsilon_r}} \leq \frac{0,9}{\sqrt{1 + 400 \epsilon_r}}; \epsilon_r = \frac{f_y}{E_s} \quad (37)$$

No que se refere aos consolos com armadura de costura, Campione propõem a formação de uma treliça secundária representada pela resultante de forças na armadura de costura. Neste caso, a força atuante no consolo é dividida entre as duas treliças a partir da rigidez de cada uma delas. Define-se, assim, o coeficiente  $\eta$ , a partir da rigidez da treliça principal ( $R_1$ ) e da treliça secundária ( $R_2$ ), que representa a parcela da força aplicada no consolo e que é resistida pela treliça principal. Conhecida essa força, é possível estimar a força máxima que pode ser aplicada ao consolo de modo a provocar o escoamento do tirante, Eq. (41), e a força máxima que provoca a ruína pelo esmagamento do concreto da biela da treliça principal, Eq. (42).

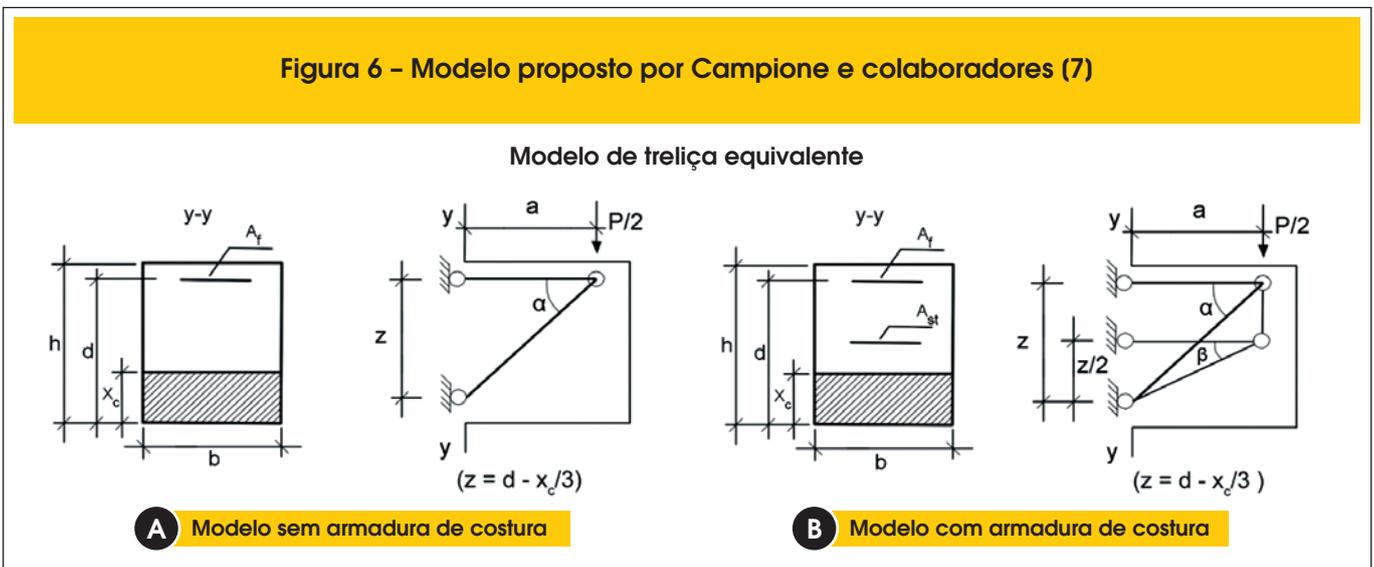
$$R_1 = \frac{1}{\frac{a}{E_s A_{f1} \tan^2 \alpha} + \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{E_c A_{c1} \sin^2 \alpha}}; \quad (38)$$

$$A_{c1} = b x_c \cos \alpha$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{a}{E_s A_{f2} \tan^2 \beta} + \frac{\sqrt{a^2 + z/2^2}}{E_c A_{c2} \sin^2 \beta}}; \quad (39)$$

$$A_{c2} = b x_c \cos \beta$$

Figura 6 - Modelo proposto por Campione e colaboradores (7)



$$\eta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{40}$$

$$V_d = \frac{1}{\eta} f_{yd} A_s \tan \alpha \tag{41}$$

$$V_d = \frac{1}{\eta} \xi f'_c b x_c \cos \alpha \sin \alpha \tag{42}$$

### 3. Resultados e discussões

As equações deduzidas no item anterior foram utilizadas para estimar a força de ruína dos consolos presentes no banco de dados levantado, sendo essa força comparada com os resultados experimentais de modo a se avaliar a precisão dos modelos de cálculo. Para a montagem desse banco de dados, procurou-se identificar, em cada trabalho considerado, a geometria do consolo e as propriedades dos materiais (concreto e aço), informações necessárias para os modelos de cálculo. Além disso, foi levantada, para cada consolo, a força de ruína pelo tirante (considerada pelo início de escoamento do aço do tirante) e a força de ruína pelo esmagamento do concreto da biela comprimida (considerada pela força última resistida pelo consolo). O banco de dados foi dividido

em dois grupos, sendo um de consolos sem armadura de costura e outro de consolos com armadura de costura.

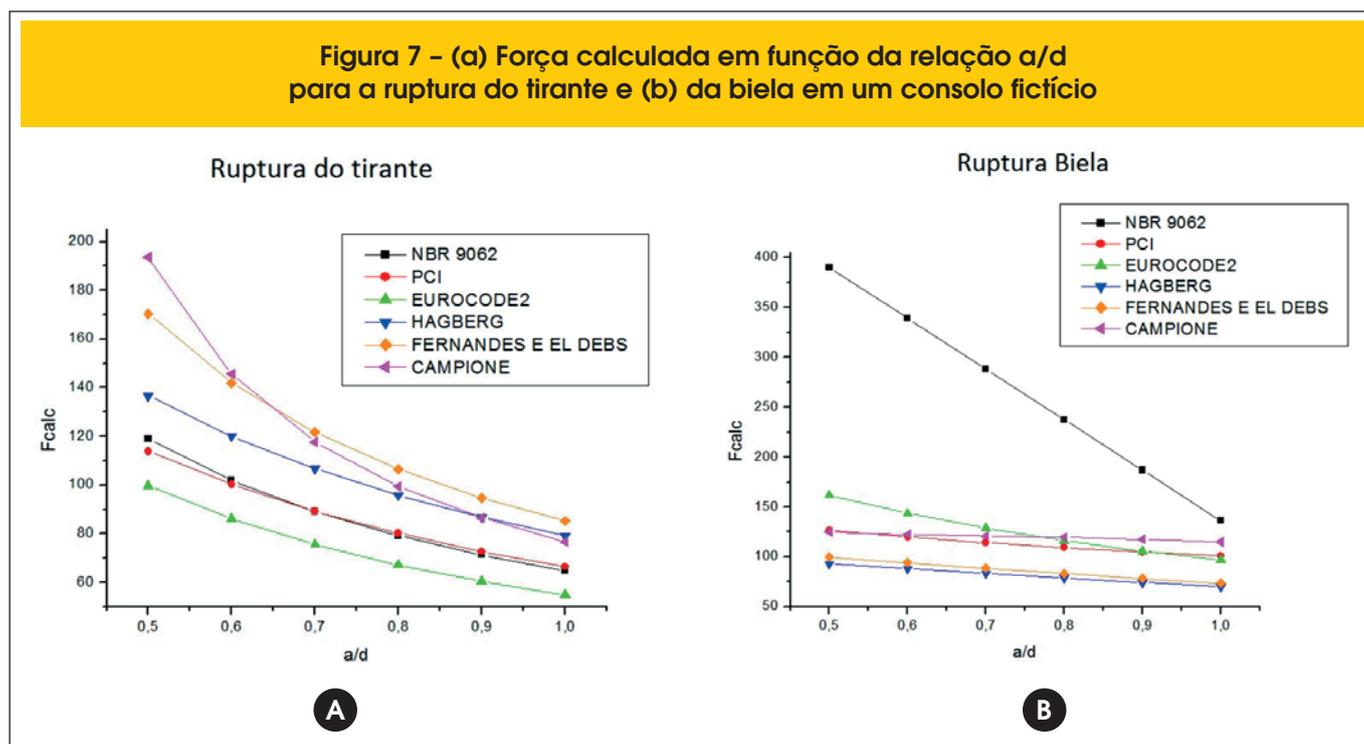
#### 3.1 Comparação entre os modelos de cálculo

A Figura 7 mostra a variação da força estimada pelos seis modelos de cálculo para um consolo curto com relação  $a/d$  variando de 0,5 a 1,0. Para essa análise, adotou-se a geometria, a taxa de armadura e as propriedades dos materiais do consolo 26 ensaiado por Fattuhi [8].

Para os modelos normativos, não foi levada em consideração a armadura de costura. Já para os modelos analíticos, a armadura de costura foi considerada no cálculo da força resistente. No caso dos modelos proposto por Fernandes e El Debs [4] e Hagberg [6], a força de ruína da biela foi calculada apenas para a largura da biela igual a 20% da altura útil do consolo, como apresentado em Leonhardt e Mönning [5]. No caso do modelo proposto por Campione e colaboradores [7], foi apresentado apenas o gráfico para o caso do parâmetro  $\xi$  como proposto no artigo original.

Observa-se da Figura 7a que para a ruptura do tirante há um comportamento relativamente semelhante entre os modelos, sendo que a força avaliada pelo PCI [3] e pela NBR 9062 [1] são praticamente coincidentes. A força de ruína calculada com a consideração da armadura de costura é maior que a obtida dos modelos sem armadura de costura. Além disso, a diferença entre os diversos modelos se mantém aproximadamente constante com a variação da relação  $a/d$ , excepto o modelo proposto por Campione e colaboradores [7].

Da Figura 7b nota-se que há um comportamento semelhante para todos os modelos quando se trata da ruptura por esmagamento do concreto da biela, independente da relação  $a/d$ , com exceção da proposta da norma NBR 9062 [1]. Esse comportamento diferenciado ocorre devido o método de cálculo da largura da biela



proposto pela norma NBR 9062 que, para o consolo escolhido, parece ter resultado em uma largura excessivamente grande para a biela.

Dessa análise, observa-se que o modelo do Eurocode 2 [2] mostra-se mais conservador na avaliação da força de ruína do tirante e que os modelos de Fernandes e El Debs [4] e Hagberg [6] mostram-se mais conservadores na avaliação da força de ruína da biela. Contudo, a principal observação dessa análise é a diferença de resultados entre os diversos modelos de cálculo, o que justifica uma melhor análise dos modelos de cálculo para consolos de concreto.

### 3.2 Análise dos modelos normativos

É apresentado na Tabela 1 um resumo do resultado da aplicação dos modelos de cálculo da norma NBR 9062 [1], do EUROCODE 2 [2] e do PCI [3] aos consolos do banco de dados. Nessa tabela é apresentada a média e o desvio padrão da relação entre a força de ruína experimental ( $F_{exp}$ ) e a força de ruína prevista por cada um dos modelos de cálculo ( $F_{calc}$ ). Neste caso, a força de ruína dos modelos normativos foi calculada sem e com os coeficientes de segurança e/ou majoração definidos em cada modelo. Além disso, foram utilizados os valores médios e não os valores característicos para a resistência do concreto e do aço. A análise é realizada para a ruína pelo escoamento do tirante e para a ruína pelo esmagamento do concreto da biela comprimida.

Na Figura 8 é apresentada de forma gráfica a relação entre a força de ruína obtida dos modelos de cálculo e os resultados experimentais do banco de dados. Nas Figuras 8a e 8b é mostrada a relação  $F_{exp}/F_{calc}$ , em função da área da seção transversal do tirante, para a ruína no tirante. Já nas Figuras 8c e 8d é mostrada a relação  $F_{exp}/F_{calc}$ , em função da resistência à compressão do concreto, para a ruína pelo esmagamento do concreto da biela comprimida.

Inicialmente, é feita a análise sem a consideração dos coeficientes de minoração e/ou majoração definido em cada modelo. A Tabela 1 mostra que no caso de consolos sem armadura de costura, se a ruína ocorrer pelo escoamento do tirante, o modelo de cálculo da NBR 9062 é o que mais se aproxima dos resultados experimentais (diferença média de 4%). Já o modelo do EUROCODE 2 é o mais conservador (diferença média de 32%). A diferença média entre os resultados dos modelos de cálculo recomendados pela NBR 9062 e pelo PCI foi de apenas 3%, indicando que ambos os modelos representaram com precisão os valores experimentais.

Analisando a ruína pelo escoamento do tirante dos consolos com armadura de costura, nota-se um sensível aumento da resistência

dos consolos devido a presença da armadura de costura. Neste caso, todos os três modelos normativos forneceram valores inferiores aos observados no banco de dados, sendo o modelo de cálculo do PCI o que mais se aproximou dos valores experimentais (diferença média de 20%) e o modelo do EUROCODE 2 o mais conservador (diferença média de 67%). Vale lembrar que esses modelos de cálculo não levam em conta o efeito da armadura de costura na resistência do consolo, o que justifica o aumento da relação  $F_{exp}/F_{calc}$  quando é adicionada armadura de costura ao consolo. De fato, trabalhos anteriores mostraram que a presença da armadura de costura pode aumentar de 30% a 50% a força de ruína do consolo quando comparado aos mesmos consolos sem armadura de costura [23].

Fazendo um teste de hipótese da relação  $F_{exp}/F_{calc}$  para a ruína pelo escoamento do tirante, com intervalo de confiança de 95%, conclui-se que nos modelos normativos da NBR 9062 e do PCI essa relação é significativamente igual a 1,0. Com isso, pode-se afirmar que esses modelos normativos estimam com precisão a força de ruína pelo tirante nos consolos sem armadura de costura. Já no modelo do EUROCODE 2, essa relação é significativamente diferente de 1,0. O mesmo ocorre com os três modelos normativos quando são aplicados aos consolos com armadura de costura, de onde se conclui que esses modelos não estimam com precisão a força de ruína pelo escoamento do tirante nos consolos com armadura de costura.

Quando se compara a força de ruína pelo esmagamento do concreto da biela nos consolos sem armadura de costura, nota-se da Tabela 1 que os modelos de cálculo recomendados pela NBR 9062 e pelo EUROCODE 2 podem ser contrários à segurança. Já o modelo de cálculo recomendado pelo PCI mostra-se mais preciso, com uma diferença média de 7% em relação aos resultados experimentais, e a favor da segurança. Contudo, foi observado elevado desvio padrão na análise da ruína da biela comprimida.

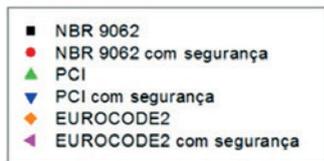
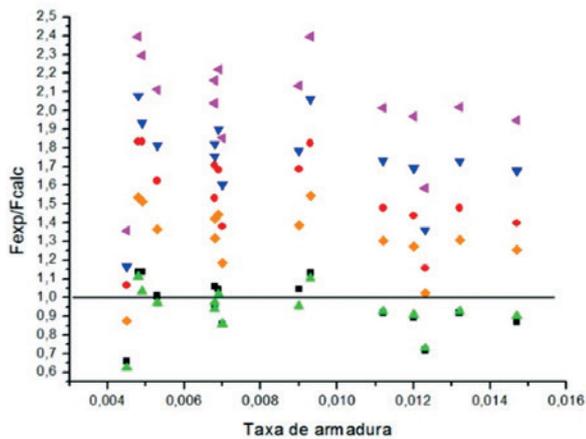
Quando se compara a força de ruína pelo esmagamento do concreto da biela nos consolos com armadura de costura, o modelo da NBR 9062 mostra-se mais preciso (diferença média de 15%) e o modelo do EUROCODE 2 mostra-se, em média, contrário à segurança. O teste de hipótese mostra que, com intervalo de confiança de 95%, a relação  $F_{exp}/F_{calc}$  é significativamente igual a 1,0 apenas para o modelo da NBR 9062. Contudo, também foi observado elevado desvio padrão na análise da ruína da biela comprimida nos consolos com armadura de costura.

Na sequência, é realizada a mesma análise, porém incluindo os coeficientes de minoração e/ou majoração definido em cada

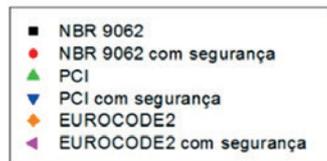
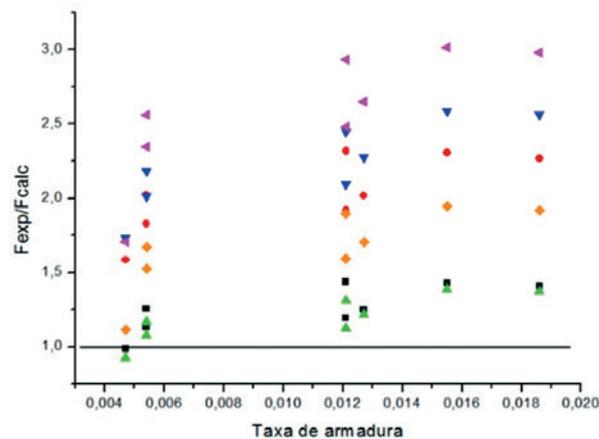
**Tabela 1 – Comparação dos modelos de cálculo com resultados experimentais ( $F_{exp}/F_{calc}$ ) para os modelos normativos**

Consolo	Tipo de ruína	NBR 9062 (1)	NBR 9062 (1) com segurança	PCI (3)	PCI (3) com segurança	EUROCODE 2 (2)	EUROCODE 2 (2) com segurança
Sem armadura de costura	Tirante	0,96 ± 0,14	1,54 ± 0,23	0,93 ± 0,13	1,74 ± 0,24	1,32 ± 0,18	2,03 ± 0,28
	Biela	0,83 ± 0,47	1,63 ± 0,92	1,07 ± 0,43	1,99 ± 0,80	0,84 ± 0,50	1,88 ± 1,11
Com armadura de costura	Tirante	1,26 ± 0,16	2,03 ± 0,26	1,20 ± 0,16	2,24 ± 0,29	1,67 ± 0,27	2,58 ± 0,43
	Biela	1,15 ± 0,45	2,23 ± 0,87	1,30 ± 0,40	2,42 ± 0,76	0,85 ± 0,33	1,87 ± 0,66

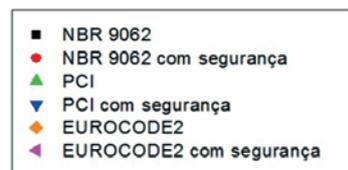
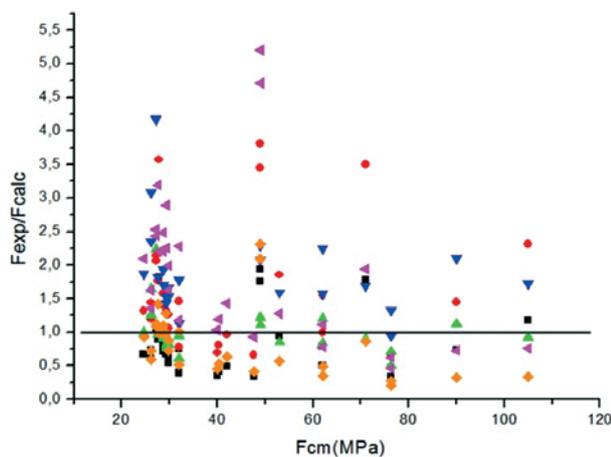
Figura 8 - Comparação dos modelos de cálculo com resultados experimentais para os modelos da ABNT NBR 9062 (1), do EUROCODE 2 (2) e do PCI (3)



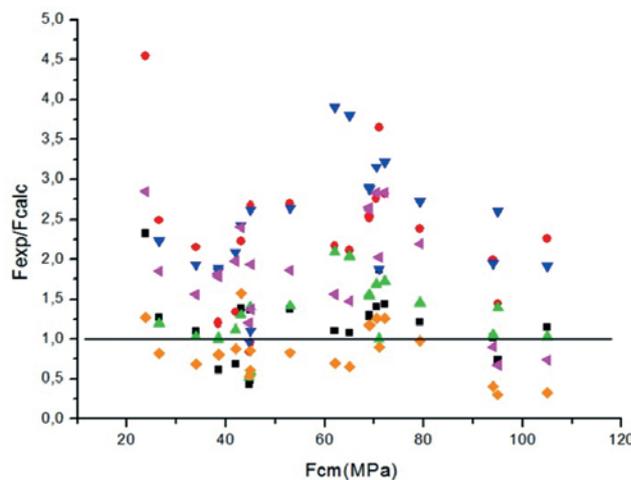
**A** Consolos sem armadura de costura e que romperam pelo escoamento do tirante



**B** Consolos com armadura de costura e que romperam pelo escoamento do tirante



**C** Consolos sem armadura de costura e que romperam pelo esmagamento da biela comprimida



**D** Consolos com armadura de costura e que romperam pelo esmagamento da biela comprimida

**Tabela 2 - Comparação dos modelos analíticos com resultados experimentais ( $F_{exp}/F_{calc}$ )**

Modelo analisado		Tipo de ruína	
		Tirante	Biela
Proposta de Hargberg (6) para consolos com armadura de costura	$h_{bie} = 0,2d$	0,96 ± 0,09	1,48 ± 0,45
	$h_{bie} = NBR 9062$		1,23 ± 0,51
Proposta de Fernandes e El Debs (4) para consolos com armadura de costura	$h_{bie} = 0,2d$	0,91 ± 0,10	1,35 ± 0,43
	$h_{bie} = NBR 9062$		1,13 ± 0,45
Proposta de Campione e colaboradores (7) para consolos sem armadura de costura	$\xi = 1$	0,96 ± 0,13	0,85 ± 0,26
	$\xi$ do artigo		1,05 ± 0,28
Proposta de Campione e colaboradores (7) para consolos com armadura de costura	$\xi = 1$	0,78 ± 0,06	1,04 ± 0,56
	$\xi$ do artigo		1,44 ± 0,90

modelo. Neste caso, em média, todos os três modelos normativos forneceram valores inferiores aos observados no banco de dados, tanto para a ruína no tirante quanto para a ruína na biela comprimida. Quando se considera o desvio padrão da relação  $F_{exp}/F_{calc}$ , ainda assim os modelos normativos fornecem valores a favor da segurança para estimativa da força de ruína no tirante. Isso pode ser confirmado pelas Figuras 8a e 8b, onde em todos consolos analisados obteve-se relação  $F_{exp}/F_{calc}$  acima da reta limite.

Já para a ruína pelo esmagamento do concreto da biela comprimida, o elevado desvio padrão da relação  $F_{exp}/F_{calc}$  fez com que em alguns consolos o valor dessa relação fosse inferior à reta limite. Isso ocorreu com mais frequência nos consolos sem armadura de costura e concreto com resistência à compressão maior que 60 MPa (Figura 8c). Apesar disso, o teste de hipótese mostra, para os consolos sem armadura de costura, que a relação  $F_{exp}/F_{calc}$  nos três modelos é significativamente maior que 1,0. Nos consolos com armadura de costura os resultados dos três modelos normativos também foram inferiores aos observados nos ensaios, apesar do alto desvio padrão observado (Figura 8d). Daí conclui-se que os valores dos coeficientes de minoração e/ou majoração dos três modelos são adequados para garantir a segurança do projeto dos consolos de concreto armado, com e sem armadura de costura.

### 3.3 Análise dos modelos analíticos

Os modelos normativos não se mostraram precisos para avaliar a força de ruína pelo escoamento do tirante no caso de consolos com armadura de costura. Dessa forma, foram analisados os modelos analíticos propostos por Fernandes e El Debs [4], Hagberg [6] e Campione e colaboradores [7] que consideram a contribuição da armadura de costura na resistência do consolo.

É apresentado na Tabela 2 um resumo do resultado da aplicação dos modelos analíticos aos consolos do banco de dados, seguindo metodologia semelhante à utilizada na análise dos modelos normativos. Na Figura 9 é apresentada, de forma gráfica, a relação entre a força de ruína obtida dos modelos analíticos e os

resultados experimentais do banco de dados.

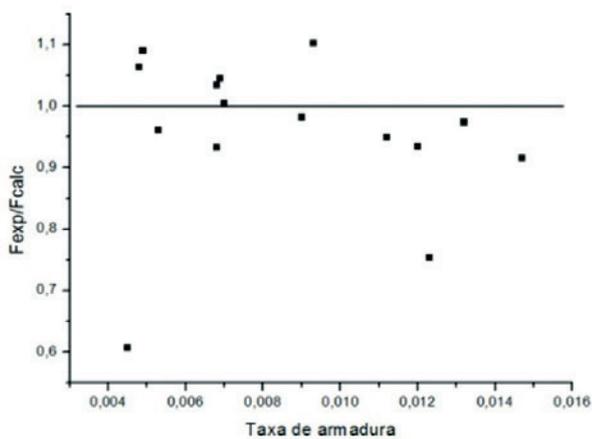
Na aplicação dos modelos propostos por Fernandes e El Debs [4] e Hagberg [6] foi adotada para a largura da biela o valor de 20% da altura útil do consolo. Esses modelos também foram analisados com a largura da biela determinada conforme procedimento recomendado pela NBR 9062. No caso do modelo proposto por Campione e colaboradores [7], a força de ruína da biela foi determinada com o coeficiente de minoração  $\xi$  conforme consta no trabalho original e com o valor unitário para esse coeficiente, isto é, sem levar em consideração a redução da resistência do concreto na biela comprimida.

Da Tabela 2 nota-se que o modelo proposto por Hagberg [6] representou adequadamente a força de ruína pelo tirante nos consolos com armadura de costura, com valores, em média, 4% superiores aos valores experimentais e com baixo desvio padrão. O teste de hipótese mostrou que, com intervalo de confiança de 95%, apenas esse modelo representa com precisão a força de ruína dos ensaios ( $F_{exp}/F_{calc} = 1$ ). Os demais modelos superestimaram a resistência do consolo ( $F_{exp}/F_{calc} < 1$ ).

No caso do modelo proposto por Campione e colaboradores [7], ele superestimou em 22% a resistência dos consolos com armadura de costura, indicando não ser adequado para este caso. Isso correu devido à rigidez elevada da treliça secundária proposta no modelo, que tende a aumentar a resistência do consolo devido à diminuição do coeficiente  $\eta$ . Sugere-se, portanto, que a rigidez proposta por esses autores para a biela comprimida da treliça secundária seja revista. Já no caso dos consolos sem armadura de costura, o modelo proposto por Campione e colaboradores [7] apresentou boa aproximação com os resultados experimentais ( $F_{exp}/F_{calc} = 1$  com intervalo de confiança de 95%).

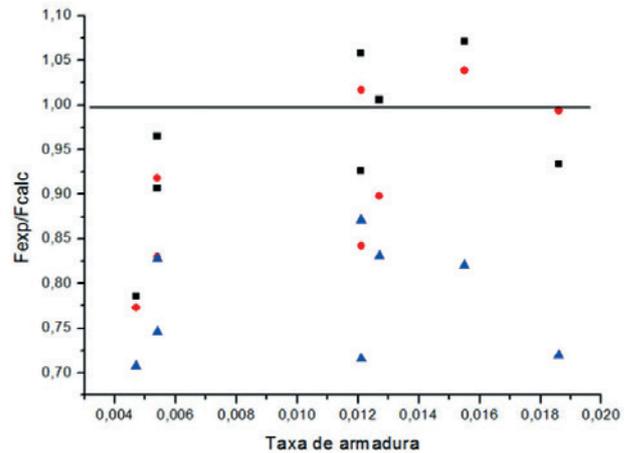
Quando a força de ruína é definida pelo esmagamento do concreto da biela, observa-se que, em média, a força estimada pelos modelos analíticos propostos por Fernandes e El Debs [4] e Hagberg [6] aumenta quando se utiliza a largura da biela definida pela NBR 9062 no lugar do valor fixo de 20% da altura de cálculo do consolo. Com isso, os valores dos modelos analíticos se

Figura 9 – Comparação dos modelos de cálculo de Hargberg (6), Fernandes e El Debs (4) e Campione e colaboradores (7) com resultados experimentais



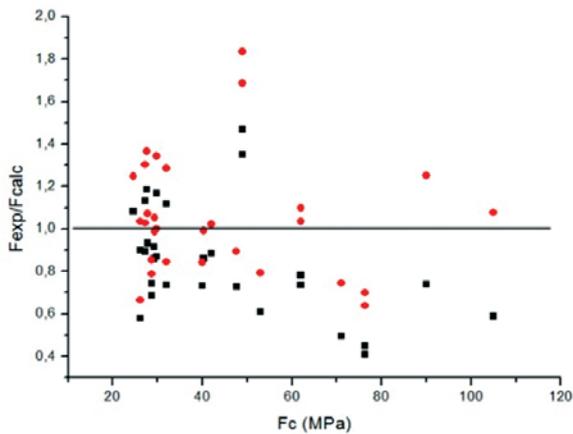
■ Modelo de Campione

**A** Consolos sem armadura de costura e que romperam pelo escoamento do tirante



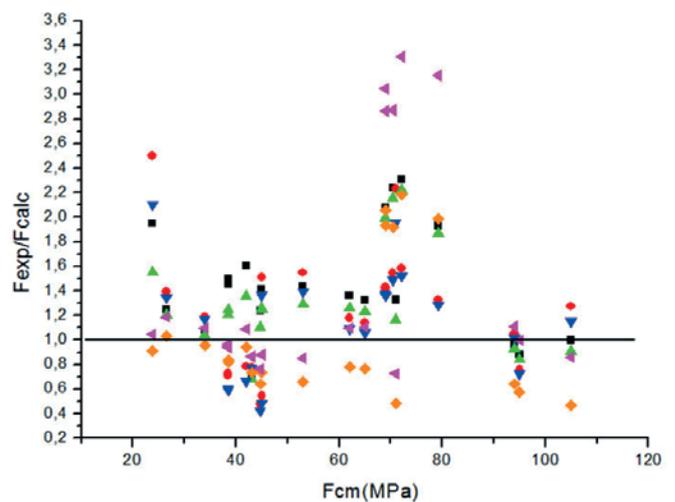
■ Hagberg  
● Fernandes e El Debs  
▲ Campione

**B** Consolos com armadura de costura e que romperam pelo escoamento do tirante



■ Modelo de Campione com  $\frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{1c}} = 1$   
● Modelo de Campione com  $\frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{1c}}$  proposto pelo modelo

**C** Consolos sem armadura de costura e que romperam pelo esmagamento da biela comprimida



■ Hagberg (Hbie=0,2d)  
● Hagberg (Hbie=NBR 9062)  
▲ Fernandes e El Debs (Hbie=0,2d)  
▼ Fernandes e El Debs (Hbie=NBR 9062)  
◆ Campione com  $\frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{1c}} = 1$   
◆ Campione com  $\frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{1c}}$  proposto pelo modelo

**D** Consolos com armadura de costura e que romperam pelo esmagamento da biela comprimida

aproximaram dos observados nos ensaios, entretanto ainda com elevado desvio padrão.

O modelo proposto por Campione e colaboradores [7] representou com melhor precisão a força de ruína pelo esmagamento do concreto da biela nos consolos sem e com armadura de costura. Na ausência da armadura de costura, o modelo estimou com precisão a força de ruína experimental, com uma diferença de apenas 5% quando se utiliza o coeficiente  $\xi$  sugerido pelos autores, isto é,  $\xi < 1$ . Já nos consolos com armadura de costura, foi observada uma diferença de apenas 4% quando se utiliza o coeficiente  $\xi$  igual à unidade. Isso sugere a influência da armadura de costura no confinamento do concreto da biela comprimida, a qual aumenta de resistência com a presença da armadura de costura, o que é representado no modelo pelo aumento do valor do coeficiente  $\xi$ . A largura da biela comprimida no modelo proposto por Campione e colaboradores [7] é definida pela altura da linha neutra junto à base do consolo ( $x_c$ ), a qual é obtida da teoria de flexão do concreto armado aplicada na ligação do consolo com o pilar. Portanto, ela não é obtida do modelo clássico de biela e tirante a partir da geometria da treliça ou da resistência do nó. Sendo assim, esse modelo parece ser mais adequado para avaliar a resistência dos consolos quando a ruína se inicia pelo escoamento do tirante, que é a situação predominante nos consolos considerados no banco de dados. Esse tipo de ruína é típico de consolos com baixa taxa de armadura, na qual ocorre o escoamento do tirante antes da ruína da biela comprimida, e parece ser mais evidente nos consolos sem armadura de costura. Por essa razão, o modelo de Campione e colaboradores apresentou menor desvio padrão em relação aos valores obtidos do banco de dados. No caso dos consolos com armadura de costura, foi observado um aumento do valor do desvio padrão.

### 3.4 Modelos para projeto de consolos

Um aspecto importante a se destacar nas análises realizadas é o valor do desvio padrão encontrado quando se comparam os valores da força obtida pelos modelos de cálculo com os valores do banco de dados. O desvio padrão foi menor quando se analisa a força de ruína pelo escoamento do tirante, a qual depende apenas da geometria dos consolos e da tensão de escoamento do aço. Por outro lado, o desvio padrão da força de ruína pelo esmagamento do concreto da biela é notadamente maior, o que está relacionado à maior variabilidade do material concreto quando comparado ao aço. Entretanto, ele também pode estar relacionado à estimativa do valor da largura da biela comprimida em cada modelo de cálculo.

Visando a aplicação dos modelos analíticos a projeto de consolos, foram determinados coeficientes de ajustes a serem aplicados a esses modelos de forma a garantir a segurança no projeto. Para isso, foi utilizada a metodologia proposta por Ravindra e Galambos [24], que propuseram um método simplificado para a determinação de coeficientes de minoração para equações de projeto que leva em consideração a variabilidade do modelo matemático e o índice de confiabilidade desejado. Basicamente, a confiabilidade do modelo é determinada pela probabilidade de falha deste, ou seja, a probabilidade de que a força calculada pelo modelo matemático seja maior que a resistência real do consolo, o que seria contrário à segurança. Portanto, devem ser determinados coeficientes de minoração ( $\phi$ ) que garantam que a resistência fornecida

pelo modelo seja sempre menor que a resistência real para certo índice de confiabilidade ( $\beta$ ).

Com base no proposto por Ravindra e Galambos [24], o coeficiente de minoração  $\phi$  pode ser determinado pela equação (43), já adaptada para a análise aqui realizada.

$$\phi = \frac{F_{\text{exp}}}{F_{\text{calc}}} e^{-\alpha \beta V_R} \quad (43)$$

Onde:

$$V_R = \sqrt{V_M^2 + V_F^2 + V_P^2} \quad (44)$$

Para esta formulação é estabelecido que o parâmetro  $\alpha$  vale 0,55, de acordo com Ravindra e Galambos [24]. É admitido, ainda, um coeficiente de variação de 9% para as propriedades dos materiais (VM) e de 5% para as propriedades geométricas dos consolos (VF). Já o coeficiente  $V_p$  representa o coeficiente de variação da relação  $F_{\text{exp}}/F_{\text{calc}}$  obtida da aplicação dos modelos aos consolos do banco de dados.

A partir dessa proposta, o coeficiente  $\phi$  pode assumir valores menores ou maiores que a unidade. Quando  $\phi < 1$ , o modelo será admitido inseguro, sendo necessária a redução da resistência calculada pelo modelo matemático a partir da multiplicação pelo coeficiente  $\phi$ . Se  $\phi \geq 1$ , significa que o modelo matemático é seguro para o índice de confiabilidade escolhido.

No presente artigo, essa metodologia foi empregada admitido um índice de confiabilidade de 4,5, o que representa, aproximadamente, uma probabilidade de falha menor que  $10^{-5}$ . No caso dos modelos normativos, foram empregados os coeficientes de minoração recomendados para cada modelo. Já para os modelos analíticos, foi empregado o critério de segurança recomendado pela norma NBR 8681 [25], isto é, a resistência média dos materiais foi minorada por  $\gamma_c = 1,4$  para o concreto e  $\gamma_s = 1,15$  para o aço. Além disso, a resistência fornecida por todos os seis modelos de cálculo foi dividida por  $\gamma_f = 1,4$  de modo a se considerar, de forma simplificada, a majoração das ações em projeto. Já o fator  $\gamma_n \geq 1$  estabelecido pela norma NBR 9062 [1] para avaliação da segurança no projeto de consolos não foi utilizado.

Com base nesses conceitos, e utilizando os valores das Tabelas 1 e 2, chega-se à Tabela 3 que fornece os valores do coeficiente  $\phi$  para cada modelo matemático analisado quando a ruína se dá por escoamento do tirante. Da análise dessa tabela observa-se que todos os modelos normativos apresentam  $\phi > 1$ , tanto para os consolos com armadura de costura quanto para os consolos sem armadura de costura, indicando uma probabilidade de falha menor que  $10^{-5}$ . Exceção é a NBR 9062 [1] para consolos sem armadura de costura, que, entretanto, apresentou valor muito próximo à unidade. Os modelos analíticos propostos por Fernandes e El Debs [4] e Hagberg [6] também apresentaram  $\phi > 1$ , indicando uma probabilidade de falha menor que  $10^{-5}$  quando são empregados os coeficientes recomendados pela NBR 8681. Já o modelo de Campione e colaboradores [7] apresentou  $\phi < 1$  devido ao elevado desvio padrão da relação  $F_{\text{exp}}/F_{\text{calc}}$ . Com isso, sugere-se a

**Tabela 3 – Valores do coeficiente  $\phi$  para os modelos matemáticos com ruptura do Tirante**

Modelo	Consolo sem armadura de costura	Consolo com armadura de costura
NBR 9062 (1)	0,980	1,357
PCI (3)	1,140	1,481
EUROCODE 2 (2)	1,329	1,590
Proposta de Hagberg (6)	-	1,106
Proposta de Fernandes e El Debs (4)	-	1,022
Proposta de Campione e colaboradores (7)	0,738	0,691

aplicação de um coeficiente redutor de 0,7 aos resultados desse modelo de modo a garantir a sua segurança em projeto.

Da análise da Tabela 4, que considera a ruína pelo esmagamento do concreto da biela comprimida, os únicos modelos com  $\phi > 1$  são os modelos propostos pelo PCI [3], Fernandes e El Debs [4] e Hagberg [6] para consolos com armadura de costura, sendo que para os dois últimos modelos apenas quando se utiliza a largura da biela igual a 20% da altura útil do consolo. Em todos os demais casos deve-se minorar o valor da força de ruína estimada pelos modelos de modo a se garantir uma probabilidade de falha menor que  $10^{-5}$ . A necessidade da minoração neste caso se deve aos elevados valores do coeficiente de variação  $V_p$  encontrados quando se analisa a relação  $F_{exp}/F_{calc}$  para a ruína da biela comprimida. Entretanto, o coeficiente  $\phi$  desses modelos pode ser maior se for empregada a resistência característica dos materiais no lugar da sua resistência média ou se for admitida uma probabilidade de falha maior que  $10^{-5}$  ( $\beta < 4,5$ ).

#### 4. Conclusões

Nesse trabalho realizou-se uma análise comparativa de alguns

modelos de cálculo para consolos de concreto pré-moldado. Para isso, seis modelos de cálculo, incluindo três modelos com consideração da armadura de costura na sua formulação, foram comparados com um banco de dados de resultados de ensaios em consolos disponíveis na literatura. Dessa análise, as principais conclusões obtidas são:

- Para os consolos sem armadura de costura, os modelos de cálculo da NBR 9062 e do PCI foram os que representaram com melhor precisão a ruína dos consolos pelo escoamento do tirante, sendo o modelo do EUROCODE 2 o mais conservador. Já para a ruína pelo esmagamento do concreto da biela comprimida, o modelo de cálculo do PCI foi o que representou com melhor precisão os valores experimentais do banco de dados. Contudo, foi observado elevado desvio padrão quando se analisa a ruína pelo esmagamento da biela.
- Para os consolos com armadura de costura, todos os modelos normativos subestimaram a força de ruína dos consolos pelo escoamento do tirante devido a não consideração da contribuição da armadura de costura. Neste caso, o modelo analítico proposto por Hagberg mostrou-se mais preciso na avaliação da resistência dos consolos com armadura de costura do banco de dados.

**Tabela 4 – Valores do coeficiente  $\phi$  para os modelos matemáticos com ruína da biela**

Modelo	Consolo sem armadura de costura	Consolo com armadura de costura
NBR 9062 (1)	0,392	0,820
PCI (3)	0,710	1,064
EUROCODE 2 (2)	0,423	0,754
Proposta de Hagberg (6), $h_{bie} = 0,2d$	-	1,302
Proposta de Hagberg (6), $h_{bie} = \text{NBR 9062}$	-	0,848
Proposta de Fernandes e El Debs (4), $h_{bie} = 0,2d$	-	1,157
Proposta de Fernandes e El Debs (4), $h_{bie} = \text{NBR 9062}$	-	0,809
Proposta de Campione e colaboradores (7), com $\xi = 1$	0,413	0,284
Proposta de Campione e colaboradores (7), com $\xi$ do artigo	0,559	0,382

- Todos os modelos apresentaram grande desvio padrão na avaliação da força de ruína pelo esmagamento do concreto da biela nos consolos com armadura de costura. Contudo, o modelo proposto por Fernandes e El Debs, com a largura da biela definida pelo critério da NBR 9062, foi o que estimou com melhor precisão a força de ruína na biela dos consolos do banco de dados. Vale ressaltar, entretanto, que a largura da biela segundo o critério da NBR 9062 é definida pela largura do apoio no qual é aplicado o carregamento no consolo e não pela resistência do nó no canto inferior do consolo. No caso do banco de dados utilizado, essa largura era conhecida e determinada pela largura dos apoios utilizados nos ensaios. No caso de estruturas reais, essa largura do apoio pode ser superestimada, principalmente quando são utilizados apoios de neoprene. Por essa razão, os valores obtidos com essa largura de biela podem ser superestimados caso não se conheça com precisão a largura do apoio. Nestes casos, o modelo do PCI parece ser o mais adequado para avaliar a resistência da biela comprimida nos consolos com armadura de costura.
- Quando são considerados os coeficientes de minoração e/ou majoração dos modelos normativos, todos eles forneceram valores a favor da segurança quando comparados aos valores experimentais do banco de dados, tanto para os consolos sem armadura de costura quanto para os consolos com armadura de costura.
- O modelo proposto por Campione e colaboradores representou com boa precisão a força de ruína tanto pelo escoamento do tirante quanto pelo esmagamento do concreto da biela nos consolos sem armadura de costura. Além disso, ele também representou com melhor precisão a força de ruína da biela nos consolos com armadura de costura. Isso indica que esse modelo mostra-se mais adequado para avaliar a largura da biela comprimida quando a ruína dos consolos ocorre após o escoamento do tirante.
- Para aplicação ao projeto de consolos, todos os modelos normativos e os modelos analíticos propostos por Fernandes e El Debs e Hagberg mostraram-se seguros para avaliação da força de ruína no tirante. Entretanto, o índice de confiabilidade dos modelos normativos foi maior que 7,5 devido ao fato deles não considerarem a contribuição da armadura de costura na resistência do consolo. Admitindo uma probabilidade de falha de  $10^{-5}$  ( $\beta = 4,5$ ), considera-se possível utilizar a armadura de costura como elemento resistente, diminuindo assim a área do tirante. Mais análises devem ser realizadas para confirmar essa possibilidade, em especial adotando técnicas matemáticas de confiabilidade mais precisas.
- Foi observada grande dispersão nos valores estimados da força de ruína pelo esmagamento da biela nos consolos do banco de dados. Com isso, os modelos analíticos que melhor se ajustaram aos resultados experimentais foram penalizados com um coeficiente  $\phi$  menor que 1,0 de modo a garantir a segurança desses modelos, enquanto os modelos mais conservadores foram menos penalizados. Vale ressaltar que nesse artigo foi adotada a resistência média do concreto nas análises e não sua resistência característica, uma vez que esta era desconhecida para os consolos do banco de dados. Com isso, os valores do coeficiente  $\phi$  obtidos podem ser excessivamente conservadores. Mais análises devem ser realizadas, em especial adotando

técnicas matemáticas de confiabilidade que considerem a real variabilidade da resistência do concreto e do aço, além da variabilidade da geometria e do carregamento.

Finalmente, ressalta-se a importância da verificação da eficiência dos modelos matemáticos na representação dos fenômenos físicos, já que eles estão diretamente ligados ao projeto seguro das estruturas. Essa verificação pode ser feita pela comparação com resultados experimentais, como realizado neste trabalho. Entretanto, para isso é necessário possuir um extenso banco de dados com resultados que permitam avaliar a variabilidade dos materiais e, inclusive, do próprio método de ensaio, o que nem sempre está disponível.

## 5. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo apoio prestado para o desenvolvimento dessa pesquisa por meio da concessão de bolsas de estudo aos autores e pelo financiamento do intercâmbio entre os pesquisadores da Universidade Federal de Goiás e da Universidade de São Paulo por meio da Ação Transversal nº06/2011 – Casadinho/Procad.

## 6. Notação

- $A_s$ : Área de aço;
- $a$ : Distância entre o ponto de aplicação da força e a face do pilar;
- $b$ : Largura do consolo;
- $c$ : Comprimento do consolo;
- $c'$ : Comprimento do consolo sem o cobrimento ( $c_c$ ) e o diâmetro da barra de ancoragem do tirante ( $\phi$ );
- $c_c$ : Cobrimento de concreto na ponta do tirante;
- $d$ : Altura de cálculo ou altura útil do consolo;
- $E_c$ : Módulo de Elasticidade do Concreto;
- $E_s$ : Módulo de Elasticidade do Aço;
- $F_{bie}$ : Força que atua na biela;
- $f_{cd}$ : Resistência à compressão do concreto, valor de cálculo;
- $f_{ck}$ : Resistência característica do concreto;
- $f_{yd}$ : Tensão de escoamento do aço, valor de cálculo;
- $h_{bie}$ : Altura da biela;
- $h_c$ : Largura do pilar;
- $k_1$ : Constante do EUROCODE 2, que vale 1,18;
- $l$ : comprimento da biela na horizontal;
- $n$ : Número de barras horizontais (armadura de costura) no consolo;
- $R_{sd}$ : Força resultante no conjunto de armaduras do consolo;
- $R_{cd}$ : Força resultante na biela;
- $V_{d}$ : Força de ruína do consolo;
- $\phi$ : Diâmetro da barra de ancoragem do tirante, que, normalmente, é igual a do tirante;
- $\beta_n$ : Coeficiente recomendado pelo PCI, que vale: 1,0 para nós que recebem apenas forças de compressão; 0,8 para nós onde chega um tirante; 0,6 para nós com mais de 1 tirante;
- $\beta_s$ : Coeficiente recomendado pelo PCI, que vale: 0,6 para consolos sem armadura de costura e 0,75 para consolos com armadura de costura;
- $\gamma$ : Coeficiente de segurança do PCI;

- $\gamma_c$ : Coeficiente de minoração da resistência do concreto.  
 $\theta$ : Ângulo de inclinação da biela.  
 $\xi$ : Coeficiente de minoração da resistência do concreto confinado.  
 $\sigma_{cd}$ : Tensão no concreto da biela do consolo.

## 7. Referências bibliográficas

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. NBR 9062: Design and execution of precast concrete structures. Rio de Janeiro, 2006 (In Portuguese).
- [2] COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION. EUROCODE 2: Design of concrete structures – Part 1.1: General rules and rules for buildings. Brussels, Belgium, 2004.
- [3] PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE – PCI. PCI Design Handbook. 7th Edition, 2010.
- [4] FERNANDES, R. M.; EL DEBS, M. K. Análise da capacidade resistente de consolos de concreto armado considerando a contribuição da armadura de costura. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.7, n.25, 2005; p.103–128 (In Portuguese).
- [5] LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. Construções de concreto: Casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado. v.2.1., Rio de Janeiro: Interciência, 1978 (In Portuguese).
- [6] HAGBERG, T. Design of concrete brackets: on the application of the truss analogy. ACI Journal, v.80, n.1, 1983; p.3–12.
- [7] CAMPIONE, G.; LA MENDOLA, L.; PAPIA, M. Flexural behaviour of concrete corbels containing fibers or wrapped with FRP sheets. Materials and Structures, v.38, 2005; p.617–625.
- [8] FATTUHI, N. I. Strength of SFRC corbels subjected to vertical load. Journal of Structural Engineering, v.116, n.3, 1990; p.701–718.
- [9] FATTUHI, N. I. Column-load effect on reinforced concrete corbels. Journal of Structural Engineering, v.116, n.1, 1990; p.188–197.
- [10] FATTUHI, N. I.; HUGHES, B. P. Ductility of reinforced concrete corbels containing either steel fiber or stirrups. ACI Materials Journal, v.86, n.6, 1989; p.644–651.
- [11] FATTUHI, N. I. Reinforced corbels made with high-strength and various secondary reinforcements. ACI Structural Journal, v.91, n.4, 1994; p. 376–382.
- [12] FATTUHI, N. I. Reinforced corbels made with plain and fibrous concrete. ACI Structural Journal, v.91, n.5, 1994; p.530–536.
- [13] FATTUHI, N. I. Strength of FRC corbels in flexure. Journal Structural Engineering, v. 120, n.2, 1994; p.360–377.
- [14] FOSTER, J. S.; POWELL, R. E.; SELIM, H. S. Performance of high-strength concrete corbels. ACI Structural Journal, v.93, n.5, 1996; p.555–563.
- [15] KRIZ, L. B.; RATHS, C. H. Connections in precast concrete structure: strength of corbels. Journal Prestressed Concrete Institute, v.10, n.1, 1965; p.16–61.
- [16] OLIVEIRA, E. M. Consolos de concreto moldados em duas etapas: Influência do tratamento da interface e da adição de fibras de aço. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2012 (In Portuguese).
- [17] LANDIM, B. P. B. C.; CASTRO, C. G. Dimensionamento e análise experimental de consolos de concreto moldado em duas etapas. 2014. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2014(In Portuguese).
- [18] HERMANSEN, B. R.; COWAN, J. Modified shear-friction theory for bracket design. ACI Journal, v.71, n.7, 1974; p.55–60.
- [19] BIRKLE, G.; GHALI, A.; SCHÄFER, K. Double-headed studs improve corbel reinforcement. Concrete International, v.24, n.9, 2002; p.77–84.
- [20] MATTOCK, A. H.; CHEN, K. C.; SOONGSWANG, K. Design proposals for reinforced concrete corbels. Journal Prestressed Concrete Institute, v.21, n.3, 1976; p.18–42.
- [21] TORRES, F. M. Análise teórico-experimental de consolos de concreto armado. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998(In Portuguese).
- [22] JACOBS, J.P. EUROCODE 2: Worked examples. Belgium: European Concrete Platform ASBL, 2008.
- [23] CANHA, R. M. F.; KUCHMA, D. A.; EL DEBS, M. K.; SOUZA, R. A. Numerical analysis of reinforced high strength concrete corbels. Engineering Structures, v.74, 2014; p.130–144. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.014> )
- [24] RAVINDRA, M. K.; GALAMBOS, T. V. Load and resistance factor design for steel. Journal of the Structural Division, v.104, n.9, 1978; p.1337–1353.
- [25] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. NBR 8681: Actions and safety of structures - Procedure. Rio de Janeiro, 2003 (In Portuguese).