

# Reliability of reinforced concrete beams designed in accordance with Brazilian code NBR-6118:2014

## Confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR-6118:2014



**M. SCHERER**<sup>a</sup>  
[mailson\\_scherer@hotmail.com](mailto:mailson_scherer@hotmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0001-7544-0623>

**I. B. MORSCH**<sup>a</sup>  
[morsch@ufrgs.br](mailto:morsch@ufrgs.br)  
<https://orcid.org/0000-0002-2473-3474>

**M. V. REAL**<sup>b</sup>  
[mauroreal@furg.br](mailto:mauroreal@furg.br)  
<https://orcid.org/0000-0003-4916-9133>

### Abstract

This paper aims to evaluate the reliability indexes of reinforced concrete beams designed in accordance with Brazilian code NBR-6118:2014 in relation to the ultimate limit state of flexure. The main statistics of the resistance model are obtained through Monte Carlo simulation using ANSYS software and its probabilistic design tool. The reliability indexes are evaluated by FORM, being performed a parametric study in order to assess the influence of the main design variables on the safety level reached. It can be noticed that the reliability indexes are shown unsatisfactory in the combinations which the live loads are predominant.

**Keywords:** structural reliability, reinforced concrete, finite element method, Monte Carlo Method, FORM.

### Resumo

O presente trabalho busca avaliar o índice de confiabilidade atingido pelas vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a norma brasileira NBR-6118:2014 em relação ao estado limite último de flexão. As principais estatísticas das resistências são obtidas por simulações de Monte Carlo utilizando o software ANSYS e a ferramenta probabilistic design. Os índices de confiabilidade são calculados pelo FORM, sendo realizado um estudo paramétrico para avaliar a influência das principais variáveis de projeto nos níveis de segurança atingidos. É observado que os índices de confiabilidade se mostram insatisfatórios para combinações de carga nas quais as cargas acidentais são predominantes.

**Palavras-chave:** confiabilidade estrutural, concreto armado, método dos elementos finitos, Método de Monte Carlo, FORM.

<sup>a</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, RS, Brasil;

<sup>b</sup> Universidade Federal do Rio Grande, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Rio Grande, RS, Brasil.

Received: 28 Dec 2017 • Accepted: 05 Sep 2018 • Available Online:

 This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License

## 1. Introdução

Os projetos de estruturas de concreto vêm, ao longo do tempo, experimentando uma série de avanços que abrangem desde os materiais empregados até os métodos de cálculo praticados por engenheiros e projetistas. Em se tratando de segurança em estruturas de concreto armado, a norma NBR-6118:2014 utiliza-se de um método semi-probabilístico para obtenção de um nível de segurança em projeto, majorando cargas e minorando resistências através de coeficientes de ponderação parciais. Tais coeficientes de ponderação são aplicados sobre valores característicos de resistências, provenientes de ensaios, e sobre os carregamentos estimados, enquanto a geometria e dimensão das peças correspondem aos valores nominais especificados em projeto. O método atual substitui o antigo método das tensões admissíveis, permitindo a concepção de estruturas mais econômicas e seguras [1]. A previsão da resposta de vigas de concreto armado, seja sob cargas de serviço ou sob o carregamento de ruína, revela uma série de complexidades, desde aquelas relacionadas ao comportamento dos materiais empregados, bem como incertezas nas considerações adotadas na etapa de projeto. De acordo com Real [1], estas incertezas pairam sobre os modelos de cálculo, as propriedades dos materiais utilizados, sobre as cargas máximas atuantes ao longo da vida útil da estrutura e, inclusive, sobre a geometria da peça, podendo esta sofrer desvios durante a construção, impedindo a determinação das dimensões finais com exatidão. Nota-se, portanto, que a maioria das grandezas envolvidas na etapa de projeto corresponde a um conjunto de variáveis aleatórias, as quais possuem determinada distribuição probabilística, apresentando valores médios e um certo valor de dispersão. Isso resulta em uma estrutura cuja resposta, sob determinada condição de carregamento, também se revela de forma aleatória. Uma forma racional de se considerar dadas incertezas é tratar o problema em um formato probabilístico. Nesse sentido, verificam-se alguns trabalhos já realizados e que se direcionaram ao estudo e avaliação do nível de segurança atingido pela norma nacional NBR-6118 em suas diversas revisões. Um estudo probabilístico sobre vigas e pilares foi desenvolvido por Real [1], avaliando os critérios dispostos pela NBR-6118:1980. Um estudo voltado a vigas de concreto armado foi desenvolvido por Santos et al. [12] em relação à revisão da NBR-6118:2007. No que se refere à última revisão, a NBR-6118:2014, pode-se citar os trabalhos desenvolvidos por Minasi [16], voltado ao estudo da confiabilidade de vigas de concreto armado em estruturas portuárias; por Barbosa [5], direcionado à análise probabilística de pilares de concreto armado; e por Silva [11], na avaliação da confiabilidade da ligação laje-pilar sob punção. Como forma de contribuir e dar sequência ao estudo do nível de segurança atingido pelas normas de projeto nacionais, o trabalho proposto tem como objetivo principal a determinação do índice de confiabilidade em projetos de vigas de concreto armado em relação ao estado limite último de flexão, dimensionadas de acordo com as prescrições e critérios de projeto da NBR-6118:2014: Projeto de Estruturas de Concreto [4]. O método dos elementos finitos é empregado para a representação numérica das vigas dimensionadas, sendo este modelo comparado e validado por intermédio de resultados experimentais. O estudo probabilístico, por sua vez, é feito através do Método de Monte Carlo e FORM.

## 2. Projeto de vigas de concreto armado de acordo com a NBR-6118:2014

De forma geral, além de atender os aspectos relacionados à segurança estrutural, a fase de projeto de estruturas de concreto armado deve incluir verificações quanto ao desempenho em serviço e durabilidade durante a vida útil da mesma. Nesse contexto, costumam-se definir os estados limites últimos (ELU), os quais estão relacionados ao colapso ou esgotamento da capacidade portante da estrutura, e os estados limites de serviço (ELS), que se referem às condições nas quais se torna impróprio o uso da estrutura, em termos de conforto e durabilidade.

### 2.1 Combinação das ações

A combinação das ações deve considerar todas as ações de probabilidade não desprezível de atuarem simultaneamente, visando determinar os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura, tanto em relação aos estados limites de serviços quanto aos estados limites últimos [4]. Dessa forma, é necessário conhecer as principais fases da vida útil de uma estrutura, possibilitando determinar condições desfavoráveis e garantir uma adequada margem de segurança adotando coeficientes de ponderações para resistências e ações. No que diz respeito à combinação de ações na verificação ao Estado Limite Último, considerando-se combinações últimas normais, estas são obtidas, de acordo com a NBR-6118:2014, através da expressão (2.1).

$$F_{d,ult} = \gamma_g F_{gk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{0j} F_{qj,k}) \quad (2.1)$$

Sendo  $F_{d,ult}$  o valor de cálculo para a combinação última de solicitações normais;  $F_{gk}$  o valor característico da ação permanente;  $F_{q1k}$  o valor característico da ação variável principal;  $F_{qj,k}$  o valor característico das demais ações variáveis;  $\gamma_g$  e  $\gamma_q$  os coeficientes parciais para ações permanentes e variáveis, respectivamente;  $\psi_{0j}$  o coeficiente redutor na combinação de ações.

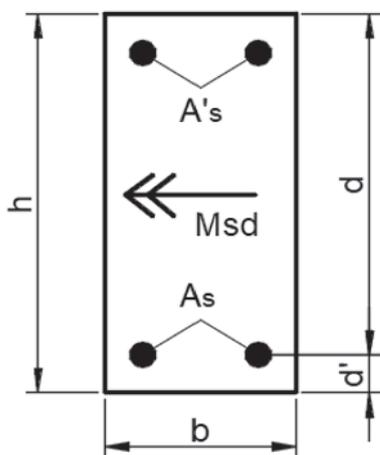
Para os casos mais usuais, os valores dos coeficientes parciais indicados pela referida norma resultam  $\gamma_g = \gamma_q = 1,4$ , e o coeficiente redutor para as demais cargas acidentais, que não a principal, é adotado  $\psi_{0j} = 0,50$ . Dessa forma, em relação ao Estado Limite Último, o valor de cálculo da solicitação é dado por (2.2).

$$F_{d,ult} = 1,4(F_{gk} + F_{q1k}) + 1,4 \sum 0,50 F_{qj,k} \quad (2.2)$$

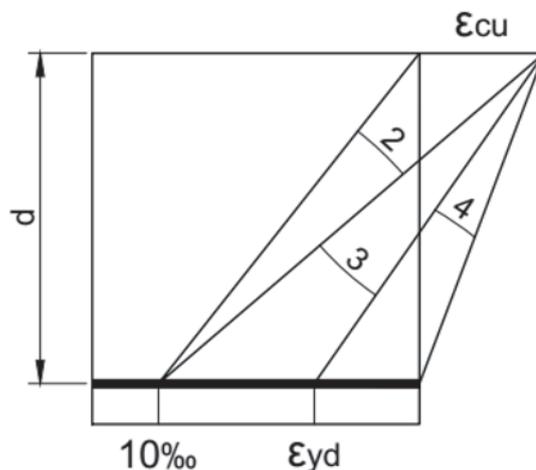
Em relação aos estados limites de serviço, a combinação das ações é feita considerando-se o tempo de permanência das ações sobre a estrutura. Para ações que atuarão sobre a estrutura durante grande parte de sua vida útil, estas têm seus valores tomados como quase permanentes, sendo a combinação dada pela expressão (2.3).

$$F_{d,qp} = \sum F_{gi,k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \quad (2.3)$$

Sendo  $F_{d,qp}$  o valor de cálculo para a combinação quase permanente e  $\psi_{2j}$  o coeficiente redutor na combinação das ações. A combinação quase permanente, de acordo com a NBR-6118:2014, deve ser utilizada na verificação dos deslocamentos. Considerando cargas acidentais provenientes de edificações residenciais, o fator de redução é tomado como  $\psi_{2j} = 0,30$ . Com isso, a equação (2.3) pode ser reescrita por (2.4).



**Figura 2.1**  
Seção retangular genérica submetida à flexão simples



**Figura 2.2**  
Domínios considerados para ruptura em flexão simples

$$F_{d,qp} = \sum F_{gi,k} + 0,30F_{qj,k} \tag{2.4}$$

Para o caso de ações que se repetem por diversas vezes ao longo da vida útil da estrutura, a ação variável principal é tomada com seu valor frequente, enquanto as demais assumem seus valores quase permanentes. Nessa condição, a combinação é dada por (2.5).

$$F_{d,f} = \sum F_{gi,k} + \psi_1 F_{q1k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \tag{2.5}$$

Sendo  $F_{d,f}$  o valor de cálculo para a combinação frequente. A verificação da abertura de fissuras é realizada através do emprego da equação (2.5). Para cargas acidentais provenientes de edificações residenciais, adota-se  $\psi_1 = 0,40$ , reescrevendo (2.5) como (2.6).

$$F_{d,f} = \sum F_{gi,k} + 0,40F_{q1k} \tag{2.6}$$

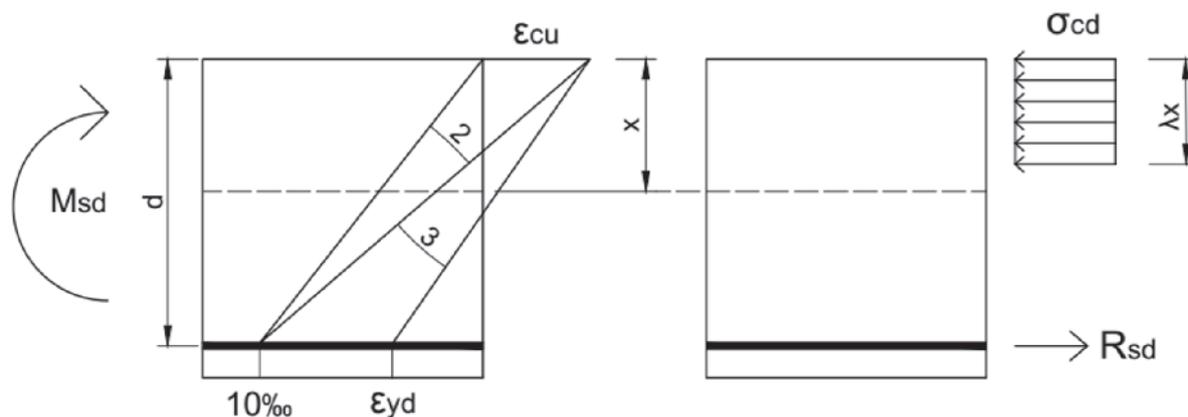
### 2.2 Dimensionamento à flexão

A etapa de dimensionamento de vigas de concreto armado consiste, para uma dada geometria e condição de carregamento previstas em uma etapa de projeto, em determinar a quantidade e

disposição de armadura para atender a condição de segurança  $M_{Rd} \geq M_{Sd}$ , sendo  $M_{Rd}$  e  $M_{Sd}$  os valores de projeto do momento resistente e solicitante, respectivamente.

Neste trabalho considera-se uma seção retangular, representada genericamente na Figura 2.1. Como hipóteses básicas do dimensionamento em flexão, considera-se que as seções permaneçam planas após a deformação; admite-se perfeita aderência entre o aço e o concreto que o envolve; a contribuição do concreto em tração é completamente desprezada [4]. Considerando o caso de vigas sob flexão simples, a ruptura é caracterizada pelo esmagamento do concreto ou pelo escoamento da armadura passiva. Dessa forma, admite-se que o equilíbrio de uma seção transversal sob estas condições dar-se-á nos domínios 2, 3 (condição de ruptura dúctil), apresentados na Figura 2.2.

A ocorrência dos domínios acima é caracterizada pela posição da linha neutra na seção transversal. Com o intuito de garantir ductilidade às vigas, a NBR-6118:2014 estabelece os limites da posição relativa da linha neutra  $\xi = x/d$  conforme a classe do concreto, em



**Figura 2.3**  
Equilíbrio de esforços internos ao momento solicitante

função da resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ), de acordo com (2.7).

$$\begin{aligned} \xi_{lim} &\leq 0,45 & f_{ck} &\leq 50 \text{ MPa} \\ \xi_{lim} &\leq 0,35 & 50 \text{ MPa} < f_{ck} &\leq 90 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ainda que o concreto em compressão apresente comportamento não-linear, admite-se a consideração de um bloco retangular de tensões [4], representado na Figura 2.3, atuando juntamente com a armadura tracionada e equilibrando, dessa forma, o momento solicitante.

O bloco retangular do concreto em compressão pode ser considerado até uma posição  $y = \lambda x$ , sendo  $\lambda$  uma constante adotada em função da classe de concreto empregado, conforme (2.8).

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,8 & f_{ck} &\leq 50 \text{ MPa} \\ \lambda &= 0,8 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) & f_{ck} &> 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (2.8)$$

O equilíbrio da seção apresentada na Figura 2.3 resulta em uma equação de segundo grau em relação à posição  $x$  da linha neutra, interessando apenas o valor contido na seção transversal, sendo este dado pela expressão (2.9).

$$x = \frac{d}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{M_{sd}}{bd^2 \sigma_{cd}}} \right) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{cd} = \frac{\alpha_c f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.10)$$

Sendo  $\sigma_{cd}$  o valor de cálculo da resistência à compressão do concreto;  $\alpha_c$  um parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão, em função da classe do concreto;  $\gamma_c$  o coeficiente de ponderação da resistência do concreto.

Introduz-se, através de (2.11), a variável adimensional  $\mu$ , que representa o momento fletor reduzido, sendo função apenas da geometria pré-estabelecida e dos valores de cálculo da resistência e solicitação.

$$\mu = \frac{M_{sd}}{bd^2 \sigma_{cd}} \quad (2.11)$$

A verificação quanto à condição de ductilidade é obtida comparando o momento fletor reduzido com o seu valor limite correspondente, obtido pela expressão (2.12).

$$\mu_{lim} = \lambda \xi_{lim} (1 - 0,5 \lambda \xi_{lim}) \quad (2.12)$$

Uma vez que se garanta que  $\mu \leq \mu_{lim}$ , confirmando a posição da linha neutra nos domínios 2 ou 3, a solução em armadura consiste na utilização de um arranjo simples, sem armadura colaborante à compressão. Nesta situação, a área de aço  $A_s$  é obtida por intermédio de (2.13) e (2.14).

$$\xi = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (2.13)$$

$$A_s = \lambda \xi b d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.14)$$

Sendo  $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$  a tensão de escoamento de cálculo da armadura;  $f_{yk}$  o valor característico da tensão de escoamento;  $\gamma_s$  o coeficiente de ponderação da resistência do aço.

Para as situações em que  $\mu > \mu_{lim}$ , a condição de ruptura dúctil no domínio 2 ou 3 sem alteração na geometria e na resistência dos

materiais é obtida adotando-se uma armadura colaborante à compressão ( $A_s'$ ). Com isso, o problema resulta indeterminado, uma vez que as três incógnitas  $A_s$ ,  $A_s'$  e  $\xi$  devem ser obtidas por duas equações de equilíbrio na seção transversal. Uma alternativa é fixar  $\xi = \xi_{lim}$ , obtendo-se as áreas de aço tracionada e comprimida por equilíbrio [3]. A deformação e tensão na armadura colaborante à compressão,  $\varepsilon_s'$  e  $\sigma_{sd}'$ , respectivamente, são dadas pelas expressões (2.15) e (2.16).

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_u \left( \frac{\xi_{lim} - d/d'}{\xi_{lim}} \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{sd}' = E_s \varepsilon_s' \quad (2.16)$$

Sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade da armadura. Nessa condição, as áreas de aço tracionada e comprimida,  $A_s$  e  $A_s'$ , são obtidas pelas expressões (2.17) e (2.18), respectivamente.

$$A_s = \left( \lambda \xi_{lim} + \frac{\mu - \mu_{lim}}{1 - d/d'} \right) b d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.17)$$

$$A_s' = \left( \frac{\mu - \mu_{lim}}{1 - d/d'} \right) b d \frac{\sigma_{cd}}{\sigma_{sd}} \quad (2.18)$$

A área de aço tracionada deve ainda respeitar um valor mínimo, de forma a evitar uma ruptura brusca na transição do estágio I para o estágio II. A armadura tracionada mínima é obtida através do dimensionamento ao momento fletor de cálculo mínimo [4], dado por (2.19), devendo ser respeitada ainda a taxa geométrica mínima de 0,15%.

$$M_{sd,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \quad (2.19)$$

Sendo  $W_0$  o módulo resistente da seção, relativo à fibra mais tracionada; e  $f_{ctk,sup}$  o limite superior da resistência característica à tração do concreto.

### 2.3 Verificação aos Estados Limites de Serviço

Além do dimensionamento da armadura longitudinal à flexão, visando garantir um nível adequado de segurança em relação ao colapso, deve-se garantir também que a estrutura apresente um bom desempenho sob condições normais de utilização, no sentido de garantir conforto e durabilidade à mesma [3]. Em vigas de concreto armado, são usualmente verificados os Estados Limites de Deformação Excessiva (ELS-D) e o Estado Limite de Abertura de Fissuras (ELS-W). Ainda que estes dois Estados Limites estejam relacionados, ambos são verificados de forma isolada de acordo com o procedimento apresentado na NBR-6118:2014.

#### 2.3.1 Verificação de deslocamentos excessivos

Já sob cargas de serviço, o concreto inicia o processo de fissuração nas seções mais solicitadas, reduzindo de forma significativa a rigidez da estrutura. Neste caso, a obtenção dos deslocamentos imediatos presume a consideração de uma rigidez equivalente considerando o estado de fissuração da peça. De acordo com a NBR 6118:2014 [4], a rigidez equivalente  $(EI)_{eq}$  é obtida através da expressão (2.20).

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (2.20)$$

Sendo  $E_{cs}$  o módulo de elasticidade secante do concreto;  $M_f$  o momento de fissuração da seção transversal;  $M_o$  o momento máximo no vão para a combinação considerada;  $I_o$  e  $I_{II}$  os momentos de inércia da seção bruta de concreto e da seção no estágio II, respectivamente. Por conta do comportamento reológico do concreto, deve-se prever uma parcela adicional decorrente dos efeitos diferidos devidos à fluência e retração. Essa parcela adicional é obtida pela multiplicação da flecha imediata por um fator  $\alpha_f$ , apresentado em (2.21).

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \tag{2.21}$$

Na expressão acima,  $\rho'$  representa a taxa de armadura colaborante à compressão. O fator  $\Delta\xi$ , depende do intervalo de tempo compreendido entre a data na qual mede-se a flecha final e a data correspondente ao carregamento da estrutura. Neste trabalho considera-se um valor de  $\Delta\xi = 1,32$ . A flecha final  $\delta_f$  é obtida pela expressão (2.22), devendo respeitar, para o caso de vigas biapoiaadas, o valor limite de  $\delta_{lim} = L/250$ .

$$\delta_f = \delta_o(1 + \alpha_f) \tag{2.22}$$

Sendo  $\delta_o$  a flecha inicial calculada com a rigidez equivalente  $(EI)_{eq}$ .

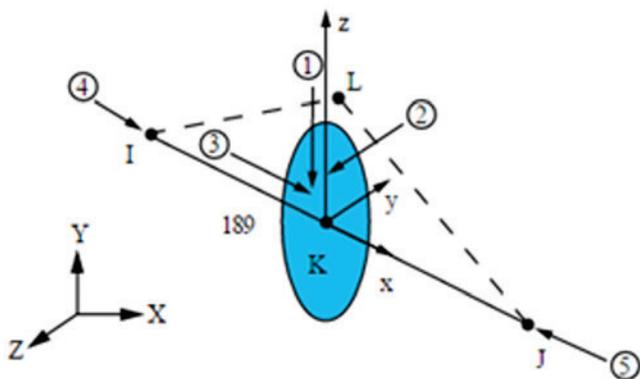
### 2.3.2 Verificação da abertura de fissuras

No sentido da preservação e integridade das estruturas de concreto, o controle da abertura de fissuras visa garantir a inibição de processos que promovam a deterioração das armaduras, como por exemplo, a corrosão [3]. De acordo com a NBR-6118:2014 [4], a abertura característica de fissura  $w_k$  para cada região de envolvimento deve ser considerada como a menor obtida pelas expressões (2.23) e (2.24).

$$w_k = \frac{\phi_i \sigma_{si} 3\sigma_{si}}{12,5\eta_i E_{si} f_{ctm}} \tag{2.23}$$

$$w_k = \frac{\phi_i \sigma_{si}}{12,5\eta_i E_{si}} \left( \frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \tag{2.24}$$

Sendo  $\phi_i$  o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento;  $\sigma_{si}$  a tensão de tração na barra de armadura considerada;  $\eta_i$  o coeficiente de conformação da barra de armadura;  $E_{si}$  o módulo de elasticidade da barra de armadura considerada;  $\rho_{ri}$  a taxa de armadura



**Figura 3.1**  
Elemento *beam189* para representação do concreto (ANSYS, [6])

da região considerada;  $f_{ctm}$  a resistência média à tração do concreto. O valor limite de abertura de fissuras deve ser observado de acordo com a classe ambiental em que está inserida a estrutura, conforme a NBR-6118:2014 [4]. No presente trabalho considerou-se uma CAA II, conduzindo à um valor máximo de abertura de fissura  $w_k \leq 0,30\text{mm}$ .

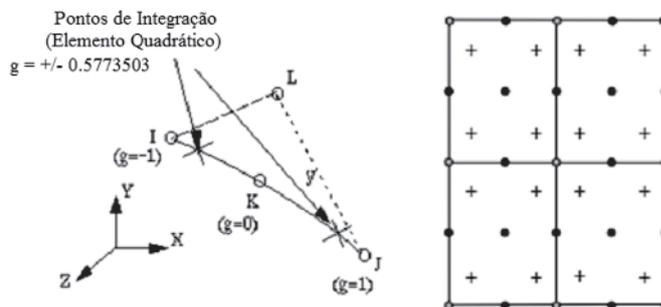
## 3. Análise de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos

O estudo de confiabilidade presume a existência de um modelo, seja analítico ou numérico, que permita representar de forma adequada o comportamento da estrutura em estudo, especialmente no que diz respeito aos valores de carga de ruptura. Neste trabalho empregou-se o método dos elementos finitos para a análise das vigas de concreto armado. As análises foram realizadas através do software ANSYS 17.2, em sua versão acadêmica, associando-se subrotinas externas *usermat* para a representação da lei constitutiva dos materiais. Estas subrotinas são programadas em linguagem Fortran 77, sendo utilizada uma atualização do código desenvolvido inicialmente por Barbosa [5] para o estudo probabilístico de pilares. Os elementos finitos adotados e os modelos mecânicos dos materiais são apresentados de forma mais detalhada a seguir.

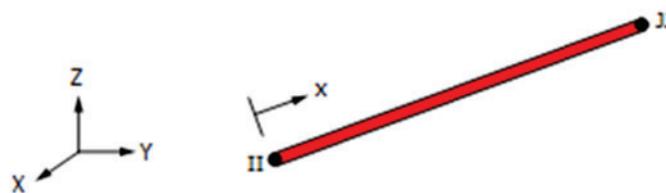
### 3.1 Elementos finitos utilizados

#### 3.1.1 Elemento finito para o concreto

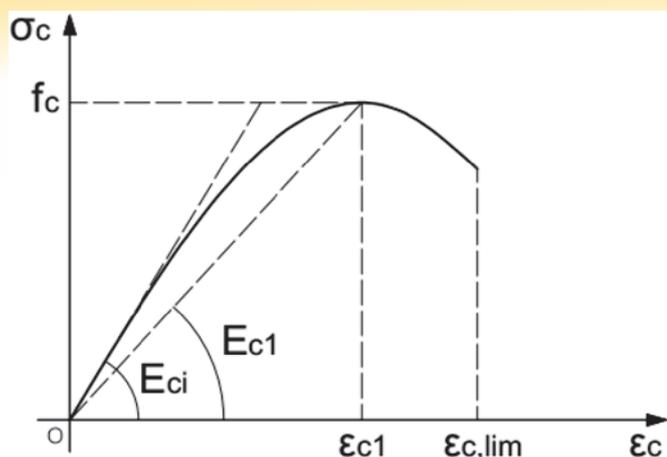
O elemento *beam189* pode ser empregado na análise de estruturas reticuladas, como pilares e vigas esbeltas ou moderadamente



**Figura 3.2**  
Pontos de integração associados ao elemento *beam189* (Adaptado de ANSYS, [6])



**Figura 3.3**  
Elemento *reinf264* para representação da armadura (ANSYS, [6])



**Figura 3.4**  
Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão uniaxial (adaptado *fib* 2010, [14])

esbeltas. Sendo baseado na teoria de vigas de Timoshenko, que considera as deformações por corte, as seções permanecem planas após a deformação [6]. Trata-se de um elemento unidimensional contido no espaço tridimensional, o qual possui três nós ao longo de seu comprimento (formulação quadrática), havendo seis graus de liberdade por nó (3 translações e 3 rotações em torno dos eixos locais  $x$ ,  $y$  e  $z$ ). A Figura 3.1 apresenta a geometria, nós e sistema de coordenada local para o elemento em questão.

O *beam189* conta com dois pontos de integração ao longo do seu comprimento e quatro pontos de integração por cada célula empregada para representar a seção transversal. A Figura 3.2 apresenta os pontos de integração associados ao elemento *beam189* ao longo do comprimento e em relação à seção transversal.

Uma notória vantagem da utilização deste elemento é sua compatibilidade com o elemento *reinf264*, o qual é adotado como armadura incorporada e associado ao modelo de fissuras distribuídas.

### 3.1.2 Elemento finito para armadura

As armaduras foram representadas pelo elemento *reinf264*, disposto na Figura 3.3. Trata-se de um elemento que presume a existência de um elemento base, tal como o *beam189* descrito anteriormente. As coordenadas nodais, graus de liberdade e conectividade do elemento *reinf264* são idênticas ao do elemento base. Sua formulação permite a representação de fibras de reforços atuantes em direções arbitrárias e resistindo exclusivamente a esforços axiais. Estas fibras são associadas ao elemento base admitindo-se completa aderência com o mesmo, sendo inseridas através de posições relativas na seção transversal [6].

## 3.2 Modelo mecânico dos materiais

Neste item são apresentados os modelos mecânicos utilizados na modelagem numérica. As principais propriedades que definem o modelo mecânico do concreto e do aço são obtidas via simulação, de acordo com a distribuição de probabilidade atribuída a elas. Tais aspectos relacionados às variáveis aleatórias são convenientemente abordados no item 6.2.

### 3.2.1 Concreto

Em função de sua composição, o comportamento do concreto ten-

de de ser complexo, apresentando também respostas completamente distintas quando tracionado ou comprimido [7]. Para a realização das análises adotaram-se as relações constitutivas e prescrições apresentadas no código modelo *fib* 2010 [14], sendo aplicáveis para concretos com resistência característica à compressão de até 120 MPa. Utilizaram-se, também, critérios e adaptações sugeridos por pesquisadores e literatura técnica sobre o tema.

Quando comprimido, o concreto tende a apresentar não linearidades ainda sobre baixos valores de tensão, sendo seu modelo constitutivo em compressão uniaxial representado pelo diagrama tensão-deformação apresentado na Figura 3.4.

O pico em tensão corresponde à resistência à compressão  $f_c$ , procedido por um trecho pós-pico com amolecimento, ocorrendo a ruptura ao se atingir a deformação última em compressão. As expressões e os parâmetros dados em (3.1) caracterizam a curva representada na Figura 3.4.

$$\sigma_c = -f_c \left( \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right) \quad |\epsilon_c| < |\epsilon_{c,lim}| \quad (3.1)$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \quad k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}}$$

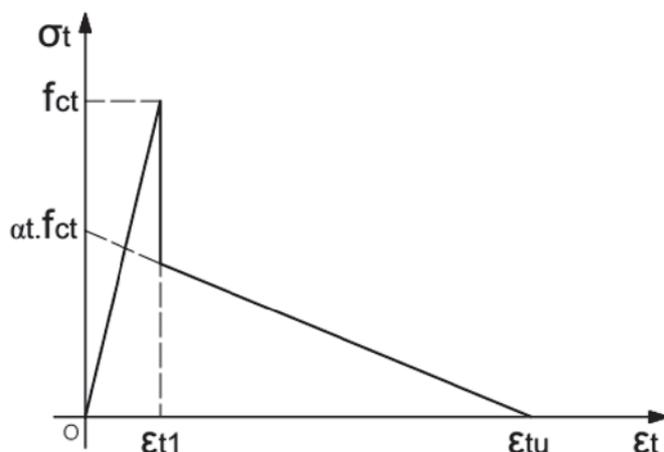
O concreto, uma vez que possui resistência à tração muito inferior à sua resistência à compressão, apresenta formação de fissuras mesmo em um nível baixo de carga. De acordo com Hinton [7], a representação do concreto sob tração compreende a introdução de um critério de fissuração e uma lei de amolecimento. Neste trabalho, o concreto não fissurado, cujas tensões em tração não ultrapassem a resistência  $f_{ct}$ , é representado como um modelo elástico-linear [15], sendo a relação constitutiva dada por (3.2).

$$\sigma_t = E_{ci}\epsilon_t \quad \sigma_t \leq f_{ct} \quad (3.2)$$

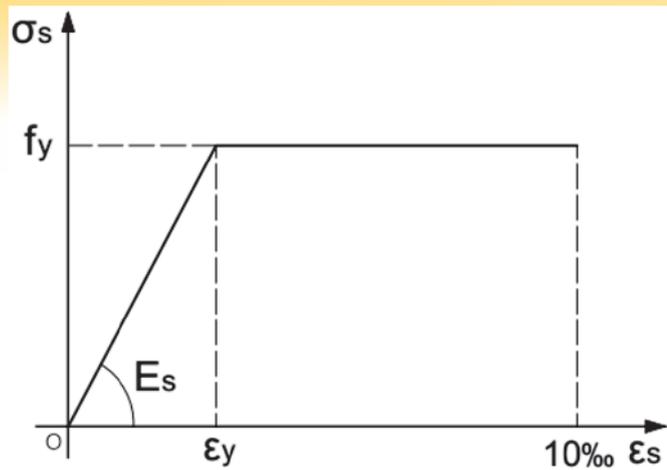
Após fissurado, o concreto entre fissuras continua a colaborar na resistência até um dado nível de deformação. Esse comportamento, denominado *tension-stiffening*, é modelado através de um ramo descendente no diagrama tensão-deformação, o qual representa uma redução gradual na resistência em função do nível de abertura das fissuras, conforme ilustrado na Figura 3.5.

Adotou-se neste trabalho a expressão utilizada por Martinelli [15] para a representação do diagrama tensão-deformação do concreto fissurado, dada por (3.3), sendo utilizados os valores de  $\alpha_t$  e  $\epsilon_{tu}$  igual a 0,6 e 0,001, respectivamente.

$$\sigma_{ct} = \alpha_t f_{ct} \left( 1,0 - \frac{\epsilon_t}{\epsilon_{tu}} \right) \quad (3.3)$$



**Figura 3.5**  
Diagrama tensão-deformação do concreto em tração uniaxial (adaptado de Martinelli, [15])



**Figura 3.6**  
Diagrama tensão-deformação para armadura

**3.2.2 Aço**

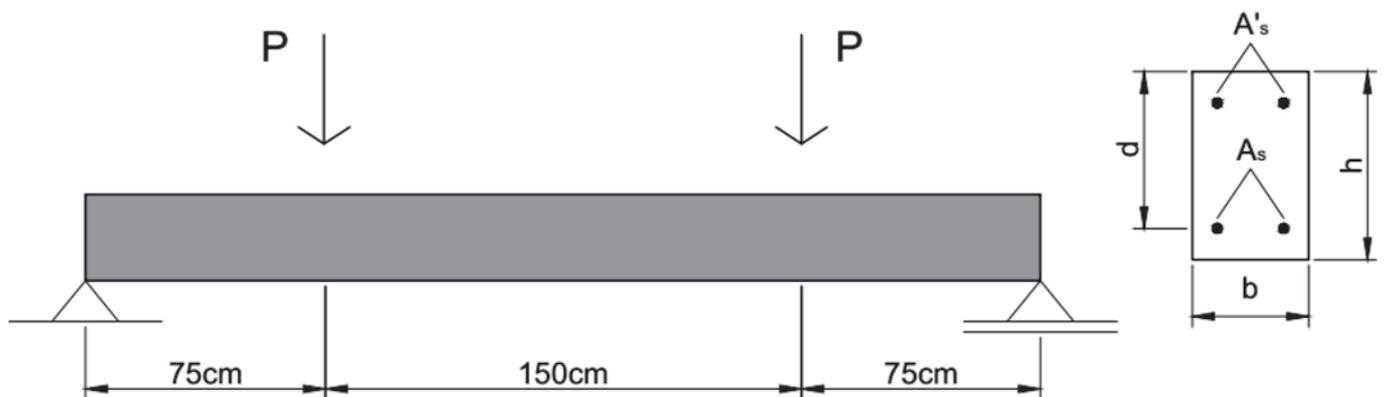
Para representação das armaduras foi empregado um modelo elastoplástico perfeito, conforme apresentado na Figura 3.6. O material possui o mesmo comportamento sob tração e compressão, apresentando um módulo de elasticidade  $E_s$  até atingir a tensão de escoamento  $f_y$ , a partir da qual apresenta um módulo tangente nulo.

**4. Validação do modelo numérico**

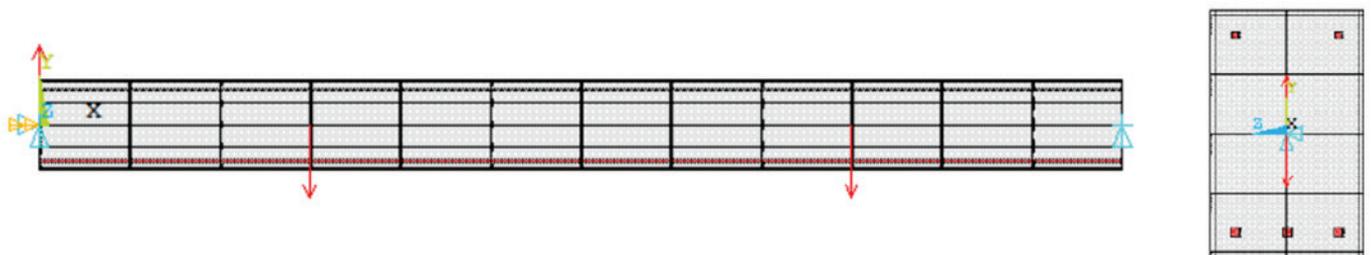
Com o intuito de verificar a capacidade do modelo numérico na obtenção da carga última de vigas de concreto armado, são modeladas numericamente um conjunto de nove vigas ensaiadas por Schegg e Decanini [8]. As vigas foram submetidas à cargas concentradas, conforme ilustrado na Figura 4.1, sendo carregadas gradativamente até a ruptura. As vigas foram divididas em três diferentes conjuntos, diferenciados em relação à taxa de armadura à flexão. A Tabela 4.1 traz os

**Tabela 4.1**  
Propriedades das vigas ensaiadas por Schegg e Decanini [8]

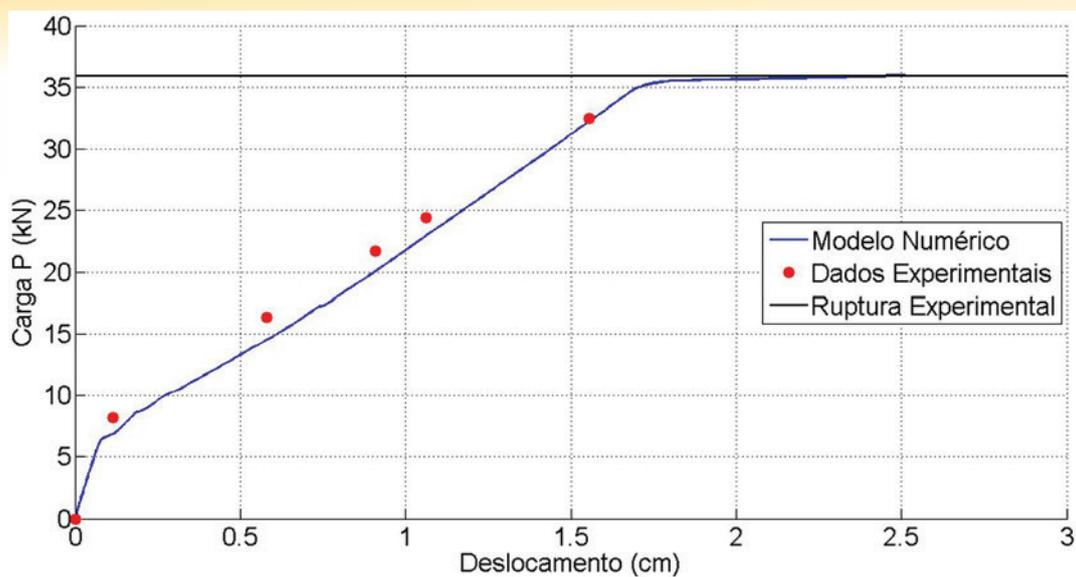
Viga	b (cm)	h (cm)	d (cm)	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )
RC-075-1	15,3	24,6	22,1	3,11	54,9	2,35	
RC-075-2	14,9	24,7	21,9	2,82	53,8	(3φ10mm)	
RC-075-3	14,6	24,8	22,1	2,96	54,8		
RC-100-1	15,0	23,9	21,7	3,22	43,8		
RC-100-2	14,6	23,9	21,7	3,40	42,7	3,39	1,00 (2φ8mm)
RC-100-3	15,0	23,9	21,7	2,74	42,5	(3φ12mm)	
RC-200-1	15,0	24,0	21,2	2,64	48,4		
RC-200-2	14,8	24,0	21,0	2,96	47,1	6,28	
RC-200-3	15,2	23,7	20,9	2,40	48,7	(2φ20mm)	



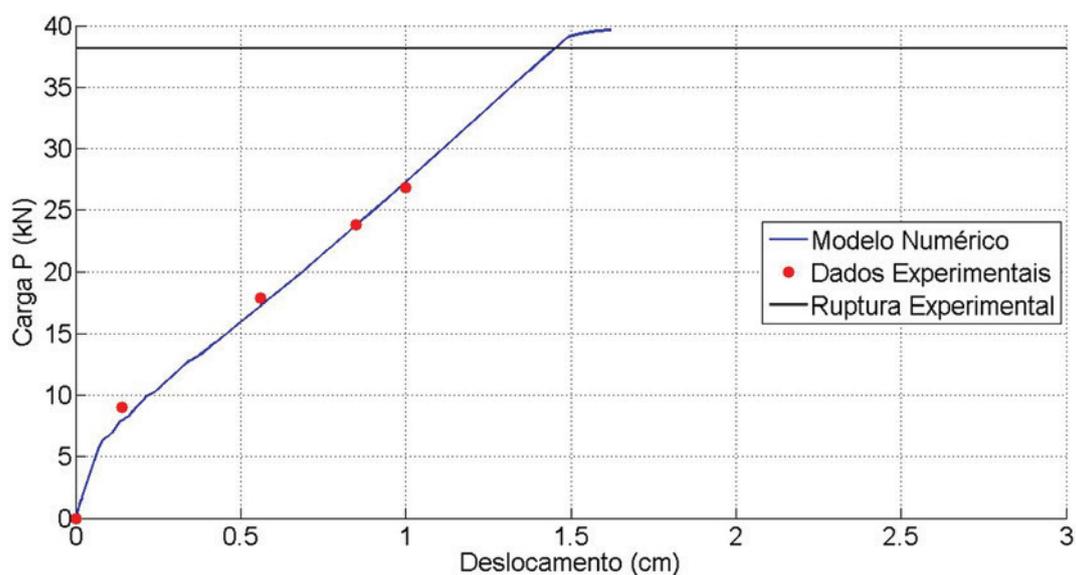
**Figura 4.1**  
Geometria e carregamento das vigas ensaiadas por Schegg e Decanini [8]



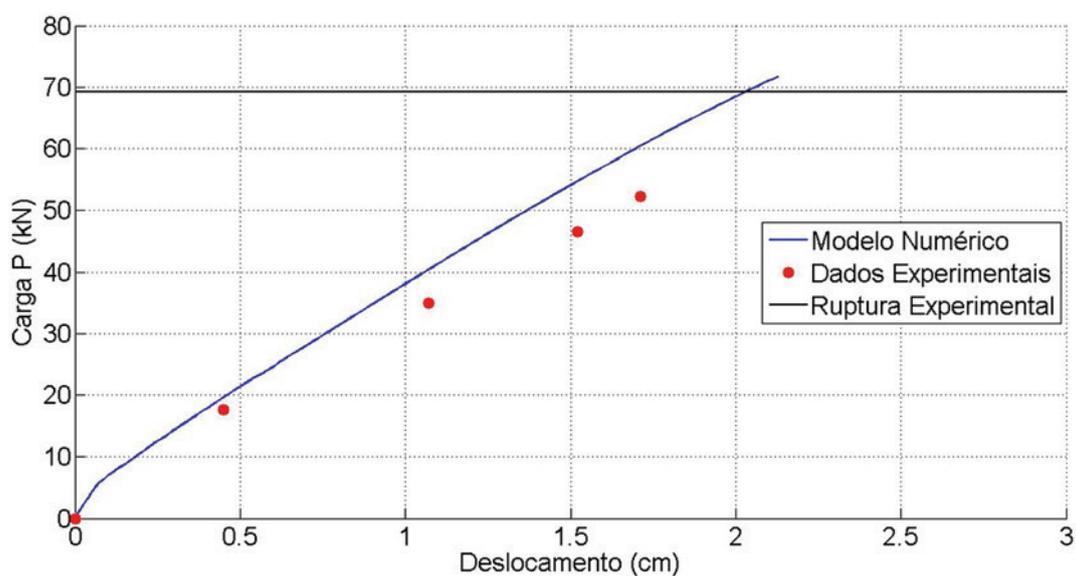
**Figura 4.2**  
Malha de elementos finitos empregada para análise e validação do modelo numérico



**Figure 4.3**  
Gráfico Carga-Deslocamento para a viga RC-075-1



**Figura 4.4**  
Gráfico Carga-Deslocamento para a viga RC-100-1



**Figura 4.5**  
Gráfico Carga-Deslocamento para a viga RC-200-1

**Tabela 4.2**

Cargas de ruptura obtidas experimental e numericamente

Viga	Carga última numérica - Pn (kN)	Carga última experimental - Pe (kN)	Pe/Pn
RC-075-1	35,93	35,85	1,00
RC-075-2	34,75	35,67	1,03
RC-075-3	35,72	35,67	1,00
RC-100-1	39,66	38,16	0,96
RC-100-2	38,81	38,67	1,00
RC-100-3	38,35	37,41	0,98
RC-200-1	71,68	69,16	0,96
RC-200-2	69,72	67,84	0,97
RC-200-3	70,88	69,16	0,98

parâmetros geométricos e resistências medidas após a confecção das vigas.

A malha utilizada para discretização do modelo é apresentada na Figura 4.2. Foram utilizados doze elementos ao longo do comprimento da viga, enquanto a seção transversal foi dividida em quatro células ao longo da base e seis células ao longo da altura.

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam os diagramas carga-deslocamento para a primeira viga de cada série ensaiada. Pode-se verificar que o modelo numérico representa de forma satisfatória o comportamento não-linear das vigas durante o carregamento.

As cargas de ruptura obtidas experimentalmente e através do modelo numérico estão apresentadas na Tabela 4.2. Verifica-se que o modelo em elementos finitos é capaz de captar com boa precisão os valores esperados na ruptura dos modelos.

Pode-se ainda avaliar estatisticamente os valores apresentados na Tabela 4.2. A média e desvio padrão obtidos para a relação Pe/Pn são, aproximadamente, 0,99 e 0,02, respectivamente, refletindo uma variabilidade esperada entre os resultados obtidos experimentalmente e aqueles obtidos via simulação numérica.

## 5. Confiabilidade estrutural

### 5.1 Generalidades

Para Nowak e Collins [9], a confiabilidade estrutural está relacionada com a probabilidade de que uma estrutura atenda a um dado estado limite, durante um intervalo específico de tempo e sob de-

terminadas condições de utilização. Considerando situações de projeto de estruturas de concreto armado, a confiabilidade de uma dada estrutura em relação a um estado limite último está relacionada à probabilidade de que essa estrutura não falhe por ocasião do uso para qual foi concebida, de forma que sua resistência seja superior a solicitação a esta imposta ao longo de sua vida útil.

O fato é que a maior parte dos fenômenos relacionados a engenharia apresentam um dado grau de incertezas, desde aquelas relacionadas às propriedades dos materiais empregados, das cargas atuantes e da geometria final. Em decorrência disso, torna-se impossível atestar uma estrutura como totalmente segura, havendo sempre uma probabilidade de falha finita associada a ela.

### 5.2 Função performance

Um dos aspectos iniciais a ser considerado na análise de confiabilidade de uma estrutura consiste em definir uma função performance para o modo de falha em estudo. Tal função expressa uma relação de capacidade *versus* demanda e caracteriza a resistência da estrutura como suficiente ou insuficiente. Genericamente, a função performance é expressa por (5.1), em que **X** corresponde ao vetor de variáveis básicas do modelo [10].

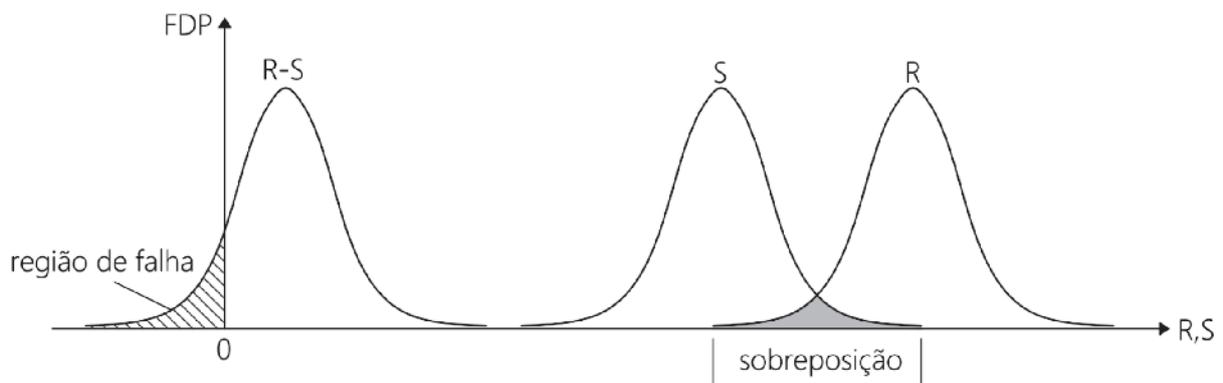
$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{5.1}$$

Considerando uma estrutura em relação ao estado limite último, a segurança é definida a partir da chamada "margem de segurança", dada pela diferença entre a capacidade portante da estrutura e a solicitação a esta imposta. Dessa forma, a expressão (5.1) é particularizada e assume a forma dada por (5.2).

$$g(R, S) = R - S \tag{5.2}$$

Sendo R e S resistência e solicitação, respectivamente. A partir de (5.2), a performance da estrutura pode se enquadrar em três possíveis domínios: o domínio da segurança corresponde a valores de  $g(R, S) > 0$ , situação em que a estrutura é demandada aquém de sua resistência; A falha corresponde à valores de  $g(R, S) < 0$ , sendo a estrutura demandada além de sua resistência. O limite entre a falha e a segurança corresponde à situação  $g(R, S) = 0$ , sendo denominado estado limite [9].

Para um modelo em que resistência e solicitação sejam variáveis aleatórias estatisticamente independentes e com distribuição normal de probabilidade, tem-se, como consequência, uma função margem de segurança igualmente representada por uma distribuição normal de probabilidade, conforme ilustrado na Figura 5.1. Para o caso particular apresentado na Figura 5.1, a função densidade



**Figura 5.1**

Distribuições de probabilidade da resistência, solicitação e margem de segurança (adaptado de Nowak e Collins, [9])

de probabilidade da margem de segurança pode ser definida a partir dos momentos estatísticos da resistência e solicitação (médias  $\mu_R$  e  $\mu_S$ ; desvios padrões  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$ ) de acordo com as expressões (5.3) e (5.4), sendo a probabilidade de falha do modelo obtida por (5.5), em que  $\Phi$  é a função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (5.3)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (5.4)$$

$$p_f = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (5.5)$$

Em problemas de engenharia, de forma geral, o nível de segurança de uma estrutura em relação a um dado estado limite é avaliado através do chamado índice de confiabilidade  $\beta$ . Nas situações em que a margem de segurança apresentar distribuição normal de probabilidade, o índice de confiabilidade pode ser obtido diretamente pela expressão (5.6).

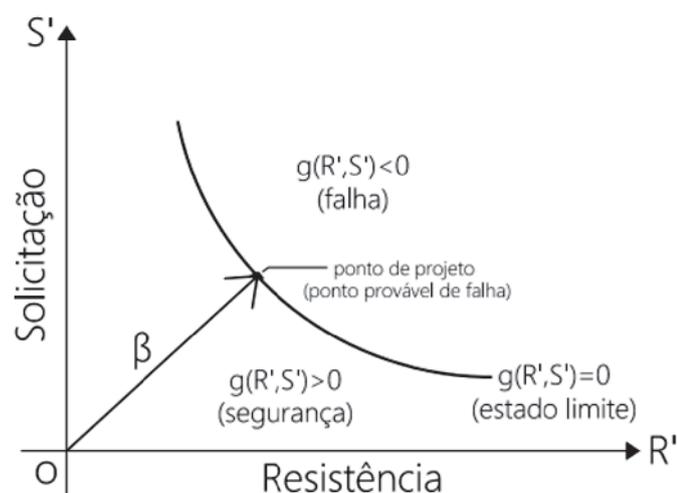
$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (5.6)$$

### 5.3 O método de Monte Carlo

A técnica de simulação aplicada à engenharia consiste na elaboração de um modelo matemático com o intuito de reproduzir o comportamento real de uma estrutura, possibilitando avaliar a variabilidade da carga de ruptura, por exemplo, frente à introdução de aleatoriedades nos parâmetros de entrada, tais como propriedades dos materiais e características geométricas. O Método de Monte Carlo, nesse contexto, tem sido amplamente empregado, em especial pela sua simplicidade e por não demandar conhecimentos mais complexos em probabilidade e estatística [10].

Haldar e Mahadevan [10] descrevem os seis elementos essenciais associados ao método de Monte Carlo, apresentados abaixo:

1. Definir o problema em termos das variáveis aleatórias;
2. Determinar as distribuições de probabilidade e as principais estatísticas das variáveis aleatórias envolvidas no problema;
3. Gerar um conjunto de valores para as variáveis aleatórias de acordo com suas distribuições de probabilidade;
4. Solucionar o modelo de forma determinística para o conjunto de valores das variáveis aleatórias;



**Figura 5.2**  
Interpretação geométrica do índice de confiabilidade (adaptado de Haldar e Mahadevan, [10])

5. Extrair as informações estatísticas após N simulações;

6. Determinar a eficiência do processo de simulação.

Neste trabalho, o método de Monte Carlo é utilizado como ferramenta para inferência estatística da resistência  $R$  que compõe a função  $g(R, S)$ . Para o modelo numérico empregado, um número suficiente de simulações é realizado para que se obtenha a convergência dos momentos estatísticos dos modelos resistentes, determinando-se assim a função densidade de probabilidade  $f_R(r)$  através do ajuste do conjunto de dados obtidos.

### 5.4 Índice de confiabilidade e o FORM

Em muitos casos práticos nos quais a função performance apresenta-se complexa, não sendo possível garantir a normalidade da variável margem de segurança, o simples emprego da expressão (5.6) pode conduzir a erros na estimativa do índice de confiabilidade. Neste contexto, o FORM (First-Order Reliability Method) tem sido amplamente empregado para a obtenção do índice  $\beta$ .

No espaço das variáveis normais padronizadas, o índice de confiabilidade pode ser obtido pela interpretação geométrica da função performance. Na Figura 5.2,  $\beta$  corresponde à menor distância da origem do sistema das variáveis aleatórias normais padronizadas à função estado limite  $g(R', S') = 0$ , a partir da qual se inicia a região de falha. Para uma variável genérica  $X_i$ , esta pode ser representada no sistema das variáveis normais padronizadas conforme (5.7).

$$X_i = \mu_{X_i}^E + X_i' \sigma_{X_i}^E \quad (5.7)$$

Na expressão acima, o índice "E" nos valores de média e desvio padrão indica se tratar de valores da função normal equivalente para o caso de variáveis com distribuição de probabilidade diferente da normal.

Sendo a distância entre a origem e um dado ponto no sistema reduzido das variáveis aleatórias dada por  $D = \sqrt{\mathbf{X}'^T \mathbf{X}'}$ , a determinação do índice de confiabilidade consiste em minimizar distância  $D$  obedecendo à restrição  $g(\mathbf{X}) = 0$ . O ponto sobre a superfície de falha  $g(\mathbf{X}') = 0$  associado à menor distância é denominado ponto provável de falha ou ponto de projeto, sendo expresso por  $\mathbf{x}^{**}$ . O índice de confiabilidade do sistema é obtido por (5.8).

$$\beta = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{**} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)^{2*}}} \quad (5.8)$$

Na expressão (5.8), a notação "\*" indica que o vetor das variáveis aleatórias e as derivadas parciais são avaliadas no ponto de falha. Como este ponto não é conhecido a priori, o valor de  $\beta$  é obtido por aproximações sucessivas. O cosseno diretor  $\alpha_i$  para cada variável é dado por (5.9), sendo o ponto de projeto  $x_i^{**}$  da respectiva variável no sistema reduzido obtido por (5.10).

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)^{2*}}} \quad (5.9)$$

$$x_i^{**} = -\alpha_i \beta \quad (5.10)$$

Para variáveis que não apresentem distribuição normal de probabilidade, pode-se utilizar o procedimento de Rackwitz e Fiessler, apresentado em Nowak e Collins [9], para determinar os valores da média e desvio padrão de uma variável normal equivalente no ponto de projeto, dadas as funções distribuição de probabilidade acumulada  $F_X(x)$  e a densidade de probabilidade  $f_X(x)$  originais da variável. As expressões (5.11) e (5.12) são empregadas para

determinar os valores da média e desvio padrão da função normal equivalente,  $\mu_x^E$  e  $\sigma_x^E$ , respectivamente.

$$\mu_x^E = x^* - \sigma_x^E \{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\} \tag{5.11}$$

$$\sigma_x^E = \frac{1}{f_X(x^*)} \phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\} \tag{5.12}$$

Em que  $\Phi$  e  $\phi$  correspondem à função distribuição de probabilidade acumulada e à função densidade de probabilidade de uma variável normal padronizada, respectivamente.

## 6. Análise probabilística de vigas de concreto armado

### 6.1 Caracterização das vigas

Neste trabalho são avaliados os índices de confiabilidade obtidos para um modelo de viga biapoiada de seção retangular, ilustrada na Figura 6.1, onde também são apresentadas genericamente as armaduras tracionada e comprimida. A viga em questão possui um vão fixo de 500cm e uma largura de 20cm, sendo submetida a um carregamento distribuído característico, composto por uma parcela permanente e acidental.

Neste estudo são considerados quatro parâmetros na caracterização do modelo, sendo estes a resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck} = 25;35;45\text{MPa}$ ), a altura da seção ( $h = 40;50;60\text{cm}$ ), a razão de carregamento ( $r = q_k/g_k = 0,5;1,0;2,0$ ) e o carregamento característico total ( $p_k = 15;20;25\text{kN/m}$ ). São considerados três diferentes valores para cada parâmetro, resultando em um conjunto de 81 vigas identificadas segundo a nomenclatura

$V - f_{ck} - h - r - p_k$ . As áreas de aço foram dimensionadas para cada uma das 81 vigas, em função de sua geometria, propriedades mecânicas dos materiais e carregamento característico, de acordo com os procedimentos de projeto apresentados no item 2.

### 6.2 Variáveis aleatórias consideradas

Um conjunto de dez variáveis aleatórias foi considerado para a representação das incertezas envolvidas no problema em estudo. As distribuições adotadas, bem como os parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias foram extraídos a partir dos trabalhos de Silva [11], Santos et al. [12], Real [1], Nowak e Collins [9] e Galambos et al. [13]. Dentre o número total de variáveis aleatórias, seis foram empregadas na simulação numérica das vigas e, portanto, caracterizam a distribuição de probabilidade obtida para a resistência  $R$  dos modelos em questão. A Tabela 6.1 apresenta as variáveis aleatórias consideradas no modelo em elementos finitos e as suas respectivas distribuições de probabilidade.

As demais variáveis aleatórias, correspondentes às parcelas de solicitações e variáveis de incerteza de modelo são apresentadas na Tabela 6.2. Essas variáveis compõe, juntamente com a variável correspondente à resistência, a função performance empregada para a obtenção do índice de confiabilidade.

### 6.3 Função performance adotada e estatísticas da resistência

A função performance adotada neste trabalho assume a forma apresentada em (6.1).

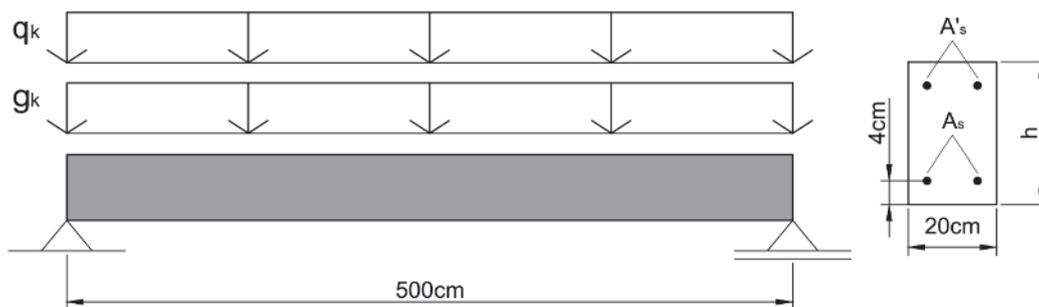


Figura 6.1 Geometria, carregamento e condições de contorno das vigas em estudo

Tabela 6.1 Variáveis aleatórias associadas a resistência, empregadas na simulação numérica

Variável	Descrição	Distrib.	$\mu_x$	$V_x$	Ref.
$f_c$	Resistência à compressão do concreto	Normal	$f_{ck} / (1-1,645V_x)$	0,1	[1], [12]
$f_{ct}$	Resistência à tração do concreto	Normal	Nota "a"	0,1	[1]
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto	Normal		0,1	
$f_y$	Tensão de escoamento da armadura	Normal	$f_{yk} / (1-1,645V_x)$	0,05	[1], [12]
$h$	Altura da seção transversal	Normal	Valor nominal	$0,5/\mu_x$	
$d'$	Distância da armadura tracionada à face inferior da seção transversal	Normal	4 cm	$0,5/\mu_x$	[1]

a) Valores médios determinados de acordo com o código modelo fib 2010, em função da classe do concreto empregado.

$$g(\mathbf{X}) = \theta_R R - \theta_S (G + Q) \quad (6.1)$$

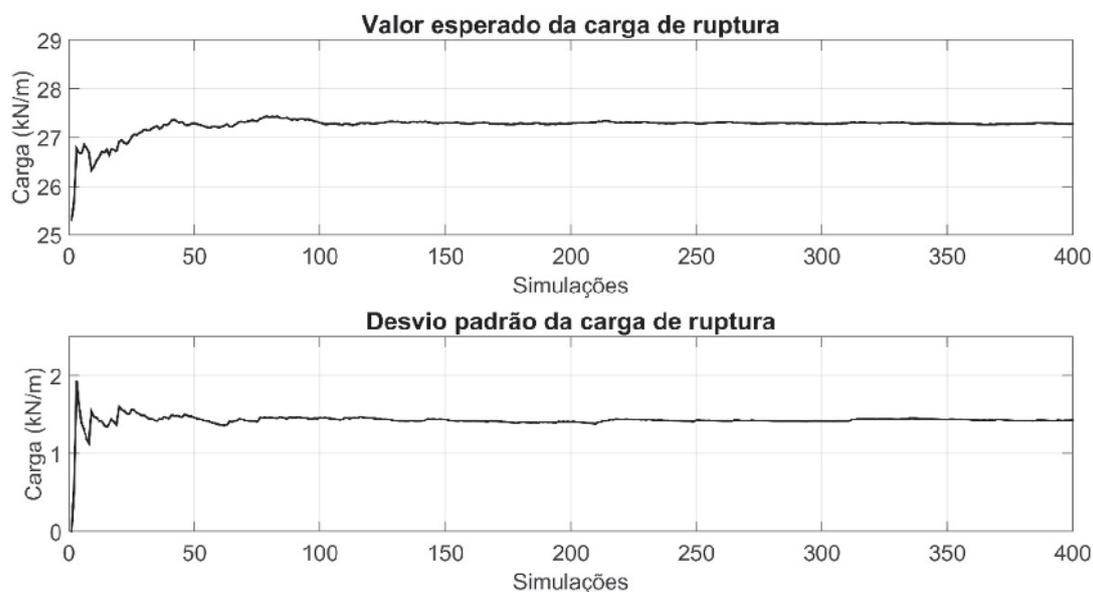
O Método de Monte Carlo é empregado para a obtenção da variável aleatória  $R$ , que corresponde a resistência da viga em

termos da máxima carga distribuída suportada no modelo numérico. O valor médio e desvio padrão da resistência são obtidos a partir de um número suficiente de simulações, que é definido quando se atinge a convergência estatística dos dados. A Figura 6.2 apresenta a convergência estatística da média e desvio

**Tabela 6.2**

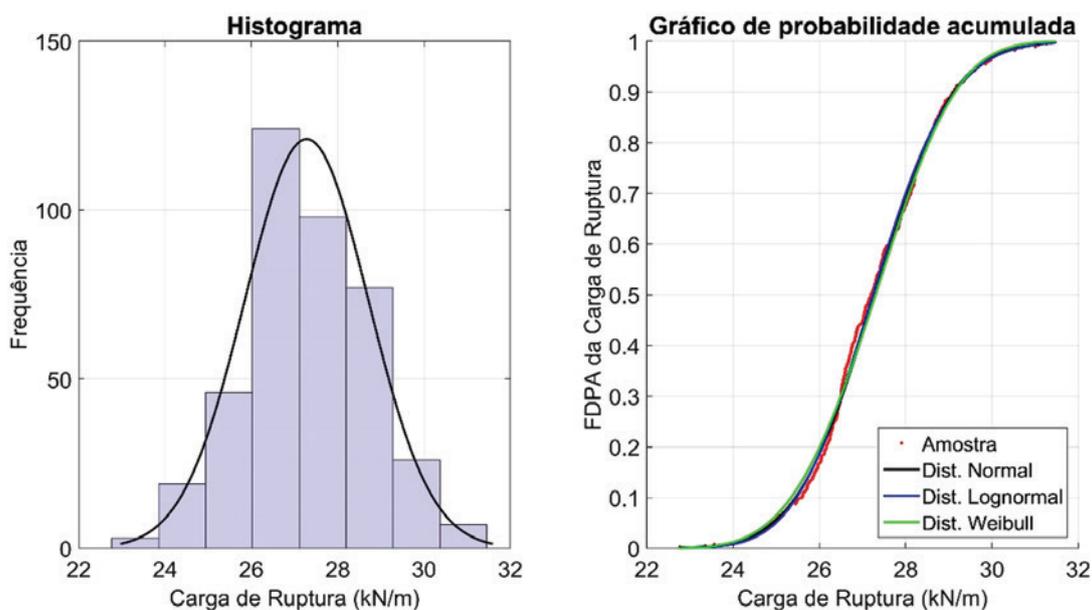
Variáveis aleatórias empregadas no cálculo de  $\beta$  via FORM

Variável	Descrição	Distribuição	$\mu_x$	$V_x$	Ref.
$R$	Resistência do modelo	(Ajustada de acordo com os dados obtidos via simulação)			
$G$	Parcela permanente da solicitação	Normal	$1,05g_k$	0,10	[13]
$Q$	Parcela acidental da solicitação	Gumbel	$q_k/(1+0,35V_x)$	0,25	[11], [13]
$\theta_R$	Parâmetro de incerteza do modelo resistente	Lognormal	1,0	0,05	[12]
$\theta_S$	Parâmetro de incerteza do modelo solicitante	Lognormal	1,0	0,05	[12]



**Figura 6.2**

Convergência dos parâmetros estatísticos da resistência



**Figura 6.3**

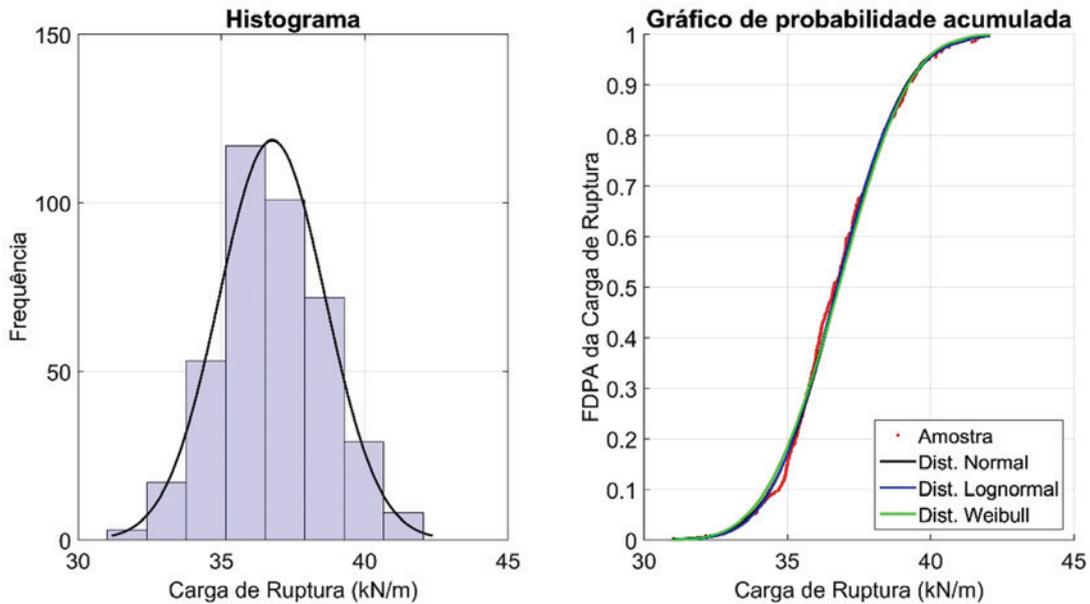
Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-r-15 (400 simulações)

padrão da resistência da viga V-25-40-r-15 para um total de 400 simulações.

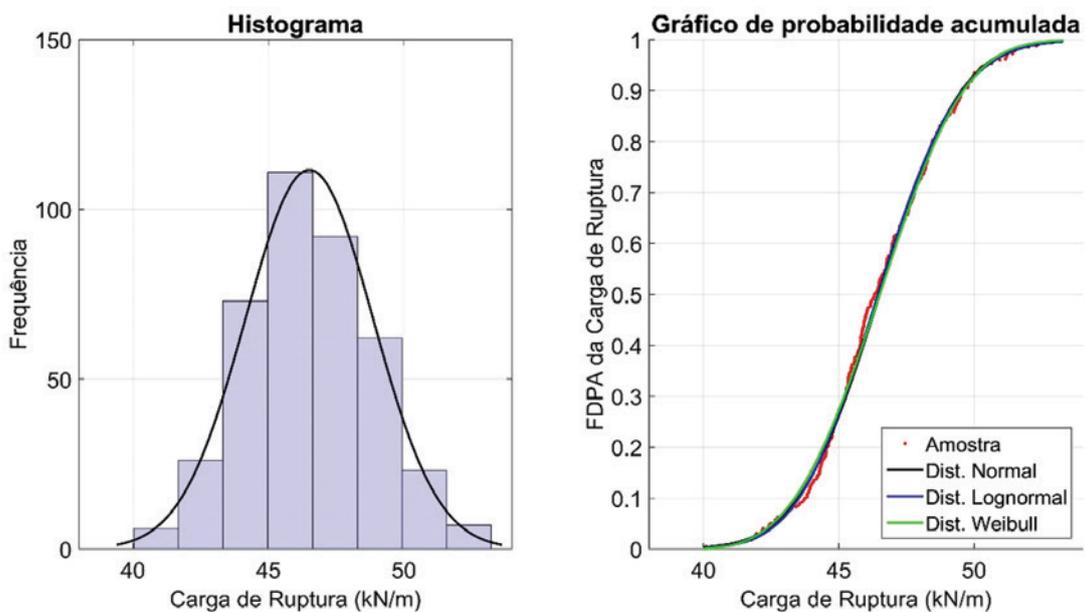
Para o estudo de confiabilidade, o conjunto de dados da resistência de cada modelo foi ajustado segundo uma distribuição de probabilidade teórica conhecida. Este procedimento já foi empregado por outros autores, citando-se os trabalhos desenvolvidos por Szerszen e Nowak [17], Diniz e Frangopol [18], Real [1], Szerszen et al [19], Ferreira et al [20] e Magalhães et al [21].

Utilizaram-se, inicialmente, as distribuições de probabilidade do

tipo Normal, Lognormal e Weibull para o ajuste dos dados de resistência obtidos via simulação. A qualidade destes ajustes foi verificada através dos testes de aderência de Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling [22], a um nível de significância de 5%. As Figuras 6.3 a 6.5 apresentam os histogramas e os gráficos de probabilidade acumulada obtidos, através de 400 simulações, para as vigas com resistência característica à compressão de 25MPa e altura de 40cm, dimensionadas para os carregamentos característicos de 15kN/m, 20kN/m e 25kN/m, respectivamente.



**Figura 6.4**  
Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-r-20 (400 simulações)

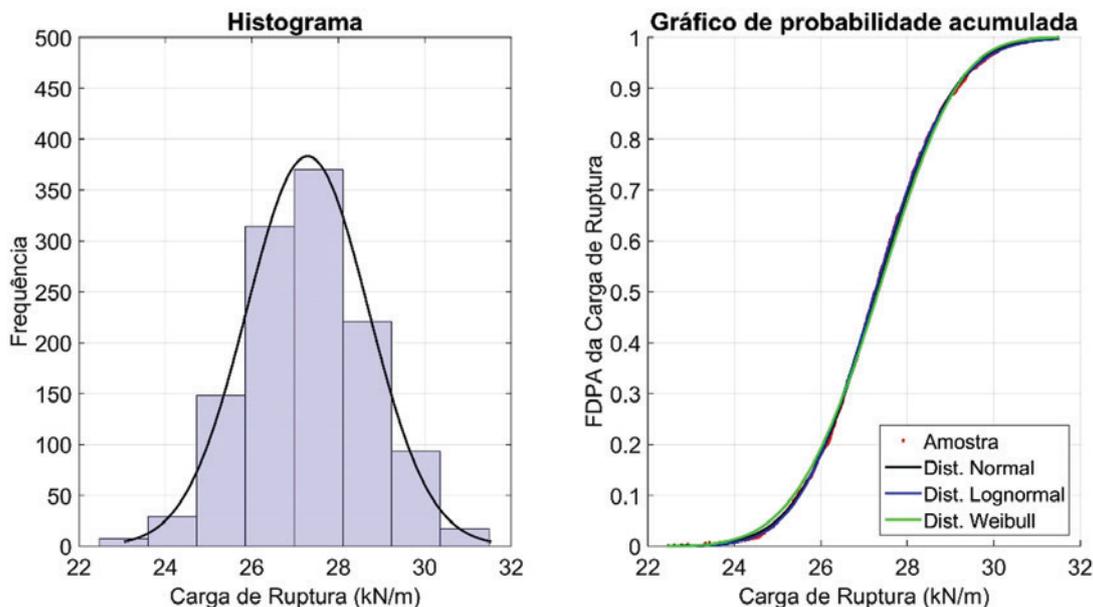


**Figura 6.5**  
Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-r-25 (400 simulações)

Observa-se que as três distribuições teóricas atribuídas conduzem a uma qualidade de ajuste muito similar. Com vistas a avaliar a interferência do número de simulações na qualidade dos ajustes e, conseqüentemente, no estudo de confiabilidade, foram realizadas, para as mesmas vigas acima citadas, um total de 1200 simulações, cujos novos gráficos são apresentados nas Figuras 6.6 a 6.8.

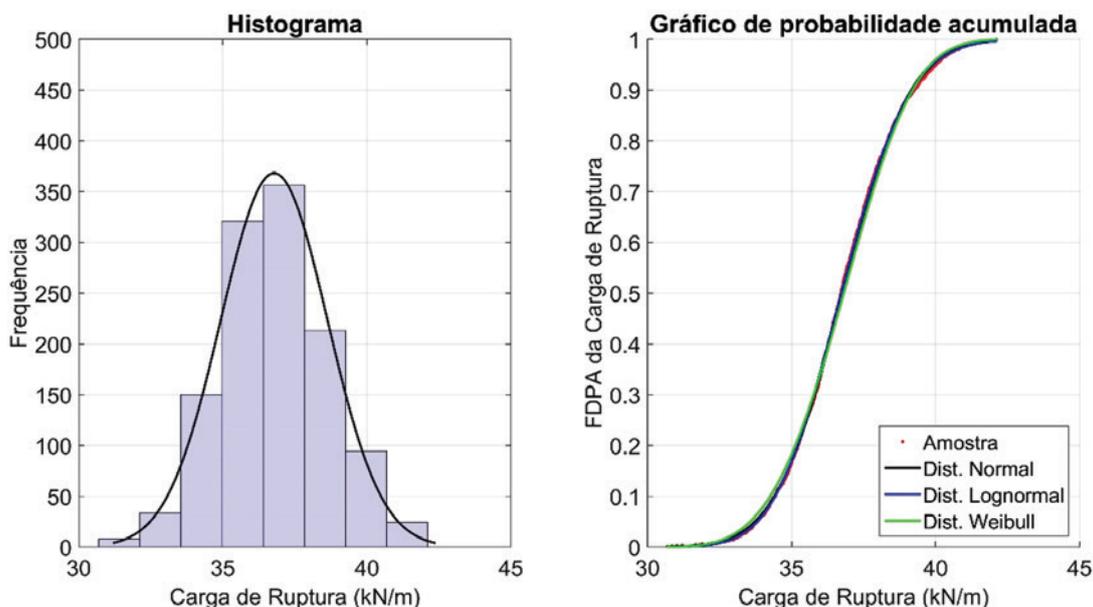
É constatado que um aumento no número de simulações melhora a aderência dos dados às distribuições de probabilidade teóricas atribuídas. Este comportamento é esperado uma vez que, se tratando

de um processo aleatório, um maior número de simulações conduziria a um conjunto de dados melhor distribuído e mais representativo para a caracterização da distribuição de probabilidade [10]. Empregando a função dada em (6.1), foram calculados os índices de confiabilidade para as mesmas três vigas, sendo estes apresentados na Tabela 6.3. Para tal, foram consideradas as três distribuições de probabilidade citadas e um total de 400 e 1200 simulações. Para cada uma das distribuições atribuídas, verifica-se que o aumento do número de simulações não promove alterações



**Figura 6.6**

Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-r-15 (1200 simulações)



**Figura 6.7**

Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-r-20 (1200 simulações)

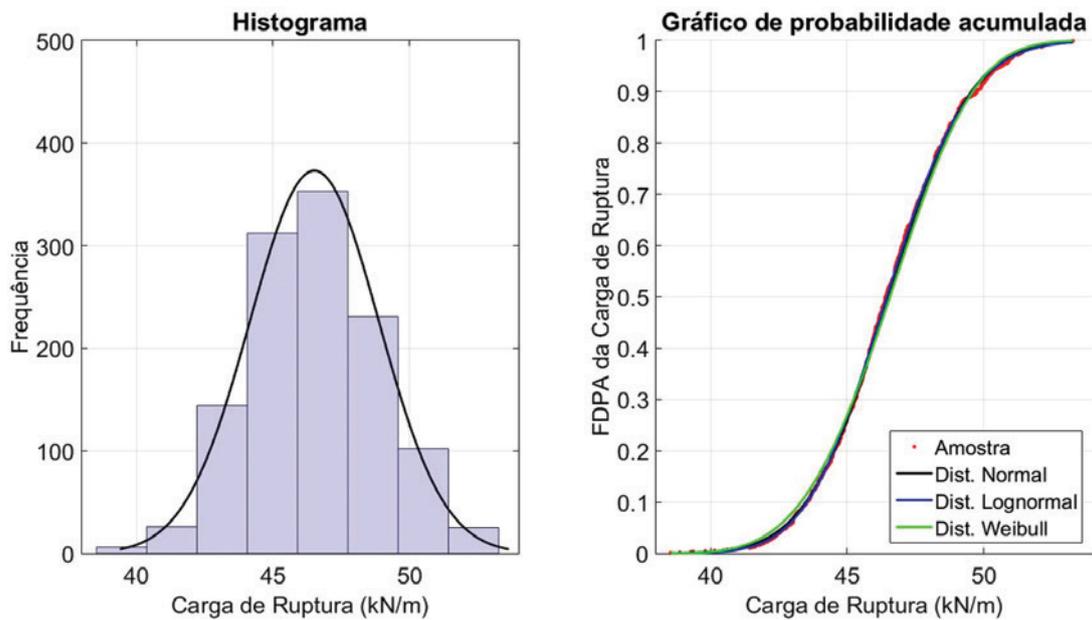
apreciáveis nos índices de confiabilidade. Isso se deve ao fato de o ajuste às distribuições ser realizado fundamentalmente através dos momentos estatísticos provenientes dos dados obtidos via simulação. Logo, uma vez atingida a convergência destes, não se esperam quaisquer alterações significativas nos índices de confiabilidade avaliados, ainda que uma melhor aderência seja observada nos gráficos de probabilidade acumulada.

Em relação aos tipos de distribuições, observa-se que as diferenças nos índices de confiabilidade não são representativas. Não havendo, portanto, indícios de resultados mais precisos em relação

**Tabela 6.3**

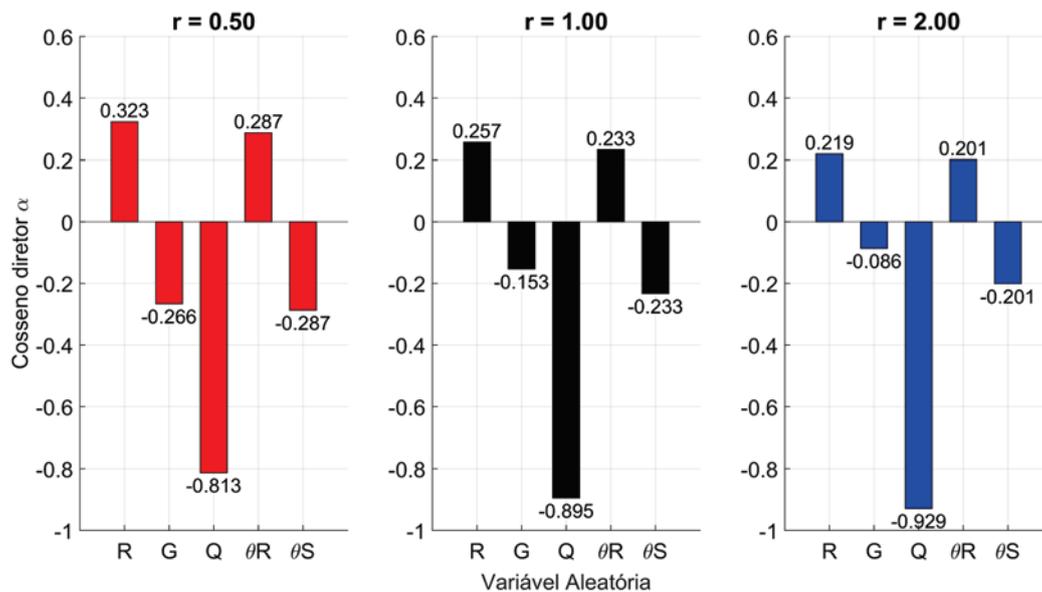
Valores de  $\beta$  em função da distribuição de probabilidade adotada e número de simulações

Viga	Distribuição					
	Normal	Lognormal	Weibull	Normal	Lognormal	Weibull
	400 simulações			1200 simulações		
V-25-40-r-15	4,08	4,08	4,06	4,08	4,09	4,06
V-25-40-r-20	4,15	4,16	4,13	4,16	4,16	4,13
V-25-40-r-25	4,22	4,22	4,21	4,22	4,22	4,20



**Figura 6.8**

Ajuste de distribuições para a resistência da viga V-25-40-r-25 (1200 simulações)



**Figura 6.9**

Cossenos diretores obtidos via FORM para a viga V-25-40-r-15

à qualquer uma das distribuições apresentadas, optou-se por representar a resistência dos modelos segundo uma distribuição normal de probabilidade. A Figura 6.9 traz, para o caso da viga V-25-40-r-15, os cossenos diretores obtidos para a solução da função performance (6.1) via FORM.

Observa-se, prontamente, que para todas as razões de carregamento  $r$ , o cosseno diretor predominante é o da variável aleatória  $Q$ , que corresponde à parcela acidental do carregamento. Isso implica uma grande influência da variável  $Q$  nos índices de confiabilidade, conforme apresentado no estudo paramétrico do item subsequente. Em relação às demais variáveis aleatórias ( $R$ ,  $G$ ,  $\theta_R$  e  $\theta_S$ ), é verificado que seus cossenos diretores possuem ordens de grandeza semelhantes entre si, indicando que estas variáveis exercem influências de mesma relevância nos valores de índices de confiabilidade alcançados. Nessa condição, e considerando os resultados apresentados na Tabela 6.3, é constatado que quaisquer erros inerentes ao ajuste dos dados da resistência  $R$ , ou até mesmo as diferenças esperadas empregando-se diferentes distri-

buições teóricas para  $R$ , não refletem, de forma isolada, em variações significativas nos índices de confiabilidade. Obviamente, tal procedimento é válido desde que seja atestada, para um dado intervalo de confiança, uma qualidade no ajuste da distribuição teórica de  $R$  aos dados obtidos via simulação, tal como o verificado neste trabalho através de testes de aderência.

## 7. Estudo paramétrico

Baseado no modelo numérico e na fundamentação probabilística expostos anteriormente, foi obtido o índice de confiabilidade para cada uma das 81 vigas dimensionadas de acordo com a NBR-6118:2014. Para fins de avaliação do nível de segurança associado às recomendações de projeto da NBR-6118:2014, considera-se o índice de confiabilidade alvo apresentado pelo código modelo *fib* 2010, sendo este  $\beta_{alvo} = 3,80$  para estruturas de concreto armado. As Figuras 7.1 a 7.3 apresentam variação do índice de confiabilidade frente à variação da resistência característica à compressão do

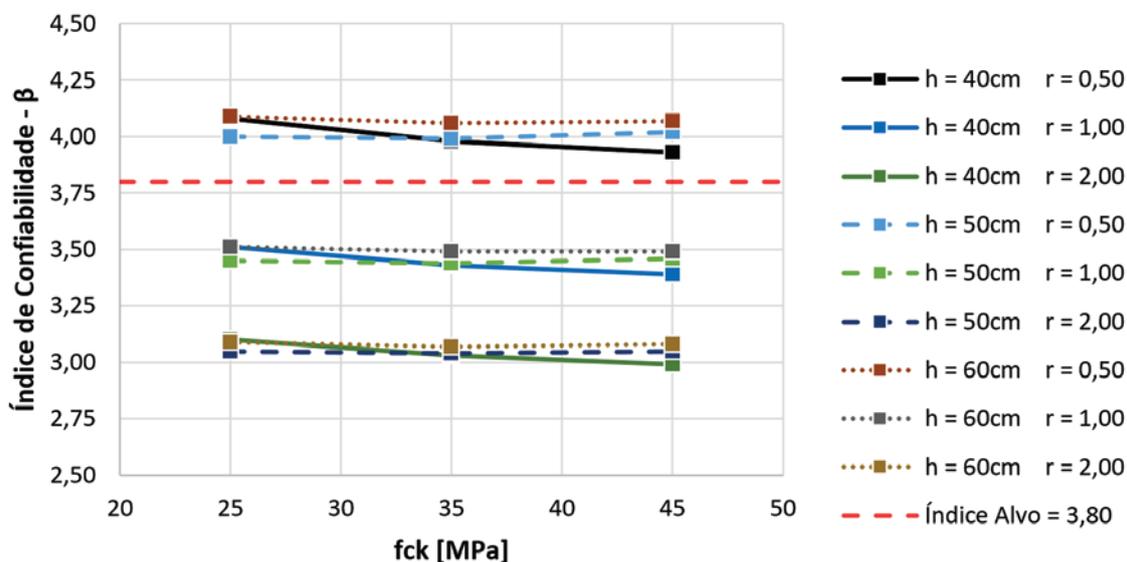


Figura 7.1

Variação do índice de confiabilidade em função do  $f_{ck}$  ( $p_k = 15\text{kN/m}$ )

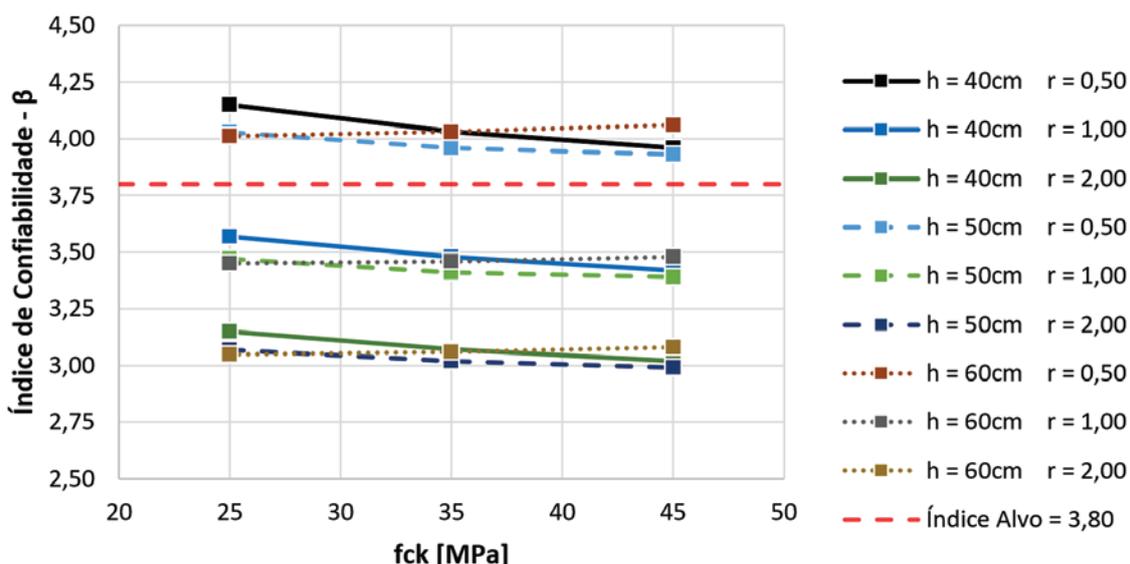
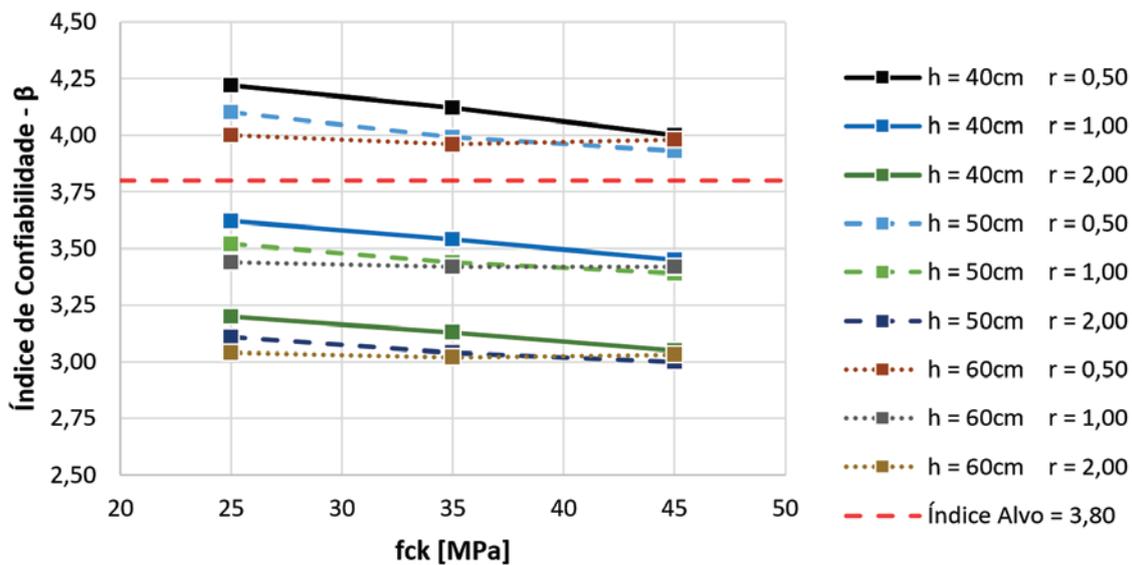


Figura 7.2

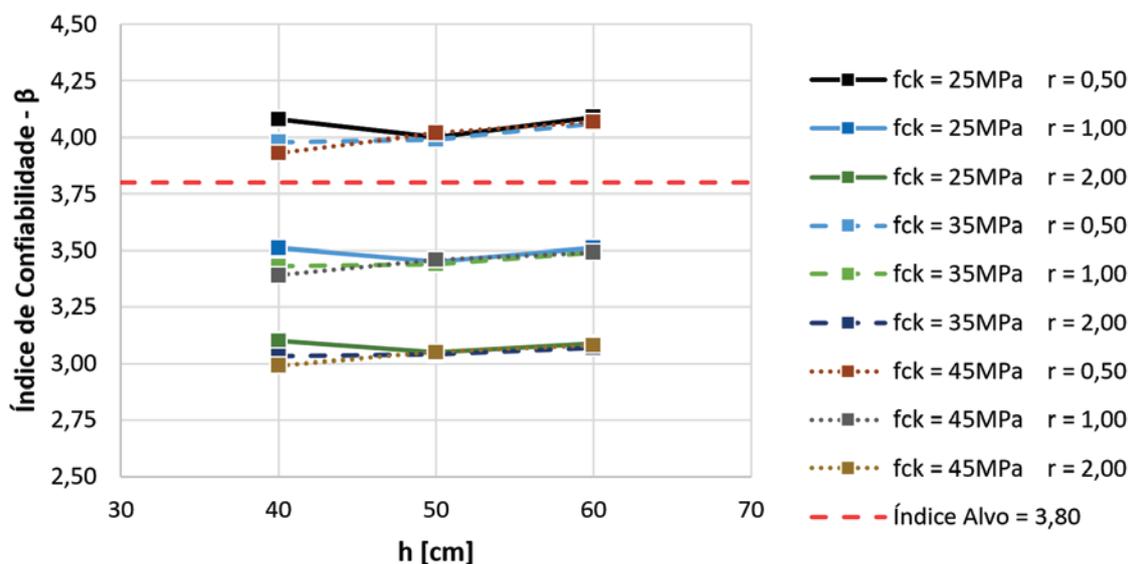
Variação do índice de confiabilidade em função do  $f_{ck}$  ( $p_k = 20\text{kN/m}$ )

concreto para vigas sujeitas a um carregamento característico total de 15kN/m, 20kN/m e 25kN/m, respectivamente, sob diferentes combinações de alturas de seção transversal e razões de carregamento. Observa-se uma sutil tendência de redução do índice de confiabilidade em função do aumento da resistência característica à compressão do concreto. Para vigas com maior altura de seção transversal e/ou maiores resistências características à compressão, contudo, observou-se uma tendência de aumento no índice de confiabilidade, justificados por um pequeno acréscimo na média da resistência destas vigas em função da contribuição do concreto em tração. Esse comportamento é mais evidente em vigas com um menor carregamento característico total, como as apresentadas nas Figuras 7.1 e 7.2.

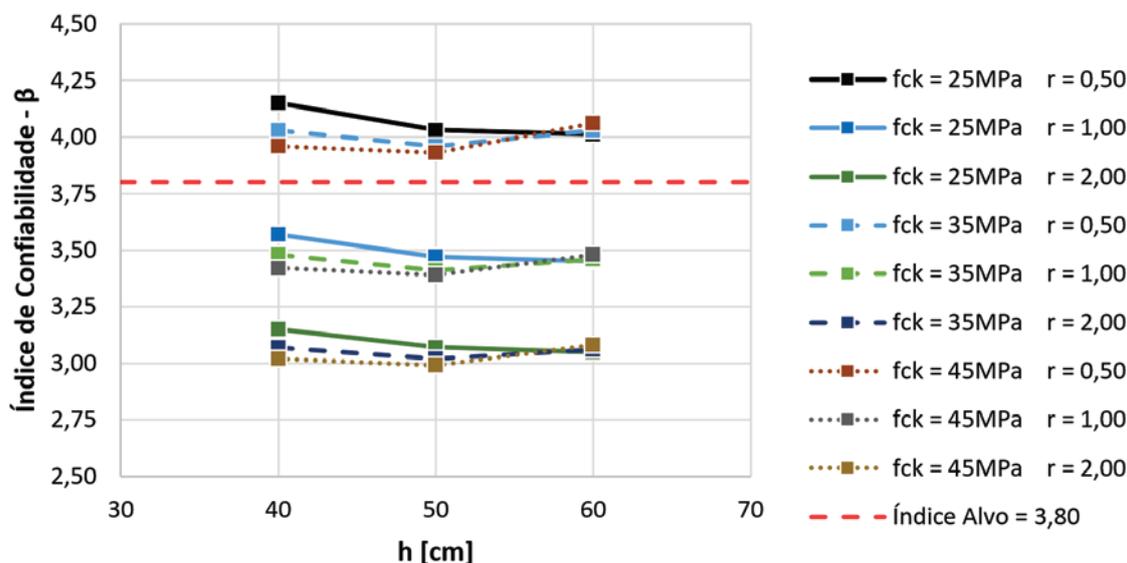
Observa-se ainda que, para diferentes alturas de seção transversal, os índices de confiabilidade tendem a apresentar uma boa uniformidade. A razão de carregamento, por sua vez, tende a alterar significativamente o índice de confiabilidade, conduzindo a uma redução deste à medida em que a carga acidental torna-se predominante na combinação das ações. Por fim, pode-se observar que o aumento no valor do carregamento característico total não promove alterações apreciáveis nos índices de confiabilidade. As Figuras 7.4 a 7.6 apresentam a variação do índice de confiabilidade frente à variação da altura da seção transversal para as vigas sujeitas a um carregamento característico total de 15kN/m, 20kN/m e 25kN/m, respectivamente, sob diferentes combinações



**Figura 7.3**  
Variação do índice de confiabilidade em função do fck (pk = 25kN/m)

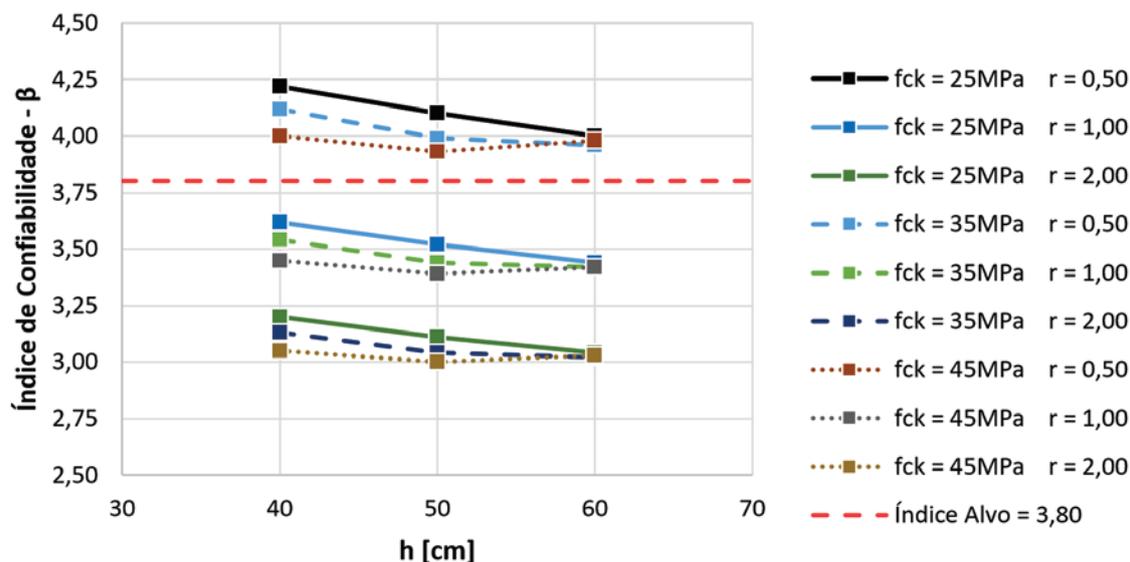


**Figura 7.4**  
Variação do índice de confiabilidade em função de h (pk = 15kN/m)



**Figura 7.5**

Variação do índice de confiabilidade em função de  $h$  ( $p_k = 20\text{kN/m}$ )



**Figura 7.6**

Variação do índice de confiabilidade em função de  $h$  ( $p_k = 25\text{kN/m}$ )

de resistências características à compressão do concreto e razões de carregamento.

É observado que a contribuição do concreto em tração, para as vigas com um menor carregamento característico total, tende a se manifestar com o aumento da altura da seção transversal, mesmo para os menores valores de resistência característica à compressão do concreto, induzindo a um pequeno acréscimo na média da resistência e, portanto, aumentando sutilmente os índices de confiabilidade. Essa condição pode ser observada de forma mais clara na Figura 7.4. Para vigas com um maior carregamento característico total, no entanto, observa-se que o aumento da altura da seção transversal conduz a uma pequena redução dos índices de

confiabilidade. A relação de carregamento mostrou-se como fator de maior influência no índice de confiabilidade, reduzindo estes de forma recorrente para as relações de carregamento  $r = 1,0$  e  $r = 2,0$ .

## 8. Conclusões

O presente trabalho avaliou o nível de segurança atingido por um conjunto de 81 vigas em relação ao estado limite último de flexão. As vigas foram dimensionadas de acordo com as prescrições da norma NBR-6118:2014, que rege o procedimento de projeto de estruturas de concreto no Brasil. Este conjunto de vigas contemplou combinações entre diferentes propriedades do concreto, alturas

de seção transversal, combinações de carregamento e diferentes valores de carregamento característico total.

O Método dos Elementos Finitos e o Método de Monte Carlo foram empregados para a obtenção dos principais parâmetros estatísticos da resistência das vigas em estudo. As variáveis aleatórias contempladas nas simulações são apresentadas na Tabela 6.1. A partir dos dados obtidos via simulação, ajustou-se uma distribuição normal de probabilidade para a representação da resistência de cada uma das 81 vigas. Os índices de confiabilidade deste estudo foram obtidos através do FORM, sendo considerada a função performance dada pela expressão (6.1). Além da variável correspondente a resistência, obtida via simulação, a função performance foi composta pelas variáveis dispostas na Tabela 6.2. Através do estudo paramétrico, observa-se que os índices de confiabilidade das vigas estudadas apresentaram poucas alterações perante variações na resistência característica à compressão do concreto. Pode-se observar valores de confiabilidade sutilmente superiores associados às menores resistências características à compressão, o que pode ser atribuído à maior taxa de armadura dessas vigas. Minasi [16], em sua pesquisa, verificou também que a variação isolada deste parâmetro não altera significativamente os níveis de confiabilidade obtidos. No presente trabalho, ainda, verificou-se que a variação na altura da seção transversal não promove alterações apreciáveis nos índices de confiabilidade.

No que diz respeito à resistência das vigas, observou-se, para configurações de geometria e propriedades mecânicas dos materiais que conduzissem a um aumento na contribuição do concreto tracionado, um pequeno acréscimo na resistência final das vigas, resultando em um pequeno aumento nos índices de confiabilidade para as vigas com um menor carregamento característico total.

Em relação ao valor do carregamento característico total, observou-se nesse estudo uma baixa influência deste nos valores de confiabilidade alcançados. Esta mesma tendência foi observada nos estudos de Santos et al. [12]. Em contrapartida, observa-se uma grande influência da razão de carregamento  $r$ , apresentando o índice de confiabilidade consideráveis reduções ao passo que o carregamento acidental se torna predominante na combinação das ações. Este comportamento foi igualmente verificado nos trabalhos de Santos et al. [12] e Minasi [16]. Esta variação é justificada pelo grande coeficiente de variação atribuído à parcela acidental do carregamento. Das 81 vigas avaliadas, um total de 54 apresentaram índices de confiabilidade inferiores ao índice alvo estipulado. Todos os índices que resultaram abaixo do índice alvo correspondem às combinações de ações nas quais a carga acidental é proporcionalmente igual ou maior que a carga permanente, o que indica que os atuais coeficientes de ponderação para cargas acidentais não garantem uma uniformidade nos índices de confiabilidade para os casos em que as cargas acidentais se tornam preponderantes nas combinações das ações.

Salienta-se que os índices de confiabilidade obtidos nesta pesquisa são resultados de aproximações, desde aquelas associadas ao comportamento mecânico dos materiais, até aquelas relacionadas à atribuição de distribuições teóricas para cada variável aleatória. Soma-se a isso a unidimensionalização da variável resistência, sendo a mesma representada através de uma variável aleatória  $R$  com distribuição normal de probabilidade. Resultados mais precisos são esperados empregando-se o Método da Superfície de Respos-

ta, onde  $g(\mathbf{X})$ , função do modelo em elementos finitos, passa a ser representada por um polinômio aproximador, construído de forma adaptativa nas intermediações do ponto de projeto [24]. Outra alternativa, ainda, consiste no acoplamento direto de subrotinas de confiabilidade com o programa de elementos finitos. Nesta abordagem, a função  $g(\mathbf{X})$  é tratada de forma implícita, sendo as componentes  $\partial g/\partial X_i$  do gradiente computadas numericamente [23,24].

Por fim, considerando a abordagem realizada neste trabalho, verificou-se que as diferentes distribuições testadas para a resistência  $R$  não refletiram em grandes variações nos índices de confiabilidade obtidos. Estes resultados podem ser justificados pelos cosse- nos diretores das variáveis aleatórias (Figura 6.9), sendo possível notar que, para a função performance adotada, correspondente ao estado limite último de flexão, a influência de  $R$  não é preponderante em relação às demais variáveis. Esse fato ratifica as aproximações adotadas e qualifica os resultados obtidos.

## 9. Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

## 10. Referências bibliográficas

- [1] REAL, M. V. Análise Probabilística de Estruturas de Concreto Armado, Sob Estado Plano de Tensão, Através do Método dos Elementos Finitos. 2000. 249 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – PPGE, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [2] AGRAWAL, G.; BHATTACHARYA, B. Partial safety factor design of rectangular partially prestressed concrete beam in ultimate flexural limit state. *Journal of Structural Engineering*. [s.l.]. v. 37. n. 4. p. 257-267. 2010.
- [3] ARAÚJO, J. M. Curso de Concreto Armado. 4 vols. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.
- [4] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- [5] BARBOSA, P. R. Análise probabilística de pilares de concreto armado através do método dos elementos finitos. 2017. 198 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGE, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [6] ANSYS, Inc. ANSYS Mechanical APDL Element Reference. Release 15.0, 2013
- [7] HINTON, E. Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells. Swansea: Pineridge Press, 1988.
- [8] SHEGG, A.; DECANINI, L. Sobre las deformaciones em elementos de hormigón armado, In: Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural. Porto Alegre, Brasil. Anais, v. 2, p. 1071-1120. 1971.
- [9] NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. Reliability of Structures. McGraw-Hill Companies, Inc., 2000
- [10] HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design. JohnWiley & Sons, New York, 2000.
- [11] SILVA, G. R. Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR-6118:2014. 2017.

- 174 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [12] SANTOS, D. M.; STUCCHI, F.R.; BECK, A.T. Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*. São Paulo. v. 7. n. 5. p. 723-746. 2014.
- [13] GALAMBOS, T. V.; ELLINGWOOD, B.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A. Probability based load criteria: Assessment of current design practice. *Journal of the Structural Division*, v. 108. p. 959-977. 1982.
- [14] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIB Model Code 2010. Lausanne, Bulletin n. 65, 2012.
- [15] MARTINELLI, M. Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos. 2003. 149 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Civil) – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [16] MINASI, A. T. Confiabilidade de vigas de concreto armado em estruturas portuárias no estado limite último de flexão. 2016. 149 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Oceânica) – PPGE, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.
- [17] SZERSZEN, M. M; NOWAK, A. S. Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 2 – Reliability Analysis and Resistance Factors. *ACI Structural Journal*, v. 100. n. 3. p. 383-391. 2003.
- [18] DINIZ, S. M. C; FRANGOPOL, D. M. Reliability Assessment of High-Strength Concrete Columns. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124. n. 5. p. 529-536. 1998.
- [19] SZERSZEN, M. M; SZWED, A; NOWAK, A. S. Reliability Analysis for Eccentrically Loaded Columns. *ACI Structural Journal*, v. 102. n. 5. p. 676-688. 2005.
- [20] FERREIRA, L. M; NOWAK, A. S; EL DEBS, M. K. Desenvolvimento de equações para a limitação do peso de veículos de carga em pontes de concreto através da teoria de confiabilidade. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*. São Paulo. v. 1. n. 4. p. 421-450. 2008.
- [21] MAGALHÃES, F. C; REAL, M. V; SILVA FILHO, L. C. P. The problem of non-compliant concrete and its influence on the reliability of reinforced concrete columns. *Material and Structures*, v. 49. n. 4. p. 1485-1497. 2016.
- [22] ANG, A. H-S.; TANG, W. H. *Probability Concepts In Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [23] BECK, A. T.; ROSA, E. Structural reliability analysis using deterministic finite element programs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 3. n. 3. p. 197-222. 2006.
- [24] LEONEL, E. D.; BECK, A. T.; VENTURINI, W. S. On the performance of response surface and direct coupling approaches in solution of random crack propagation problems. *Structural Safety*, v. 33. n. 4. p. 261-274. 2011.