

# Application of tuned-mass dampers to the control of floor vibrations

## Aplicação de tuned-mass dampers para controle de vibrações em lajes

G. M. ALMEIDA<sup>a,b</sup>  
mesquita.almeida07@gmail.com

C. E. N. MAZZILLI<sup>a</sup>  
cenmazzi@usp.br

### Abstract

This article proposes a standardized solution for the application of Tuned-Mass Dampers to the control of floor vibrations based on the characteristics of the acting loads associated to human usage and the characteristics of the most common structures of the contemporary engineering practice. In order to simplify its usage by the technical community, the tuning is proposed through the selection of pre-determined components for the assembly of the TMD and the choice of disposition and spacing of the mechanisms. The system efficacy is then verified through the computational case study of a floor before and after the application of the mechanisms.

**Keywords:** tuned-mass damper, TMD, vibrations, floor, comfort.

### Resumo

Este artigo propõe uma solução padronizada de aplicação de Tuned-Mass Dampers (TMD) para controle de vibrações em lajes baseada na análise das características de carregamentos associados à utilização humana e nas características estruturais mais comuns à engenharia contemporânea. De modo a simplificar sua aplicação técnica, a sintonização é proposta por meio da escolha de componentes pré-determinados para a montagem do TMD e pela distribuição e posicionamento dos mecanismos. A eficácia do sistema é então verificada por meio de um estudo computacional de caso de uma laje antes e depois da aplicação dos mecanismos.

**Palavras-chave:** tuned-mass damper, TMD, vibrações, lajes, conforto.

<sup>a</sup> Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil;  
<sup>b</sup> Kurkdjian & Fruchtengarten Engenheiros Associados, São Paulo, SP, Brasil.

## 1. Introdução

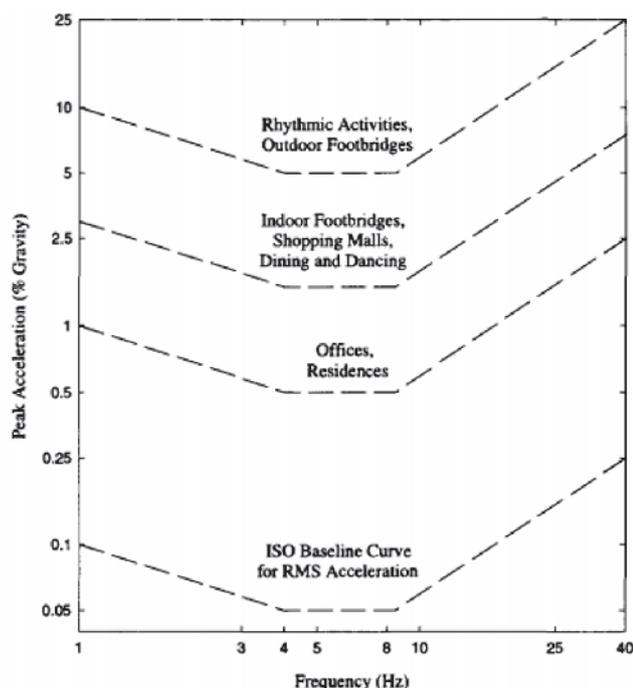
Tuned-Mass Dampers ou TMD's são sistemas altamente eficazes utilizados para o controle passivo de vibrações em estruturas. Consistem basicamente de um elemento inercial conectado por meio de um elemento restaurador e um dissipador ao sistema para alterar suas características dinâmicas. Seu princípio de operação baseia-se na ideia de que o TMD entre em ressonância com excitações cuja frequência, por sua vez, é ressonante com algum modo de vibração da estrutura, vindo a dissipar a energia que, caso contrário, atuaria desimpedida sobre a edificação. Esta característica dos Tuned-Mass Dampers, entretanto, exige que sejam "sintonizados" para cada sistema, dificultando sua empregabilidade na engenharia civil contemporânea, a qual permanece relutante em adotar conceitos dinâmicos para a verificação e dimensionamento de estruturas. Apresenta-se, assim, a possibilidade de desenvolvimento de uma solução padronizada contra problemas recorrentes de vibrações para os quais a aplicação de soluções estáticas tradicionais, como o aumento da rigidez estrutural, seja ineficiente ou de custo proibitivo. Tratando do caso particular de vibrações em lajes, a situação é ainda mais crítica devido às exigências arquitetônicas de maiores vãos livres e utilização cada vez mais comum de divisórias leves, que pouco contribuem para a rigidez estrutural e para o amortecimento do sistema, ao contrário dos fechamentos constituídos por alvenaria. Deste modo, propõe-se o desenvolvimento de um conjunto de Tuned-Mass Dampers padronizados, assim como de um roteiro de cál-

culo simples que permita sua adequação para lajes de diferentes dimensões, espessuras e funções visando a uma maior utilização desta tecnologia pelo meio técnico profissional.

### 1.1 Justificativa

De acordo com o AISC Steel Design Guides Series 11: Floor Vibrations Due to Human Activity, a resposta humana devido à vibração de um piso corresponde a um fenômeno bastante complexo que depende, entre outros fatores, da amplitude de deslocamentos e acelerações, do local em que o usuário se encontra e da própria sensibilidade da pessoa afetada, além da natureza do esforço que originou a vibração. Também, a reação dos usuários é fortemente ligada às atividades realizadas por eles no ambiente em questão. Usuários em locais como residências e escritórios sentem-se incomodados por qualquer vibração claramente perceptível, ou seja, cuja aceleração supera 0,50% da aceleração da gravidade, enquanto os que estejam em locais nos quais ocorram atividades mais energéticas são capazes de aceitar vibrações de até 5,00% da aceleração da gravidade. Já pessoas em uma situação intermediária como jantando em um ambiente adjacente a um salão de danças, levantando pesos junto à uma sala de aeróbica ou mesmo fazendo compras em um shopping toleram um valor intermediário, de cerca de 1,50% da aceleração da gravidade, com a sensibilidade de cada ocupação também variando de acordo com a duração das vibrações e com a distância da fonte. Estes limites, entretanto, estão restritos às vibrações cuja frequência varia entre 4,0 e 8,0 Hz, intervalo fora do qual os usuários são capazes de lidar com maiores acelerações.

Ao longo dos anos, vários critérios foram propostos para determinar o nível de conforto humano de um conjunto de pisos sob efeitos dinâmicos, sendo que o AISC os separa com relação ao tipo de excitação analisada: rítmica ou devida ao caminhar. Os critérios atualmente recomendados para excitação devida ao caminhar, os métodos para estimar as propriedades requeridas dos pisos e os procedimentos de dimensionamento foram inicialmente desenvolvidos por Allen e Murray, e diferem consideravelmente das análises prévias baseadas no "teste de impacto de calcanhar" (heel-drop test), no qual as frequências naturais e taxas de amortecimento do sistema são determinadas por meio do impacto causado por uma pessoa de aproximadamente 75,0kg que transfere seu peso para a ponta dos pés e levanta o calcanhar em cerca de 60,0mm do chão para em seguida relaxar o corpo e deixar seus calcanhares cair ao piso. Apesar de os critérios de Allen e Murray serem relativamente mais complexos que os previamente adotados, eles possuem um conjunto maior de aplicações e resultam em sistemas de pisos aceitáveis e mais econômicos. Usando-os como base, com pequenas modificações para permitir uma aplicação mais abrangente, o dimensionamento pelo Design Guide 11 se baseia na resposta dinâmica de um sistema de pisos sustentados por vigas submetidos às forças de caminhar e pode ser usado para dimensionar escritórios, shoppings e passarela, entre outros espaços construídos. As acelerações são limitadas de acordo com as recomendações da Organização Internacional de Padronização (International Standards ISO 2631-2, 1989), ajustados para a ocupação pretendida. São sugeridos limites para o valor quadrático médio da aceleração em função da



**Figura 1**  
Pico recomendado de aceleração devido à utilização para conforto humano (AISC Steel Design Guides Series 11; Allen e Murray, 1993; ISO 2631-2: 1989)

curva base apresentada na figura [1], os quais são propostos para escritórios, shoppings ou passarelas internas e para passarelas externas, definidos pelo valor da curva básica multiplicada respectivamente por 10, 30 ou 100. Para propósitos de dimensionamento, os limites podem ser tomados como variando entre 0,80 e 1,50 vezes os valores recomendados, dependendo da duração e frequência dos esforços causadores.

A análise dinâmica de estrutura para uma excitação causada pelo caminhar é realizada em função de uma componente de força harmônica em uma frequência que coincida com uma das frequências naturais do piso, dada pela equação 1.

$$F_i = P\alpha_i \cos(2\pi i f_{passo} t) \quad (1)$$

na qual:

P = peso de uma pessoa, tomado como 0,70kN para o dimensionamento.

i = múltiplo harmônico da frequência do caminhar.

$f_{passo}$  = frequência do caminhar.

$\alpha_i$  = coeficiente dinâmico para a i-ésima componente harmônica da força. Seus valores recomendados são dados pela Tabela [1], porém apenas um único harmônico é utilizado por vez já que todos os outros são pouco representativos em relação ao que apresenta ressonância.

Desse modo, a resposta ressonante possui sua função de forma dada pela equação 2.

$$\frac{a}{g} = \frac{R\alpha_i P}{\beta W} \cos(2\pi i f_{passo} t) \quad (2)$$

em que:

$\frac{a}{g}$  = taxa de aceleração do piso em relação à gravidade.

$\beta$  = taxa de amortecimento modal

W = peso efetivo do piso

R = fator de redução que considera o fato de que o estado permanente pleno de movimento ressonante não é atingido pelo caminhar e que a pessoa que será incomodada pela vibração e a causadora não se encontram simultaneamente na localização de máximo deslocamento modal. Recomenda-se que seja tomado como 0,7 para passarelas e 0,5 para estruturas de pisos com configurações modais em duas direções.

Para frequências acima de 8Hz, o movimento devido aos deslocamentos quase permanentes e a vibração devida ao impulso do

passo podem se tornar mais significativos que a ressonância. De modo a considerar estes efeitos, o AISC recomenda que o limite de aceleração para frequências acima de 8Hz seja mantido o mesmo que no patamar entre 4 e 8Hz, e que a rigidez mínima de 1kN/mm sob cargas concentradas seja introduzida como verificação adicional caso a frequência seja superior a 10Hz. Entretanto, estes critérios não são válidos caso equipamentos sensíveis a vibrações estejam presentes, sendo suas exigências ainda mais restritivas. Com relação a excitações rítmicas, critérios para o dimensionamento de estruturas se baseiam na resposta dinâmica estrutural de forças distribuídas ao longo de todo o piso. Eles podem ser utilizados para avaliar sistemas estruturais sujeitos a atividades tais quais ginástica, aeróbica e aulas de dança desde que a função dos carregamentos no tempo seja conhecida. O pico de aceleração no piso devido a excitações harmônicas é determinado a partir da solução clássica ao assumir que a estrutura apresente apenas um modo de vibração resultando na equação 3.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{1,3\alpha_i w_p/w_t}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_n}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + \left[\frac{2\beta f_n}{f}\right]^2}} \quad (3)$$

sendo:

$\alpha_i$  = coeficiente dinâmico (ver tabela [1])

$w_p$  = peso efetivo por área unitária de usuários participantes distribuídos por toda laje.

$w_t$  = peso efetivo por área unitária de toda a laje, incluindo todos os participantes.

$f_n$  = frequência natural fundamental do piso em Hz.

f = frequência excitante do carregamento em Hz.

$\beta$  = taxa modal de amortecimento.

A aceleração efetiva máxima, que leva em consideração todos os harmônicos, é então calculada por meio da regra de combinação dada pela equação 4.

$$a_m = \left[ \sum \alpha_i^{1,5} \right]^{0,667} \quad (4)$$

Na qual  $a_i$  representa o pico de aceleração para o i-ésimo harmônico. O amortecimento associado a sistemas de pisos é fornecido principalmente pelos componentes não estruturais, mobiliário e ocupantes. As taxas de amortecimento recomendadas pelo Design Guide variam de 0,01 a 0,06. Para passarelas ou pisos com baixa

### Tabela 1

Frequências comuns de excitação e seus respectivos coeficientes dinâmicos (AISC Steel Design Guides Series 11)

Harmônico i	Pessoa caminhando		Aula de aeróbica		Grupo de dança	
	f,Hz	$\alpha_i$	f,Hz	$\alpha_i$	f,Hz	$\alpha_i$
1	1,60-2,20	0,50	2,00-2,75	1,50	1,50-3,00	0,50
2	3,20-4,40	0,20	4,00-5,55	0,60	-	-
3	4,80-6,60	0,10	6,00-8,25	0,10	-	-
4	6,40-8,80	0,05	-	-	-	-

**Tabela 2**

Possibilidades consideradas de carregamentos distribuídos

Sobrecarga	H laje			Revestimento
	10,0cm	15,0cm	20,0cm	
0 Kg/m <sup>2</sup>	250 Kg/m <sup>2</sup>	375 Kg/m <sup>2</sup>	500 Kg/m <sup>2</sup>	0 Kg/m <sup>2</sup>
25 Kg/m <sup>2</sup>	275 Kg/m <sup>2</sup>	400 Kg/m <sup>2</sup>	525 Kg/m <sup>2</sup>	0 Kg/m <sup>2</sup>
50 Kg/m <sup>2</sup>	300 Kg/m <sup>2</sup>	425 Kg/m <sup>2</sup>	550 Kg/m <sup>2</sup>	0 Kg/m <sup>2</sup>
0 Kg/m <sup>2</sup>	350 Kg/m <sup>2</sup>	475 Kg/m <sup>2</sup>	600 Kg/m <sup>2</sup>	100 Kg/m <sup>2</sup>
25 Kg/m <sup>2</sup>	375 Kg/m <sup>2</sup>	500 Kg/m <sup>2</sup>	625 Kg/m <sup>2</sup>	100 Kg/m <sup>2</sup>
50 Kg/m <sup>2</sup>	400 Kg/m <sup>2</sup>	525 Kg/m <sup>2</sup>	650 Kg/m <sup>2</sup>	100 Kg/m <sup>2</sup>
0 Kg/m <sup>2</sup>	450 Kg/m <sup>2</sup>	575 Kg/m <sup>2</sup>	700 Kg/m <sup>2</sup>	200 Kg/m <sup>2</sup>
25 Kg/m <sup>2</sup>	475 Kg/m <sup>2</sup>	600 Kg/m <sup>2</sup>	725 Kg/m <sup>2</sup>	200 Kg/m <sup>2</sup>
50 Kg/m <sup>2</sup>	500 Kg/m <sup>2</sup>	625 Kg/m <sup>2</sup>	750 Kg/m <sup>2</sup>	200 Kg/m <sup>2</sup>

ocupação e que não possuam componentes não estruturais nem mobiliário, recomenda-se a utilização de 0,01; já para pavimentos com elementos não estruturais ou móveis em pequena quantidade, como shoppings ou igrejas, o valor recomendado é de 0,02. Uma taxa de amortecimento de 0,03 é adequado para pisos que possuam componentes não estruturais e mobiliário, com apenas divisórias leves, pequenas e removíveis, tais quais escritórios modulares; enquanto uma taxa de 0,05 é aplicado para escritórios e residências com divisórias fixas que ocupam todo o pé direito; e o valor de 0,06 pode ser utilizado para locais cuja excitação rítmica seja causada pela grande concentração de pessoas, pois os próprios participantes contribuem para o amortecimento.

Outro fator importante para a análise do comportamento dinâmico de uma laje é seu peso distribuído, que deve ser estimado cuidadosamente com seus valores reais, não majorados, tanto dos carregamentos permanentes quanto variáveis. Segundo o AISC, o carregamento de utilização (sobrecarga) sugerido é de 0,50kN/m<sup>2</sup> para escritórios típicos e 0,25kN/m<sup>2</sup> para residências, enquanto para passarelas, ginásios e shoppings recomenda-se que a carga adotada seja considerada como 0kN/m<sup>2</sup> por ser pequena o suficiente para ser desprezível.

A aplicação destes critérios, entretanto, exige a consideração cuidadosa do engenheiro. Por exemplo, a aceleração máxima para passarelas externas é definida para locais com tráfego intenso de pessoas, não para locais mais calmos como átrios de escritórios.

## 2. Metodologia

### 2.1 Definição das características do TMD padronizado

Os elementos básicos do TMD proposto são definidos em função dos critérios e propriedades discutidos anteriormente, dentre os quais alguns serão escolhidos como padrão buscando abranger o maior espectro possível de situações com o menor número possível de peças. Primeiramente, são definidas as massas a serem adotada para as opções padronizadas de elementos inerciais do sistema. Supondo que a massa do TMD esteja concentrada em seu elemento inercial, ela é definida em função das massas distribuídas tradicionalmente encontradas na engenharia e do espaçamento médio desejado entre cada mecanismo. Considerando lajes com altura 10,0cm, 15,0cm e 20,0cm, revestimentos de 100kg/m<sup>2</sup> ou 200kg/m<sup>2</sup> e massas adicionais associadas as sobrecargas variando de 0,0kg/m<sup>2</sup> a 50,0kg/m<sup>2</sup>, as possibilidades de carregamento distribuído são apresentadas na tabela [2].

Para cada possibilidade de carregamento distribuído, o valor adequado da massa dos elementos inerciais pode ser calculado em função da distribuição dos mecanismos pela laje e da relação  $\mu$ ,

**Table 3**

Calculated mass of the inertial elements of the TMD for the distributed weights considerer

Distributed weight	250 kg/m <sup>2</sup>	275 kg/m <sup>2</sup>	300 kg/m <sup>2</sup>	350 kg/m <sup>2</sup>	375 kg/m <sup>2</sup>	400 kg/m <sup>2</sup>	425 kg/m <sup>2</sup>	450 kg/m <sup>2</sup>	475 kg/m <sup>2</sup>	500 kg/m <sup>2</sup>
M for $\mu = 1,0\%$	0,625 kg	0,688 kg	0,750 kg	0,875 kg	0,938 kg	1,000 kg	1,063 kg	1,125 kg	1,188 kg	1,250 kg
Distributed weight	525 kg/m <sup>2</sup>	550 kg/m <sup>2</sup>	575 kg/m <sup>2</sup>	600 kg/m <sup>2</sup>	625 kg/m <sup>2</sup>	650 kg/m <sup>2</sup>	700 kg/m <sup>2</sup>	725 kg/m <sup>2</sup>	750 kg/m <sup>2</sup>	-
M for $\mu = 1,0\%$	1,313 kg	1,375 kg	1,438 kg	1,500 kg	1,563 kg	1,625 kg	1,750 kg	1,813 kg	1,875 kg	-

**Table 4**

Calculated stiffness of the springs of the TMD based on the inertial element and frequencies selected

f	M		
	0,750Kg	1,250Kg	1,750Kg
1,50 Hz	65,31 N/m	108,85 N/m	152,38 N/m
2,00 Hz	116,10 N/m	193,50 N/m	270,90 N/m
2,50 Hz	181,41 N/m	302,35 N/m	423,29 N/m
3,00 Hz	261,23 N/m	435,38 N/m	609,53 N/m
3,50 Hz	355,56 N/m	592,60 N/m	829,64 N/m
4,00 Hz	464,41 N/m	774,01 N/m	1083,62 N/m
4,50 Hz	587,76 N/m	979,61 N/m	1371,45 N/m
5,00 Hz	725,64 N/m	1209,39 N/m	1693,15 N/m
5,50 Hz	878,02 N/m	1463,36 N/m	2048,71 N/m
6,00 Hz	1044,91 N/m	1741,52 N/m	2438,13 N/m
6,50 Hz	1226,32 N/m	2043,87 N/m	2861,42 N/m
7,00 Hz	1422,24 N/m	2370,41 N/m	3318,57 N/m
7,50 Hz	1632,68 N/m	2721,13 N/m	3809,58 N/m
8,00 Hz	1857,63 N/m	3096,04 N/m	4334,46 N/m

dada pela equação 5, entre a massa do conjunto de mecanismos adotados e a massa da estrutura.

$$\mu = \frac{M_{\text{conjunto de TMD's}}}{M_{\text{estrutura}}} \quad (5)$$

O CEB recomenda em seu Bulletin D'Information N209, anexo D, que  $\mu$  geralmente se encontre no intervalo entre 1,0% e 5,0% enquanto Varela e Battista (2011) sugerem que a relação varie entre 0,2% e 1,0%. Desse modo, os elementos inerciais são definidos supondo  $\mu=1,0\%$  e espaçamento de 0,50m entre cada mecanis-

**Table 5**

Possible rectified natural frequencies for the mass-spring combinations of the standard TMD

k	M				
	0,750Kg	1,000Kg	1,250Kg	1,500Kg	1,750Kg
100 N/m	1,86 Hz	1,61 Hz	1,44 Hz	1,31 Hz	1,22 Hz
150 N/m	2,27 Hz	1,97 Hz	1,76 Hz	1,61 Hz	1,49 Hz
225 N/m	2,78 Hz	2,41 Hz	2,16 Hz	1,97 Hz	1,82 Hz
330 N/m	3,37 Hz	2,92 Hz	2,61 Hz	2,38 Hz	2,21 Hz
500 N/m	4,15 Hz	3,59 Hz	3,21 Hz	2,93 Hz	2,72 Hz
630 N/m	4,66 Hz	4,03 Hz	3,61 Hz	3,29 Hz	3,05 Hz
790 N/m	5,22 Hz	4,52 Hz	4,04 Hz	3,69 Hz	3,42 Hz
1000 N/m	5,87 Hz	5,08 Hz	4,55 Hz	4,15 Hz	3,84 Hz
1235 N/m	6,52 Hz	5,65 Hz	5,05 Hz	4,61 Hz	4,27 Hz
1500 N/m	7,19 Hz	6,23 Hz	5,57 Hz	5,08 Hz	4,71 Hz
1780 N/m	7,83 Hz	6,78 Hz	6,07 Hz	5,54 Hz	5,13 Hz
2050 N/m	8,40 Hz	7,28 Hz	6,51 Hz	5,94 Hz	5,50 Hz
2350 N/m	9,00 Hz	7,79 Hz	6,97 Hz	6,36 Hz	5,89 Hz
2700 N/m	9,64 Hz	8,35 Hz	7,47 Hz	6,82 Hz	6,31 Hz
3100 N/m	10,33 Hz	8,95 Hz	8,01 Hz	7,31 Hz	6,77 Hz

**Table 6**

Ideal damping coefficient for the considered spring-frequency combinations

$\omega$	M					f
	0,750Kg	1,000Kg	1,250Kg	1,500Kg	1,750Kg	
9,42 rad/s	0,85 Ns/m	1,14 Ns/m	1,42 Ns/m	1,71 Ns/m	1,99 Ns/m	1,50 Hz
12,57 rad/s	1,14 Ns/m	1,52 Ns/m	1,90 Ns/m	2,27 Ns/m	2,65 Ns/m	2,00 Hz
15,71 rad/s	1,42 Ns/m	1,90 Ns/m	2,37 Ns/m	2,84 Ns/m	3,32 Ns/m	2,50 Hz
18,85 rad/s	1,71 Ns/m	2,27 Ns/m	2,84 Ns/m	3,41 Ns/m	3,98 Ns/m	3,00 Hz
21,99 rad/s	1,99 Ns/m	2,65 Ns/m	3,32 Ns/m	3,98 Ns/m	4,64 Ns/m	3,50 Hz
25,13 rad/s	2,27 Ns/m	3,03 Ns/m	3,79 Ns/m	4,55 Ns/m	5,31 Ns/m	4,00 Hz
28,27 rad/s	2,56 Ns/m	3,41 Ns/m	4,26 Ns/m	5,12 Ns/m	5,97 Ns/m	4,50 Hz
31,42 rad/s	2,84 Ns/m	3,79 Ns/m	4,74 Ns/m	5,69 Ns/m	6,63 Ns/m	5,00 Hz
34,56 rad/s	3,13 Ns/m	4,17 Ns/m	5,21 Ns/m	6,25 Ns/m	7,30 Ns/m	5,50 Hz
37,70 rad/s	3,41 Ns/m	4,55 Ns/m	5,69 Ns/m	6,82 Ns/m	7,96 Ns/m	6,00 Hz
43,98 rad/s	3,98 Ns/m	5,31 Ns/m	6,63 Ns/m	7,96 Ns/m	9,29 Ns/m	7,00 Hz
47,12 rad/s	4,26 Ns/m	5,69 Ns/m	7,11 Ns/m	8,53 Ns/m	9,95 Ns/m	7,50 Hz
50,27 rad/s	4,55 Ns/m	6,07 Ns/m	7,58 Ns/m	9,10 Ns/m	10,61 Ns/m	8,00 Hz

mo. Dentre os valores assim obtidos, indicados na tabela [3], são escolhidas as opções 0,75kg, 1,00kg, 1,25kg, 1,50kg e 1,75kg para a massa dos elementos inerciais, buscando abranger o intervalo da melhor maneira possível.

Em seguida, a rigidez das molas padrão podem ser definidas. Sendo o TMD nada mais que um oscilador massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, sua frequência natural pode ser facilmente obtida por meio da equação 6.

$$f_{TMD} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

em que:

$f_{TMD}$  = a frequência natural do Tuned-Mass Damper.

k = rigidez do sistema, ou seja, da mola.

m = massa do elemento inercial.

A aplicação do TMD, entretanto, gera um aumento da massa do

sistema sem um correspondente aumento de sua rigidez, causando uma ligeira redução de sua frequência natural. De modo a compensar esse desvio, a sintonização é realizada para uma frequência corrigida dada pela equação 7.

$$f_{Sintonização} = \frac{1}{1 + \mu} f_{Estrutura}^{Natural} \tag{7}$$

sendo:

$f_{Sintonização}$  = frequência natural corrigida do sistema.

$f_{Estrutura}^{Natural}$  = Frequência natural original do sistema.

De acordo com o AISC, como visto na tabela [1], as frequências atuantes dos carregamentos gerados pela utilização humana variam entre 1,60-2,20 0Hz para o caminhar, 2,00-2,75Hz para aulas de aeróbica e 1,50-3,00Hz para grupos de dança. Buscando abranger as excitações mencionadas e seus harmônicos, as

**Table 7**

Mass of the standard inertial elements (weights)

M				
0,750Kg	1,000Kg	1,250Kg	1,500Kg	1,750Kg

**Table 8**

Stiffness of the standard restorative elements (springs)

M				
100 N/m	150 N/m	225 N/m	330 N/m	500 N/m
630 N/m	790 N/m	1000 N/m	1235 N/m	1500 N/m
1780 N/m	2050 N/m	2350 N/m	2700 N/m	3100 N/m

**Table 9**

Damping coefficient of the standard dissipative elements (dampers)

C				
1,00 Ns/m	1,75 Ns/m	2,50 Ns/m	3,25 Ns/m	4,00 Ns/m
4,60 Ns/m	5,20 Ns/m	6,00 Ns/m	7,00 Ns/m	8,00 Ns/m

molhas necessárias são calculadas para cada frequência por meio da aplicação das equações 6 e 7 e indicadas na tabela [4]. Dentre as rigidezes obtidas, quinze são selecionadas como padrão. São elas: 100N/m, 150N/m, 225N/m, 330N/m, 500N/m, 630N/m, 790N/m, 1000N/m, 1235N/m, 1500N/m, 1780N/m, 2050N/m, 2350N/m, 2700N/m e 3100N/m; que, em conjunto com as três massas previamente selecionadas, permitem sintonizar o mecanismo nas frequências exatas indicadas na tabela [5].

Resta definir o amortecedor a ser utilizado para o TMD. Segundo o Bulletin D'Information N209, anexo D, a taxa ótima de amortecimento de um Tuned-Mass Damper é dada pela equação 8.

$$\xi_{\text{ótimo}} = \left[ \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \right]^{1/2} \quad (8)$$

em que  $\xi$  é calculada pela equação 9.

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (9)$$

na qual:

$c$  é o coeficiente de amortecimento do elemento dissipador.

$m$  é a massa do elemento inercial.

$\omega$  frequência angular natural do TMD.

Os coeficientes de amortecimento ideais para cada combinação massa e frequência são apresentados na tabela [6]. Dentre estes valores, foram escolhidos como padrão os amortecedores com coeficiente 1,00Ns/m, 1,75Ns/m, 2,50Ns/m, 3,25Ns/m, 4,00Ns/m,

4,60Ns/m, 5,20Ns/m, 6,00Ns/m, 7,00Ns/m e 8,00Ns/m, de modo a abranger a maior parte do intervalo considerado.

Em resumo, o Tuned-Mass Damper a ser aplicado será capaz de cobrir o espectro analisado em praticamente sua totalidade por meio da composição do mecanismo com cinco opções de pesos, quinze opções de molhas e dez de amortecedores, indicadas respectivamente nas tabelas [7], [8] e [9].

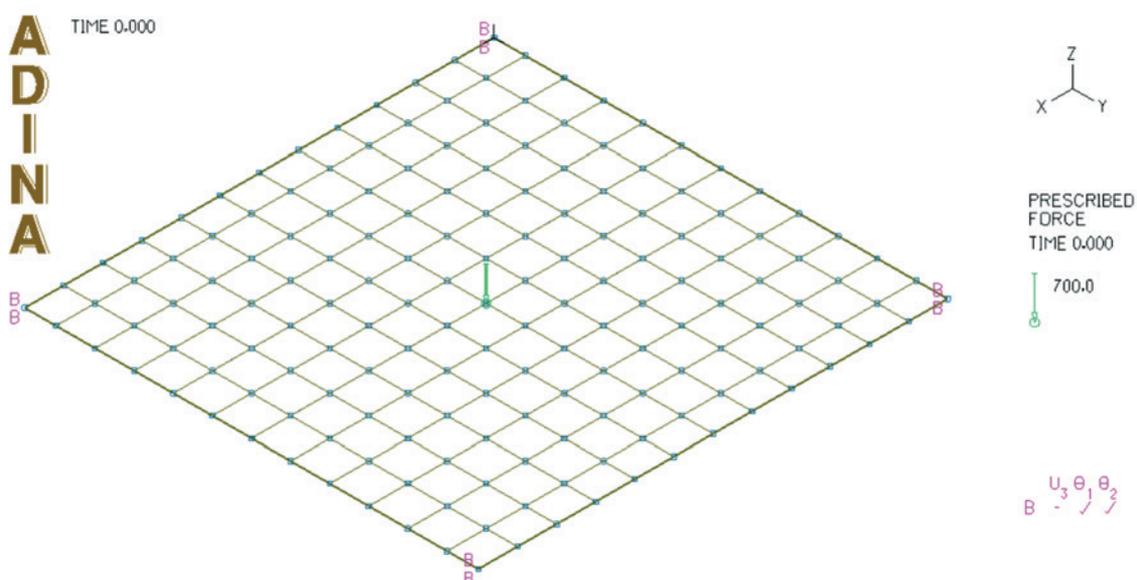
## 2.2 Descrição do processo de escolha do tuned-mass damper

Após constatado o problema de vibração na laje, a definição do TMD a ser aplicado é bastante direta e simples. Em primeiro lugar, a massa distribuída equivalente é calculada, em kg/m<sup>2</sup>, por meio da soma da massa da laje, do revestimento e da massa equivalente da sobrecarga de utilização em seus valores reais. O elemento inercial ideal para o mecanismo pode, assim, ser calculado pela multiplicação do valor obtido por  $\mu=1,00\%$  e pela área de influência de cada TMD, ou seja, a área definida pelo espaçamento entre mecanismos adjacentes. Desse modo, o cálculo do elemento inercial ideal é dada pela equação 10.

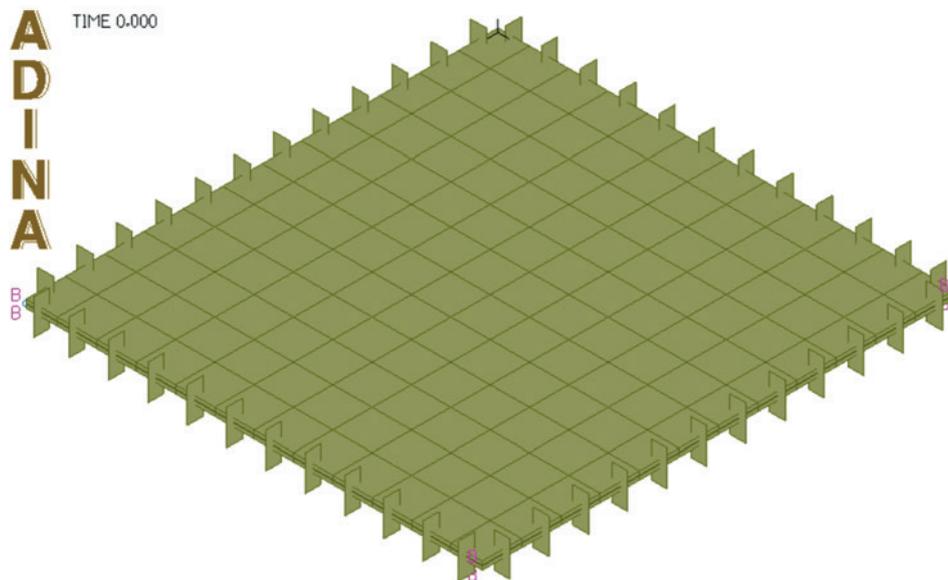
$$M_{TMD}^{\text{calculado}} = \mu \left[ (h_{\text{laje}} \rho_{\text{concreto}} + h_{\text{rev}} \rho_{\text{rev}} + Q_{AISC}) d_x d_y \right] \quad (10)$$

na qual:

$\mu$  adotado como 1,00%

**Figura 2**

Modelagem pelo programa Adina 9,1 da laje analisada sem TMD's



**Figura 3**  
Renderização pelo programa Adina 9,1 da laje analisada sem TMD's

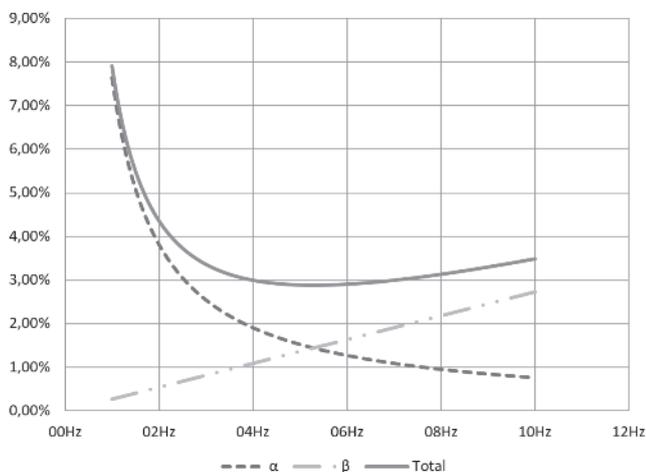
$h_{laje}$  = espessura da laje em metros (m);  
 $h_{rev}$  = espessura do revestimento (m);  
 $\rho_{concreto}$  = densidade do concreto armado ( $kg/m^3$ );  
 $\rho_{prev}$  = densidade do revestimento ( $kg/m^3$ );  
 QAISC = é a massa equivalente da sobrecarga a ser utilizada para cálculo das características dinâmicas (recomendada pelo AISC Design Guide 11 como aproximadamente  $50kg/m^2$  para escritórios,  $25kg/m^2$  para residências e  $0kg/m^2$  para passarelas, ginásios e shopping centers);  
 $d_x$  = espaçamento entre TMD's na direção do vão principal da laje (m);  
 $d_y$  = espaçamento entre TMD's na direção do vão secundário da laje (m).  
 O elemento inercial padrão será, assim, escolhido como o mais próximo do calculado entre as opções apresentadas na tabela [7].

O próximo passo é a definição da rigidez da mola a ser utilizada, a qual deve ser escolhida em função do elemento inercial adotado e da frequência natural que se deseja mitigar, conforme a equação 11, obtida da manipulação das equações 6 e 7. A escolha é realizada dentro das opções da tabela [8].

$$k_{TMD}^{Calculado} = \left[ \frac{2\pi}{(1 + \mu)} f_{natural}^{laje} \right]^2 \times M_{TMD}^{Adotado} \tag{11}$$

Por fim, o amortecimento ideal a ser utilizado é calculado de pela equação 12, que resulta das equações 8 e 9, permitindo que o amortecedor adotado possa ser escolhido dentre os apresentados na tabela [9].

$$c_{TMD}^{Calculado} = \left[ \frac{3\mu \times M_{TMD}^{Adotado} \times k_{TMD}^{Adotado}}{2(1 + \mu)^3} \right]^{1/2} \tag{12}$$



**Figura 4**  
Amortecimento de Rayleigh resultante

### 2.3 Análise de caso

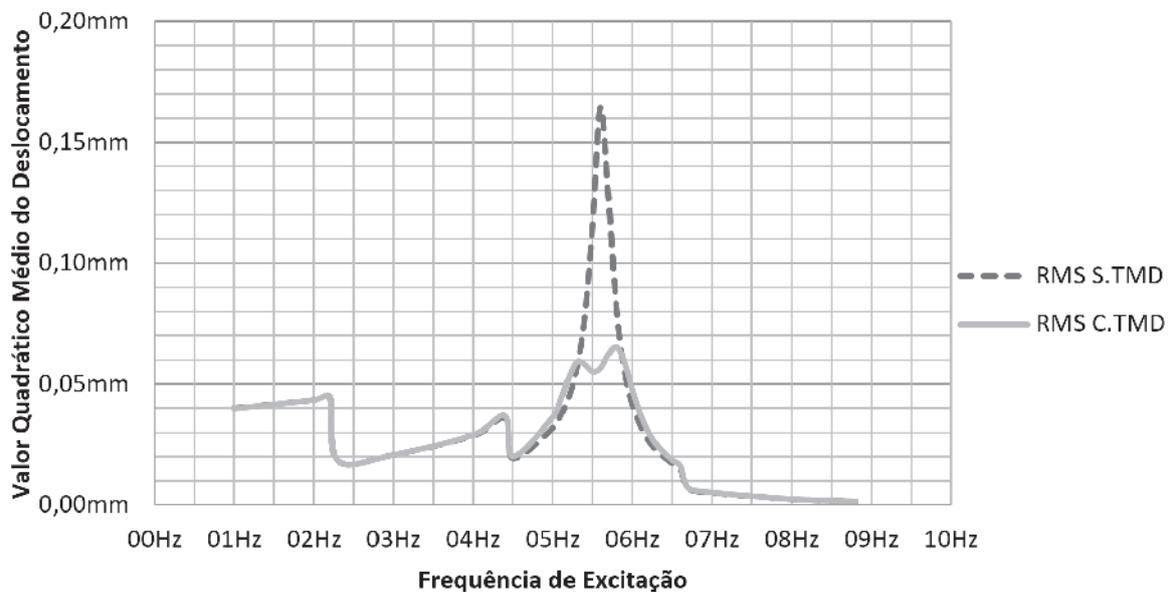
Para comprovar a eficácia do TMD definido conforme processo descrito no item anterior, realizou-se o estudo de caso de uma laje de piso de escritório em concreto de  $f_{ck}$  40Mpa; 10,0cm de espessura; dimensões 580,0cm por 600,0cm de vão; 2,0cm de cobrimento e carregamentos atuantes de peso próprio de  $2500N/m^2$ , revestimento de  $2000N/m^2$  e sobrecarga de  $2000N/m^2$ . Em primeiro lugar, os momentos solicitantes obtidos por meio das tabelas de Czerny para lajes com quatro faces simplesmente apoiadas foram  $m_{xsl} = 10220Nm/m$  e  $m_{ysl} = 9690Nm/m$ . Utilizando aço CA-50 e respeitando a ABNT NBR 6118:2013, a armadura necessária para a laje é de  $4,65cm^2/m$  na direção principal e  $5,18cm^2/m$  na direção secundária, ambas satisfeitas pelo arranjo de  $\Phi 10c/15cm$ . Com relação ao estado limite de serviço, a flecha resulta 19,5mm, que respeita o limite de 1/300 do vão principal. Em seguida, supondo laje apoiada em quatro vigas de 20x45cm com cobrimento

de 2,50cm, a viga crítica recebe 6700N/m de carga permanente e 3000N/m de sobrecarga além do peso próprio de 2250N/m ao longo de um vão de 6,00m. Assim, o momento solicitante de cálculo resulta  $M_{sd} = 76640\text{Nm}$  que necessita de uma armadura positiva de  $4,65\text{cm}^2$ , desprezando-se a mesa contribuinte, satisfeita pela adoção de 4 $\Phi$ 12,5. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha seria de 1,23cm e a abertura máxima de fissura seria de 0,08mm, ambos dentro dos valores de norma. A estrutura é, portanto, estaticamente compatível com as exigências da ABNT.

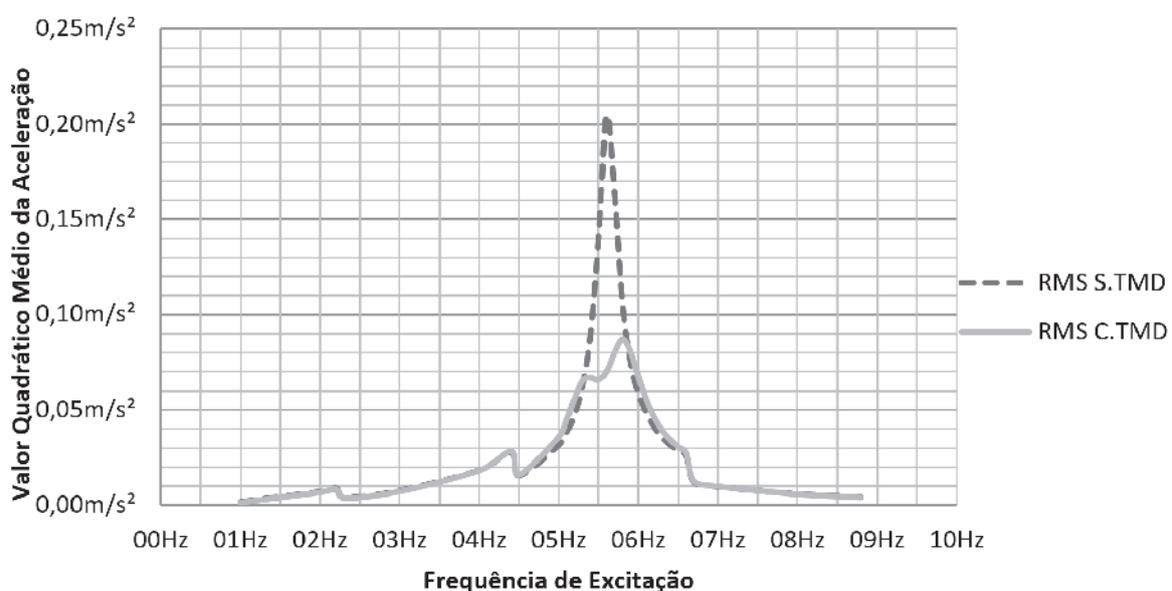
Para calcular as frequências naturais, amplitudes de deslocamentos e acelerações do sistema estrutural antes e depois da instala-

ção dos TMD's, utilizou-se o software Adina 9,1 licença estudantil. Criou-se um modelo em unidades do Sistema Internacional com uma carga concentrada senoidal de intensidade máxima 700N aplicada no ponto central da laje e apoios fixos em cada vértice. As figuras [2] e [3] a seguir representam respectivamente imagens simples e renderizada do modelo como visto no programa.

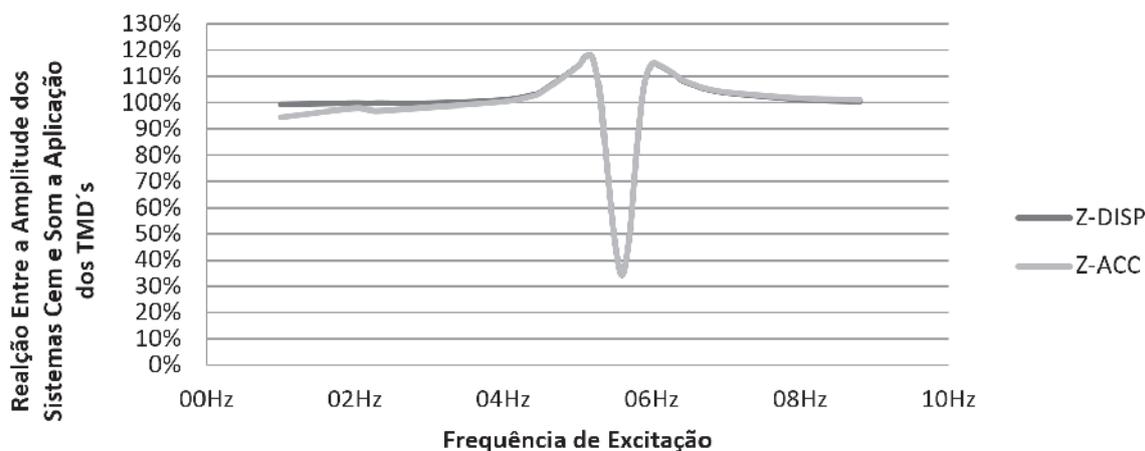
Da análise do modelo obtêm-se as seguintes frequências naturais: 5,62Hz para o primeiro modo, 11,56Hz para o segundo e 11,86Hz para o terceiro. Destes, apenas o primeiro está dentro da frequência de excitação do caminhar e portanto o Tuned-Mass Damper foi sintonizado para uma frequência de 5,62Hz.



**Figura 5**  
Deslocamento quadrático médio x frequência



**Figura 6**  
Aceleração quadrática média x frequência



**Figura 7**  
Relação entre a amplitude dos sistemas sem e com a aplicação dos TMD's

A escolha do elemento inercial é realizada por meio da aplicação da equação 10 ao caso, destacando que devido à função da laje como piso de escritório o Design Guide recomenda sobrecarga para cálculo dinâmico de  $0,50\text{kN/m}^2$ , ou seja, aproximadamente  $50\text{kgf/m}^2$ :

$$M_{TMD}^{\text{calculado}} = 0,01[(0,10 \times 2500 + 200 + 50)0,50 \times 0,50] = 1,25\text{kg} \rightarrow M_{TMD}^{\text{adotado}} = 1,25\text{Kg}$$

Em seguida, a rigidez ideal da mola é calculada por meio da equação 11:

$$k_{TMD}^{\text{calculado}} = \left[ \frac{2\pi}{(1 + 0,01)} 5,62 \right]^2 \times 1,25 = 1528\text{N/m} \rightarrow k_{TMD}^{\text{adotado}} = 1500\text{N/m}$$

Finalmente, o amortecimento ideal a ser utilizado é obtido é aplicando-se a equação 12:

$$c_{TMD}^{\text{calculado}} = \left[ \frac{3 \times 0,01 \times 1,25 \times 1500}{2(1 + 0,01)^3} \right]^{1/2} = 5,22\text{Ns/m} \rightarrow c_{TMD}^{\text{adotado}} = 5,20\text{Ns/m}$$

Um novo modelo é então criado considerando a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* sob a laje, com as características previamente definidas e espaçamento de  $0,50\text{m}$  entre si. Neste novo modelo a frequência natural do primeiro modo foi de  $5,30\text{Hz}$ .

De modo a respeitar as exigências do AISC, a carga excitante é multiplicada pelo coeficiente  $\alpha_i$ , indicado na tabela [1] para cada harmônico. Ou seja, a intensidade máxima da força de excitação varia de um intervalo de harmônicos ao seguinte. Também, conforme recomendação do AISC para escritórios, em ambos os modelos, a taxa de amortecimento natural da estrutura é considerada como  $0,03$ , representada por meio da aplicação de amortecimento tipo Rayleigh, no qual a taxa de amortecimento é obtida da equação 13 com duas incógnitas  $\alpha_{\text{Rayleigh}}$  e  $\beta_{\text{Rayleigh}}$ , e é definida de modo que o valor esteja próximo ao desejado para a maior parte do intervalo estudado. Assim, de modo a garantir que a taxa de amortecimento seja  $0,03$  para excitações próximas da ressonante, o amortecimento tipo Rayleigh teve suas incógnitas definidas para que as frequências  $4,00\text{Hz}$  e  $7,00\text{Hz}$  apresentassem o amortecimento desejado,

o que leva aos coeficiente  $\alpha_{\text{Rayleigh}} = 0,9596$  e  $\beta_{\text{Rayleigh}} = 8,68 \times 10^{-4}$  e resulta na taxa indicada no gráfico da figura [4]. Variando, então, a frequência de excitação da força ao longo do intervalo de interesse obtém-se para cada frequência excitante a amplitude dos deslocamentos e acelerações depois de estabilizados.

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \alpha_{\text{Rayleigh}} + \frac{\omega_n}{2} \beta_{\text{Rayleigh}} \quad (13)$$

### 3. Resultados e discussões

A diferença de comportamento entre os sistemas estruturais com e sem a aplicação dos TMD's representados nos dois modelos pode ser visualizada nos gráficos das figuras [5] e [6] que apresentam respectivamente os valores quadráticos médios do deslocamento e da aceleração no ponto central da laje para o sistema harmônico estabilizado. Com base nestes resultados, é clara a redução na ressonância da amplitude tanto do deslocamento quanto da aceleração. Os valores quadráticos médios de ambos diminuem em cerca de  $65\%$  para a frequência de  $5,6\text{Hz}$ , com o deslocamento caindo de  $0,165\text{mm}$  para  $0,057\text{mm}$ ; enquanto a aceleração cai de  $0,204\text{m/s}^2$  para  $0,070\text{m/s}^2$ . É importante notar que embora esses valores aparentem ser inicialmente desprezíveis, o deslocamento só considera a força pontual de  $700\text{N}$ , muito inferior à carga real da laje, e cujo deslocamento estático corresponde a  $0,109\text{mm}$ ; e as acelerações da estrutura sem e com a aplicação dos TMD's representam respectivamente  $2,06\%$  e  $0,71\%$  da aceleração da gravidade, sendo o limite aceitável para escritórios entre  $0,4\%$  e  $0,75\%$ . Notar nos gráficos das figuras [5] e [6] as quebras de continuidade nas frequências excitantes  $2,20\text{Hz}$ ,  $4,40\text{Hz}$  e  $6,60\text{Hz}$ , causadas pela mudança do coeficiente  $\alpha_i$  de cada harmônico.

Com relação à diferença no comportamento do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's, fica clara não só a redução da resposta dinâmica do sistema na frequência de sintonização, como também a geração de dois novos picos nos resultados, lado a lado ao novo vale gerado, para os quais o sistema com a aplicação dos mecanismos na verdade apresenta um comportamento dinâmico inferior ao sistema original. A presença desses

picos, entretanto é comum e esperada devido à aplicação de Tuned-Mass Dampers, e é mitigada pelo fato de que as duas novas respostas máximas geradas continuam bastante inferiores à original. Para facilitar a visualização deste comportamento, o gráfico da figura [7] apresenta a eficácia da aplicação dos TMD's por meio da relação dos resultados com e sem a aplicação dos mecanismos para todo o espectro de frequências excitantes analisadas.

## 4. Conclusões

O estudo de caso indica uma redução de cerca de 65% no valor quadrático médio da aceleração, provando a eficiência da solução proposta. Outros pontos positivos do método proposto são sua relativa facilidade de utilização e instalação. O estudo, entretanto, foi restrito a um único caso, de modo que se faz necessário o desenvolvimento de novos modelos que levem em conta uma gama mais abrangente de situações típicas da engenharia de estruturas, com diferentes utilizações, formas geométricas da laje e relações entre vãos.

## 5. Agradecimentos

À ADINA R&D, Inc por disponibilizar seu software Adina 9,1, edição de 900 nós, livremente para estudantes de todo o mundo.

## 6. Referências bibliográficas

- [1] AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, INC. STEEL DESIGN GUIDE SERIES 11: Floor Vibrations Due to Human Activity. 2003.
- [2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. 2013.
- [3] BATHE, Klaus-Jürgen. Finite Element Procedures. 14. ed. :Prentice Hall, 1996.
- [4] CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. Dynamics of Structures. Mcgraw-Hill International Book Company, 1982.
- [5] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. BULLETIN D'INFORMATION N209: Vibration Problems in Structures. 1991.
- [6] INTERNATIONAL STANDARDS ORGANIZATION. INTERNATIONAL STANDARD ISO 2631-2: Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration-Part 2: Human Exposure to Continuous and Shock-Induced Vibrations in Buildings (1 to 80 Hz). 1989.
- [7] VARELA, Wendell D.; BATTISTA, Ronaldo C.. Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks. Engineering Structures. p. 2485-2494. set. 2011.