

Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas

C. MENDES DE JESUS

Recebido em 27 de novembro de 2022 / Aceito em 7 de junho de 2023

RESUMO. Este trabalho apresenta resultados sobre grafos com pesos nos vértices associados às aplicações estáveis entre duas superfícies fechadas, generalizando resultados obtidos para casos particulares de aplicações entre superfícies fechadas.

Palavras-chave: aplicações estáveis, grafos, superfícies fechadas.

1 INTRODUÇÃO

As singularidades de aplicações estáveis entre duas superfícies (pontos em que a matriz jacobiana não tem posto máximo) são do tipo pontos de dobra e pontos de cúspides isolados [5, 18]. O tipo topológico do conjunto regular e a disposição das curvas do conjunto singular sobre a superfície, são importantes informações topológicas do domínio de uma aplicação. Em [17], Quine mostrou a relação entre a característica de Euler das superfícies, o número de cúspides e o grau da aplicação de uma aplicação entre duas superfícies fechadas e orientadas. Uma nova demonstração do Teorema de Quine, baseado em Teoria de Singularidade e Topologia, pode ser vista em [11]. Vários pesquisadores, como [2, 4, 15, 16, 17, 19], tem interessado pelas aplicações entre superfícies, em geral focando na imagem da aplicação. Em [1, 3, 7, 8, 9], foram estudados aplicações entre duas superfícies orientadas, em geral codificando as informações topológicas do domínio da aplicação em um grafo com pesos nos vértices. Em [3, 12, 13], foi estendido o estudo destes grafos para aplicações de superfícies não orientadas na esfera e no plano projetivo. Em [10, 14] foi aplicado esta técnica de grafo no estudo das aplicações de Gauss de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espaco, mostrando que é possível obter aplicações em que as regiões elípticas e ou hiperbólicas podem ter gênero $g > 0$. Em todos os casos, as principais técnicas aplicadas para provar os resultados são as transições de codimensão 1, introduzidas em [15], e as cirurgias de aplicações estáveis, introduzidas [7, 12].

O objetivo principal, neste artigo, é generalizar os resultados obtidos para grafos de aplicações entre duas superfícies fechadas e orientadas para o caso geral de aplicações entre superfícies

fechadas. O principal resultado é o Teorema 4.4, que garante a realização de qualquer grafo, com pesos inteiros positivos nos vértices, por alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas.

2 APLICAÇÕES ESTÁVEIS ENTRE SUPERFÍCIES E GRAFOS

Sejam M e N duas superfícies e $C^\infty(M, N)$ o espaço de todas aplicações suaves da superfície M em N (com a C^∞ -topologia de Whitney [5]). Uma região sobre a superfície fechada N será dita simplesmente conexa, e será denotada por \mathcal{D}_N , se é homeomorfa a um disco.

2.1 Aplicações estáveis entre superfícies

Definição 2.1. O conjunto das curvas singulares de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ será denotado por Σf e o conjunto $f(\Sigma f)$, imagem do conjunto singular, chamada de contorno aparente ou conjunto de ramificação e será denotado por B_f .

Definição 2.2. Duas aplicações $f, g \in C^\infty(M, N)$ são \mathcal{A} -equivalentes quando existem difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ e $\psi : N \rightarrow N$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é dita estável, se qualquer aplicação suficientemente próxima de f é \mathcal{A} -equivalente a f .

As singularidades de uma aplicação estável entre duas superfícies, segundo Whitney [18], são do tipo pontos de dobra ou cúspides. Cada ponto $p \in M$ tem coordenadas locais do tipo: regular ($p = (x, y) \mapsto (x, y)$); ponto de dobra ($(x, y) \mapsto (x^2, y)$) ou ponto de cúspide ($(x, y) \mapsto (xy - x^3, y)$). Os pontos singulares formam curvas disjuntas sobre M .

Definição 2.3. Duas aplicações suaves $f, h : M \rightarrow N$ são homotópicas em $C^\infty(M, N)$ se existe uma aplicação $H : M \times I \rightarrow N$ contínua, tal que $H(x, 0) = h(x)$ e $H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in M$.

Definição 2.4. Duas aplicações $f, h : M \rightarrow N$ são ditas estavelmente isotópicas se existe a aplicação suave $H : M \times I \rightarrow N$ é tal que para cada $t \in I$ a aplicação $H_t = H|_{M \times t}$ é estável, com $H_0 = f$ e $H_1 = h$.

Observação 1. Se f e h são duas aplicações estavelmente isotópicas, então elas estão na mesma componente do conjunto das aplicações estáveis. Logo os conjuntos singulares Σf e Σh são difeomorfos em M e os contornos aparentes B_f e B_h são difeomorfos em N .

Definição 2.5. Seja f uma aplicação entre duas superfícies fechadas M e N .

- (a) B_f será dito contorno aparente planar se existe alguma aplicação estável $h : M \rightarrow N$, tal que $B_h \subset \mathcal{D}_N$ e as aplicações f e h são estavelmente isotópica.

(b) f será dita aplicação planar se é homotópica a alguma aplicação $h : M \rightarrow N$, tal que $h(M) \subset D_N$.

Notação: As superfícies (dimensão 2) serão denotadas da seguinte forma: o plano por \mathbb{R}^2 ; a esfera por \mathbb{S}^2 ; o toro por \mathbb{T}^2 ; a soma conexas de t toros por $t\mathbb{T}^2$, o plano projetivo real (quociente do disco) por $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ ou \mathbb{P}^2 ; a garrafa de Klein por \mathbb{K}^2 (soma conexas de dois planos projetivos) e a soma conexas de p planos projetivos por $p\mathbb{P}^2$ (ou soma conexas do $r\mathbb{T}^2$ e $q\mathbb{P}^2$, com $p = 2r + q$ e $q > 0$).

O conjunto regular de uma aplicação entre duas superfícies fechadas tem um número finito de regiões conexas, que podem ser orientadas ou não, que são imersas em N por f . As curvas do conjunto singular Σf são sempre fechadas e estão nos bordos das componentes regulares, podendo ter:

1. uma vizinhança homotópica a uma faixa de Möbius, quando α está em um único bordo de uma componente regular. Veja a única curva singular de $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ em (a) na Figura 1.
2. uma vizinhança homotópica ao cilindro, quando α está no bordo de duas componentes regulares ou ainda em dois bordos de uma mesma componente. Veja as duas curvas singulares de $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow N$ em (b) na Figura 1.

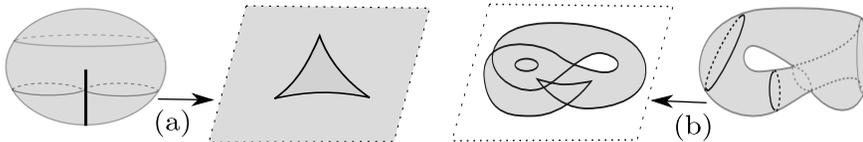


Figura 1: Exemplo de aplicações do plano projetivo e da garrafa de Klein.

2.2 Grafos e aplicações entre superfícies

Em [8,9] foram associados grafos com pesos nos vértices às aplicações estáveis, entre superfícies fechadas e orientadas, onde as arestas correspondem as curvas singulares, os vértices as regiões regulares e o peso no vértice v corresponde o gênero da região regular, que é orientada, correspondente a v . Todas as curvas, neste caso, tem como vizinhança uma região tipo cilindro. O grafo associado a estas aplicações estáveis é um invariante global que classifica por completo a topologia do conjunto singular (ver Figura 3), como foi mostrado em [7].

No caso de aplicações entre duas superfícies fechadas, como foi visto antes, pode ocorrer de ter regiões regulares não orientadas e curvas singulares que não tenha uma vizinhança tipo cilindro, como visto em [12], no estudo de aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo. Para este caso foi redefinido os pesos no grafo, suficiente para o estudo aqui, da seguinte forma:

- cada região regular de $M \setminus \Sigma f$ corresponde a um vértice v do grafo;

- cada curva α de Σf corresponde a uma *aresta* a do grafo;
- uma aresta a conecta o vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular associada a v ;
- um vértice v recebe o *peso* $(t, 0)$ se a região regular correspondente a v é orientada e tem *gênero* t (soma de t toros) e v recebe o *peso* $(0, p)$ se a região regular correspondente a v é não orientada e tem *gênero* p (soma de p projetivos).
- uma aresta a no grafo, será dita \star -laço quando a vizinhança da curva α correspondente a a é uma faixa de Möbius. Neste caso, a aresta a recebe uma \star , como ilustra a Figura 2.

Os grafos associados às aplicações ilustradas na Figura 1 são do tipo: (a) $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(1, 1)$ (tem um \star -laço) e (b) $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2, 2)$ (tem um laço). A Figura 2 ilustra duas aplicações planares do plano projetivo que têm uma curva singular tendo como uma vizinhança a faixa de Möbius: em (a) o grafo é do tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(1, 1)$ e em (b) é do tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2, 2)$.

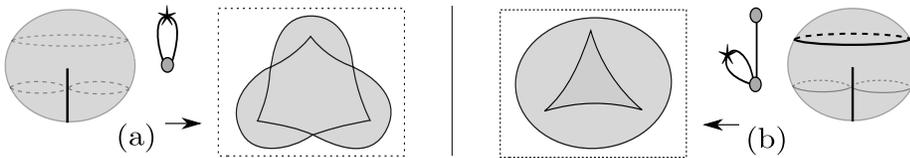


Figura 2: Exemplos de aplicações do plano projetivo e seus grafos.

Definição 2.6. O grafo associado a uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ é chamado de *grafo dual* de f e denotado por $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$, onde $V, E, T + P$ e S denotam, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas, o peso total e o número de \star -laços do grafo associado a f .

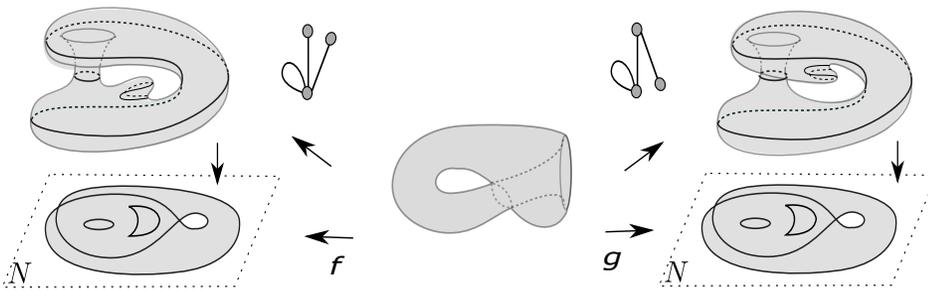


Figura 3: Exemplos de aplicações planares da garrafa de Klein.

O grafo associado a uma aplicação entre duas superfícies não dá as informações do número de cúspides e pontos duplos de uma aplicação, mas contribui muito com a classificação do conjunto singular. Por exemplo, na Figura 3, as duas aplicações da garrafa de Klein têm os contornos aparentes equivalentes, mas os grafos, tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(3, 3)$, não são isomorfos. Isso mostra que o grafo com pesos nos vértices é um *invariante topológico global* das aplicações entre superfícies.

Em [7, 12] foi visto que a característica de Euler da superfície M pode ser dada em função do grafo da aplicação. Este resultado também vale para aplicações entre duas superfícies fechadas em geral.

Proposição 2.1. [12] *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável e $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V,E)$ o seu grafo dual. Então a característica de Euler de M é dado por*

- $\chi(M) = 2(V - E - T)$ e o gênero é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$, quando M é orientada. Nesse caso, $P = S = 0$.
- $\chi(M) = 2(V - E - T) + P - S$ e o gênero é dado por $g(M) = 2(1 - V + E + T) + P - S$, quando M é não orientada.

3 CIRURGIAS DE GRAFOS E APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Em [7] foi introduzido as cirurgias horizontais e verticais de aplicações entre superfícies suaves. Estas cirurgias permitem obter novas aplicações sobre uma superfície com gênero g a partir de outras já conhecidas, definidas sobre superfícies com gênero menor g . Outra forma de obter aplicações estáveis entre duas superfícies, a partir de uma aplicação já conhecida, é por meio de pequenas “perturbações controladas” na aplicação dada. Estas perturbações são chamadas de transições de codimensão 1, introduzido por Ohmoto-Aicardi em [15].

3.1 Transições que alteram o conjunto singular

Considere uma homotopia $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ entre duas aplicações estáveis $f, g : M \rightarrow N$ em diferentes componentes de $\mathcal{E}(M, N) \subset \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Ao longo deste caminho, para algum $t \in [0, 1]$ a aplicação $H_t(p) = H(p, t)$ é não estável (de codimensão maior ou igual a 1) e pertence ao conjunto discriminante \mathcal{D} , complementar do conjunto $\mathcal{E}(M, N)$ em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Se H_t passou por uma transição de codimensão 1, ao longo do caminho entre f e g , então dito que g pode ser obtida de f por transições de codimensão 1.

As transições de condimenção 1 podem alterar o número de pontos duplos, o número de cúspides e o número de componentes singulares. O que interessa para o estudo dos grafos é a topologia dos conjuntos singulares e regulares. Somente as transições Lips e Beaks que altera a topologia dos conjuntos regulares e singulares, localmente da seguinte forma (ver Fig. 4):

1. Transição *Lips* L (ou *Lábios*) na Figura 4 (a), ocorre dentro de uma região regular U , nasce uma nova curva singular com duas novas cúspides.
2. Transição *Beaks* B (ou *Bicos*) na Figura 4(b), no sentido que aumenta o número de cúspides, pode unir duas curvas singulares ou decompor uma curva em duas, podendo ainda alterar o número de componentes regulares ou o gênero de uma região regular.

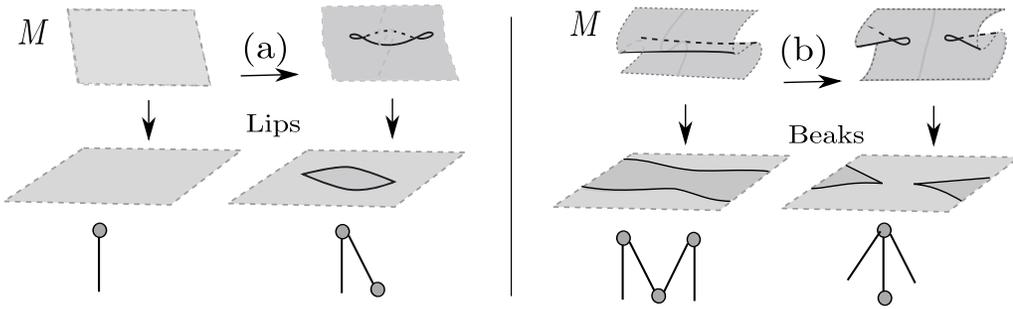


Figura 4: Exemplo local das transições Lips e Beaks.

A transição beaks sempre altera o número componente singular e consequentemente o número de arestas no grafo. Esta transição também pode alterar ou não o número de vértices, mantendo constante $1 - V + E + T + 2(1 - V + E + T) + P - S$ (o gênero da superfície M).

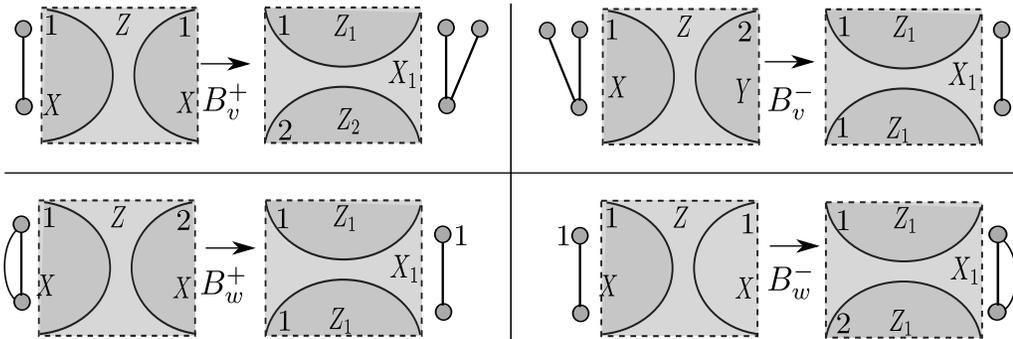


Figura 5: Decomposição das transições beaks.

A Figure 5 ilustra uma decomposição da transição beaks nos casos em que altera o número de vértices ou o peso. As regiões onde ocorrem as transições são denotadas por X, X_1, Y, Z, Z_1 e Z_2 , os números 1 e 2 indicam se os arcos que separam as regiões pertencem a uma ou duas curvas singulares. No sentido que aumenta o número de cúspides a transição beaks:

B_v^+ : acrescenta 1 em E e em V (aumenta uma curva singular e uma região regular);

B_v^- : diminui 1 em E e em V (diminui uma curva singular e uma região regular);

B_w^+ : aumenta 1 em W e diminui 1 em E (aumenta o gênero de uma região regular e diminui uma curva singular);

B_w^- : diminui 1 em W e aumenta 1 em E (diminui o gênero de uma região regular e aumenta uma curva singular).

A Figura 6 ilustra dois exemplos de transições beaks: em (a) $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tem duas curvas singulares e três regiões regulares; a aplicação em (b) pode ser obtida de (a) por uma transição B_v^- , que une duas curvas singulares e duas regiões regulares. Em (c), a aplicação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow N$ tem duas

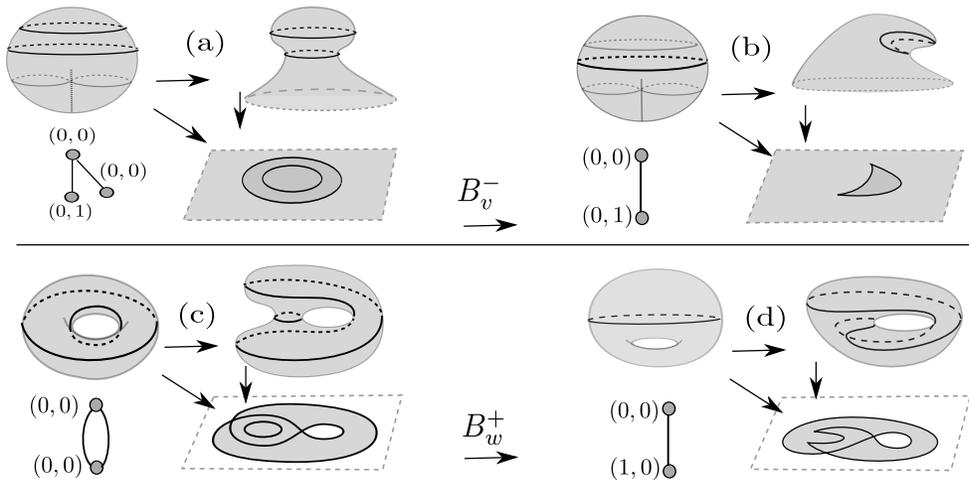


Figura 6: Exemplos de transições Beaks.

curvas singulares e duas regiões regulares; a aplicação em (d) pode ser obtida de (c) por uma transição B_w^+ , que une duas curvas singulares e aumenta o gênero de uma região regular.

3.2 Cirurgias de aplicações entre superfícies

Aplicações que estão na mesma classe de homotopia podem ser obtidas uma da outra por transições de codimensão 1. Para obter aplicações em diferentes classes de homotopia a partir de aplicações já conhecidas será por meio de cirurgias de aplicações estáveis, como definida em [7, 12].

Em resumo, sobre a superfície fechada $M = M_1 \cup M_2$, escolhe dois pontos P e Q nas respectivas superfícies M_1 e M_2 e tome dois discos D_p e D_q vizinhanças do respectivos pontos P e Q nas respectivas superfícies M_1 e M_2 .

Sejam M'_1 e M'_2 os fechos das respectivas superfícies $M_1 \setminus D_p$ e $M_2 \setminus D_q$. Denota por γ_p e γ_q os respectivos bordos de M'_1 e M'_2 . Uma cirurgia em M identifica cada bordo γ_p e γ_q com um dos bordos de \mathcal{T} , um “tubo-ponte” (superfície homeomorfa ao cilindro) que conecta M_1 e M_2 , obtendo assim a nova superfície fechada Z . Note que se M é conexa então $M_1 = M_2 = M$. Neste caso, para garantir superfícies disjuntas, considere M'_1 e M'_2 como as vizinhanças dos respectivos discos D_1 e de D_2 . Neste caso, a cirurgia acrescenta uma nova alça em M . A cirurgia de aplicações entre superfícies pode é separada em dois casos, como ilustra a Figura 7:

- a) **Cirurgia Horizontal entre f e g :** Neste caso, os pontos $P \in M_1$ e $Q \in M_2$ são pontos singulares, cujas imagens $f(P) \in f(\Sigma f)$ e $g(Q) \in f(\Sigma g)$ pode ser conectadas por um caminho η sobre N que não intersepta qualquer outro ponto de $f(\Sigma f) \cup g(\Sigma g)$.

- i) Denota por θ_P e θ_Q os arcos do conjunto singular que contém os respectivos pontos P e Q . Denota por $\beta_P = f(\theta_P)$ e $\beta_Q = g(\theta_Q)$, os arcos sobre N . Os arcos β_P e β_Q do contorno aparente $f(\Sigma f)$ e $g(\Sigma g)$ podem ser conectados sobre N , pelo mergulho de um “retângulo” β em $N \setminus f(\Sigma f) \cup g(\Sigma g)$, vizinhança de η , de forma que um lado de β , l_P identifica com β_P e o seu lado oposto l_Q identifica com β_Q , respeitando as orientações do contorno aparente.
- ii) Denota por k_1 e k_2 os lados opostos em β , complementar de $l_P \cup l_Q$. Sobre M , estenda suavemente as aplicações f e g sobre a ponte-tubo \mathcal{T} , obtendo uma nova aplicação $f \oplus_{\beta} g$, de forma que os dois arcos de curvas singulares k'_1 e k'_2 em \mathcal{T} satisfaz $f \oplus_{\beta} g(k'_1) = k_1$ e $f \oplus_{\beta} g(k'_2) = k_2$, onde K_1 e K_2 são os lados opostos em β , complementar de $l_P \cup l_Q$.

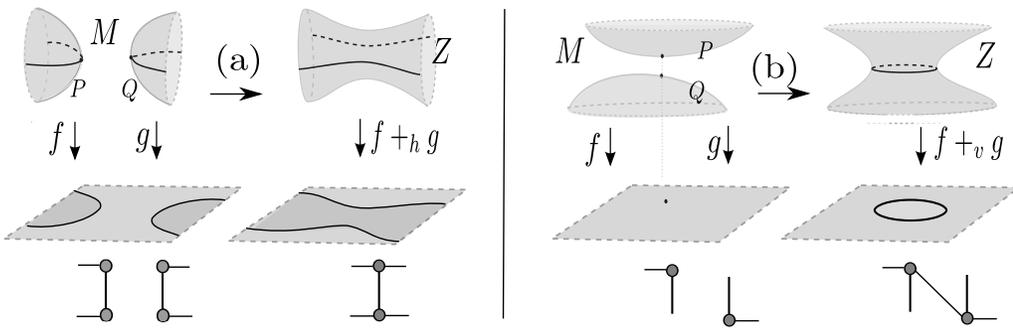


Figura 7: Cirurgias de aplicações estáveis: (a) horizontal e (b) vertical.

- b) **Cirurgia Vertical entre f e g :** Neste caso, $P \in M_1$ e $Q \in M_2$ são pontos regulares tais que exista uma vizinhança D de $f(P) = g(Q) = Y$ que não intercepta o conjunto $f(\Sigma f) \cup g(\Sigma g)$. Depois de conectar a ponte-tubo \mathcal{T} , obtendo a superfície Z , estenda suavemente as aplicações f e g sobre o tubo \mathcal{T} , obtendo uma nova aplicação $f \oplus_{\beta} g : Z \rightarrow N$, de forma que a imagem, por $f \oplus_{\beta} g$, da nova curva singular sobre \mathcal{T} esteja contida em D .

A superfície Z , resultante das cirurgias, será orientada se na cirurgia horizontal \mathcal{T} conecta pares de regiões com mesmo sinal e na cirurgia vertical quando \mathcal{T} conecta regiões com sinais opostos.

Observação 2. O gênero da superfície Z , obtida pela cirurgia, é dado por

1. $g(Z) = g(M) + 1$, se M é conexa e orientada;
2. $g(Z) = g(M) = g(M_1) + g(M_2)$, se M é orientada e $M_1 \cup M_2$ é união disjunta;
3. $g(Z) = g(M) + 2$, se M é conexa e não orientada;
4. $g(Z) = g(M) = g(M_1) + g(M_2)$, se $M_1 \cup M_2$ é união disjunta e as superfícies M_1 e M_2 são não orientadas;

5. $g(Z) = g(M) = 2g(M_1) + g(M_2)$, se $M_1 \cup M_2$ é união disjunta e M_1 é orientada e M_2 é não orientada.

Definição 3.7. Se M_1 e M_2 são superfícies conexas disjuntas, então a cirurgia horizontal e cirurgia vertical entre duas aplicações f e g serão chamadas, respectivamente, de **soma conexa horizontal** e **soma conexa vertical** das aplicações estáveis f e g .

Note que a cirurgia vertical sempre adiciona uma nova componente no conjunto singular, enquanto que no caso da cirurgia horizontal, o número de componentes no conjunto singular pode aumentar uma ou diminuir, dependendo se P e Q pertencem ou não a uma mesma componente conexa do conjunto singular.

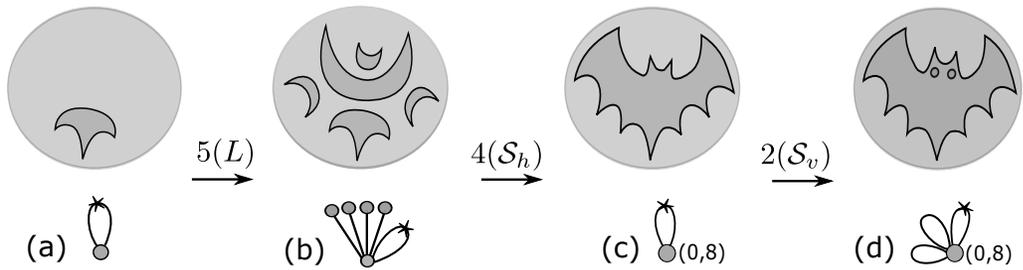


Figura 8: Exemplos de transições e cirurgias horizontais e verticais.

A Figura 8 ilustra uma sequência de aplicações sobre a esfera, que podem ser obtidas por cirurgias horizontais e verticais: (a) a aplicação do plano projetivo com uma curva singular e três pontos de cúspides tem grafo $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(1, 1)$; (b) a aplicação pode ser obtida de (a) por quatro transições lips e tem grafo $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(6, 5)$; (c) a aplicação pode ser obtida de (b) por quatro cirurgias horizontais e tem grafo $\mathcal{G}_{(0,8)}^1(1, 1)$; (d) a aplicação pode ser obtida de (c) por duas cirurgias verticais e tem grafo $\mathcal{G}_{(0,8)}^1(2, 3)$. Esta mesma sequência de transições e cirurgias também podem ser aplicadas em outras superfícies N , com gênero $g > 0$ (orientada ou não orientada). Por exemplo, para N como a garrafa de Klein e com o mesmo contorno aparente, teria a sequência de grafos: em (a) $\mathcal{G}_{(0,2)}^1(1, 1)$; em (b) $\mathcal{G}_{(0,2)}^1(1, 1)$; em (c) $\mathcal{G}_{(0,10)}^1(1, 1)$ e em (d) $\mathcal{G}_{(0,10)}^1(1, 1)$.

A cirurgia vertical não altera nem o número total de vértices nem os pesos nos grafos, somente acrescenta uma nova aresta. A cirurgia horizontal sempre alterar o número de vértices e de arestas no grafo. A cirurgia horizontal entre duas diferentes aplicações sempre une duas curvas singulares. As duas curvas podem corresponder a duas arestas que conectam dois vértices cada uma, ou uma aresta pode conectar dois vértices e a outra forma um laço (ou \star -laço), ou as duas arestas podem formar dois laços (ou dois \star -laços). A cirurgia horizontal pode unir duas ou três regiões regulares, unindo dois ou três vértices no grafo, induzindo a uma regra de pesos nos vértices (ver [12]) como pode ver a seguir.

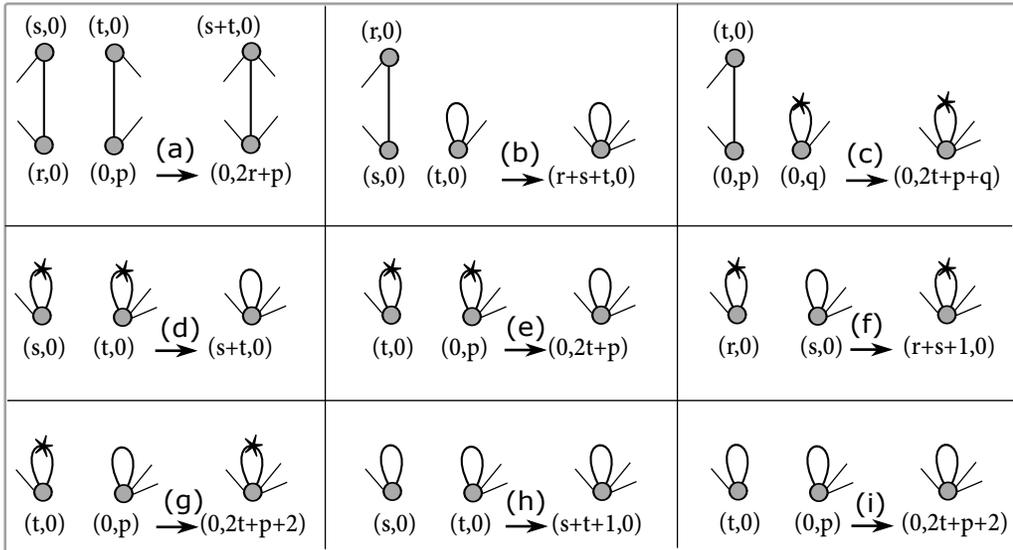


Figura 9: Soma local de grafos com pesos

Regra de pesos nas cirurgias horizontais de grafos: a soma dos pesos nos vértices se dá da seguinte forma, como ilustrado na Figura 9, a cirurgia identifica:

- i) em (a), duas arestas (que conectam dois vértices cada uma), resultando em uma aresta (que conecta dois vértices). Neste caso, $(s,0) + (t,0) = (s+t,0)$, quando une duas regiões regulares orientadas; $(0,p) + (0,q) = (0,p+q)$, quando une duas regiões não orientadas; $(t,0) + (0,p) = (0,2t+p)$, quando une uma região orientada com outra não orientada.
- ii) em (b) e (c), uma aresta (que conecta dois vértices) e um laço (ou \star -laço) resultando em um laço (ou \star -laço). Neste caso, $(s,0) + (t,0) + (r,0) = (s+t+r,0)$, quando une três regiões orientadas; $(0,p) + (0,q) + (r,0) = (0,2r+p+q)$, quando une uma região orientada e duas regiões não orientadas.
- iii) em (d) e (e), dois \star -laços resultando em um laço. Neste caso, os pesos seguem $(s,0) + (t,0) = (s+t,0)$, quando une duas regiões orientadas; $(0,p) + (0,q) = (0,p+q)$, quando une duas regiões não orientadas; $(t,0) + (0,p) = (0,2t+p)$, quando une uma região orientada com outra não orientada.
- iv) em (f), (g), (h) e (i), um laço e um \star -laço (dois laços) resultando em um \star -laço (um laço). Neste caso, os pesos seguem $(s,0) + (t,0) = (s+t+1,0)$, quando une duas regiões orientadas; $(0,p) + (0,q) = (0,p+q+2)$, quando une duas regiões não orientadas; $(t,0) + (0,p) = (0,2(t+1)+p)$, quando une uma região orientada com outra não orientada.

As cirurgias sobre às aplicações entre superfícies induz naturalmente as duas cirurgias (horizontal e vertical) nos grafos.

Definição 3.8. *Uma cirurgia horizontal entre dois grafos conexos é a identificação de uma aresta de um grafo com uma aresta do outro grafo, dando origem a um novo grafo conexo. A soma de pesos nos vértices ocorrem respeitando as regras acima.*

Uma cirurgia vertical ente dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} consiste em adicionar uma aresta que conecta um ou dois vértices, sem alterar seus pesos, da seguinte forma:

- i) *A aresta une dois vertices em um mesmo grafo.*
- ii) *A aresta une dois vertices conectando dois grafos.*
- iii) *A aresta cria um laço em um vértice do grafo.*

Se os grafos $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V,E)$ e $\mathcal{H}_{(T,P)}^S(V,E)$ podem ser realizados pelas respectivas cirurgias $f : M_1 \rightarrow N$ $g : M_2 \rightarrow N$, então a soma conexa dos grafos $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ também pode ser realizado pela aplicação soma conexa $f + g : Z \rightarrow N$, onde Z é a superfície soma conexa das superfícies M_1 e M_2 .

Proposição 3.2. *Todo grafo que pode ser obtido pela soma conexa (horizontal ou vertical) de dois grafos realizável é também um grafo realizável.*

4 REALIZAÇÃO DE GRAFOS COM PESOS NOS VÉRTICES

Um grafo \mathcal{G} será dito *realizável* se \mathcal{G} pode ser associado a alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas M e N . A realização de grafo está dividido em aplicações estáveis (ver Figura 10):

- (a) entre duas superfícies fechadas e orientadas. Resumo na Subseção 4.1, baseado em [8, 9];
- (b) de superfícies fechadas e orientadas em superfícies fechadas, Subseção 4.2;
- (c) de superfícies fechadas em superfícies fechadas e orientadadas, Subseção 4.3;
- (d) entre duas superfícies fechadas, Subseção 4.4. O caso de aplicações no plano projetivo foi estudado em [13].

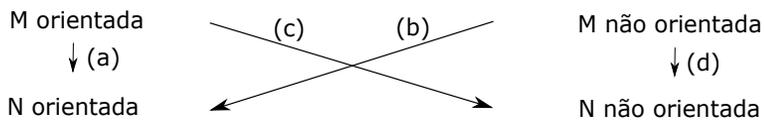


Figura 10: Aplicações entre superfícies.

As aplicações planares podem acontecer sobre qualquer superfície N . No caso de $N = \mathbb{S}^2$, toda aplicação de grau zero é uma aplicação planar. Para N com gênero maior que zero, tem o seguinte resultado.

Proposição 4.3. *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V,E)$ que pode ser realizado por alguma aplicação estável $h : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ também pode ser realizado por uma aplicação planar $f : M \rightarrow N$.*

Proof. Seja $h : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação que realiza o grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V,E)$. Uma aplicação planar, como na Definição 2.5, que realiza o grafo dado, pode ser obtida como $f = j \circ h : M \rightarrow N$, onde $j : h(M) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ é um mergulho. \square

A Figura 11 ilustra aplicações sobre \mathbb{K}^2 com contornos aparentes planares: em (a), a aplicação do \mathbb{T}^2 é planar, tem duas curvas singulares e grafo tipo $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(3,2)$; em (b), a aplicação do $4\mathbb{P}^2$ tem única curva singular que separa o toro com um buraco (toro menos um disco) da garrafa de Klein com um buraco. O grafo associado é $\mathcal{G}_{(1,2)}^0(2,1)$.

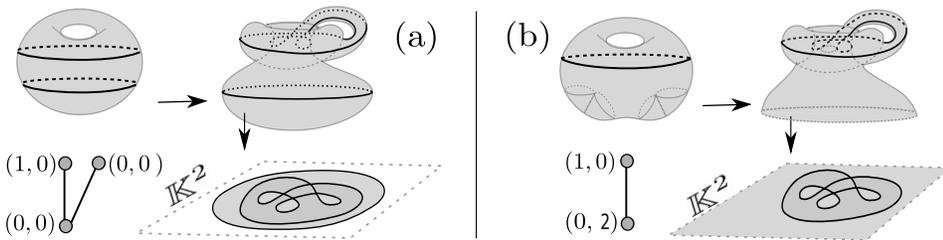


Figura 11: Exemplo de grafos de aplicações na garrafa de Klein.

4.1 Aplicações entre duas superfícies fechadas e orientadas

Em [7] foi estudado grafos associado às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano. Os resultados foram estendido para o caso de aplicações na esfera em [8] e generalizado para aplicações entre superfícies fechadas e orientadas em [9]. O Teorema 4.1 apresenta um resumo dos principais resultado.

Teorema 4.1. *Se $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V,E)$ é um grafo bipartido, então \mathcal{G} pode ser realizado por alguma aplicação estável:*

1. $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ com grau $d \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $T = 0$ e $V = E + 1$ [8].
2. $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $m = 1 - V + E + T$ [7].
3. $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ com grau $d \in \mathbb{Z}$ e $m = 1 - V + E + T$ [8].
4. $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$ tem grau máximo $d = \frac{m-1}{n-1}$ e $m = 1 - V + E + T$ [9].

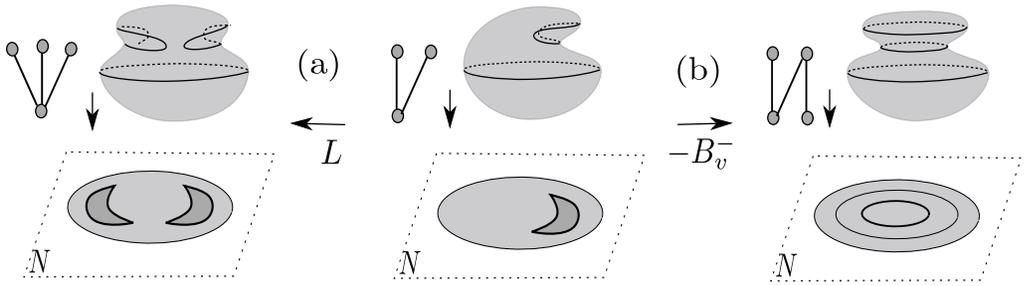


Figura 12: Exemplo de transições beaks e lips.

As provas das afirmações do Teorema 4.1 foram baseadas em construções de aplicações que realizam o grafo dado. Exemplos de aplicações entre superfície fechadas e orientadas sem pontos singulares:

- i) A identidade $id : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tem grau 1 e grafo $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(1,0)$. Se $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tem grau diferente de 1, então f tem pelo menos uma curva singular (ver [2]). A projeção (trivial) da esfera $f_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow N$, com única curva singular, realiza o grafo $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2,1)$. A aplicação $f_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, obtida de f_1 pela transição lips (ver Fiugra 12) realiza o grafo $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(3,2)$.

As duas árvores tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(4,3)$ podem ser realizadas por uma transição lips sobre f_2 (ver Fiugra 12) ou por uma cirurgia horizontal entre duas aplicações tipo f_2 . Por indução pode verificar que qualquer árvore $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, V - 1)$ pode ser realizada por alguma aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow N$.

- ii) A identidade $id : n\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$ tem grau 1 e grafo $\mathcal{G}_{(n,0)}^0(1,0)$. Para $n = 1$, a aplicação pode ter grau $d \in \mathbb{N}$ sem pontos singulares, pois o toro admite recobrimentos do toro com d folhas.

Se $m = d(n - 1) + 1$ ($d > 0$), então a aplicação $\phi : m\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$ pode tem grau d e sem pontos singulares, com grafo $\mathcal{G}_{(m,0)}^0(1,0)$, pois $\chi(M) = d\chi(N)$ para recobrimento d folhas (ver [9]).

- iii) Árvore do tipo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, V - 1)$ pode ser realizada por cirurgias horizontais entre a aplicação f que realiza a árvore de peso zero e aplicações $g_t : t\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ com conjunto singular conexo que realiza o grafo $\mathcal{G}_{(t,0)}^0(2,1)$ (ver Figura 13(a) onde $t = 2r + s$, para $r, s \geq 0$).

Para realizar os grafos com aplicações não planares e grau zero, primeiro pode realizar o grafo com peso zero por f e depois soma f com aplicações com conjunto singular conexo, como na Figura 13, que ilustra as aplicações: em (a) a aplicação planar do $(2r + s)$ -toro tem $2s$ cúspides e $2r$ pontos duplos e grafo tipo $\mathcal{G}_{(2r+s,0)}^0(2,1)$; em (b) o contorno aparente planar do $(6n)$ -toro tem 4 pontos duplos e grafo tipo $\mathcal{G}_{(6n,0)}^0(2,1)$; em (c) o contorno aparente não planar do $(6n)$ -toro tem 6 pontos duplos e grafo $\mathcal{G}_{(4n+6,0)}^0(2,1)$.

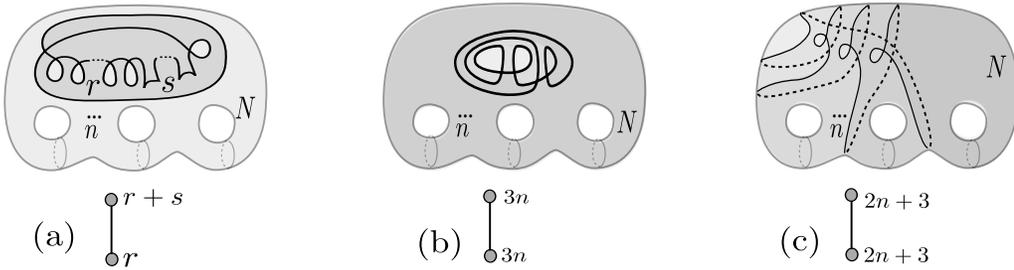


Figura 13: Exemplos de contornos aparentes no n -toro.

4.2 Aplicações de superfícies orientadas em não orientadas

Um grafo associado a uma aplicação de uma superfície orientada em uma superfície não orientada pode ter apenas um vértice, como no caso dos recobrimento de duas folhas de uma superfície não orientada por uma superfície fechada e orientada, coo a superfície S^2 que é um recobrimento de duas folhas para \mathbb{P}^2 , com a aplicação antípoda $\phi(x) = -x$. Seu grafo é do tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(1,0)$. Outro exemplo é o toro \mathbb{T}^2 que recobre a garrafa de Klein, neste caso o grafo é $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(1,0)$. O próximo resultado, detalha o recobrimento de duas folhas para superfícies não orientadas (ver [6]).

Lema 4.1. *Se $p = t + 1$, então o grafo $\mathcal{G}_{(t,0)}^0(1,0)$ pode ser associado ao recobrimento de duas folhas de $t\mathbb{T}^2$ sobre $p\mathbb{P}^2$.*

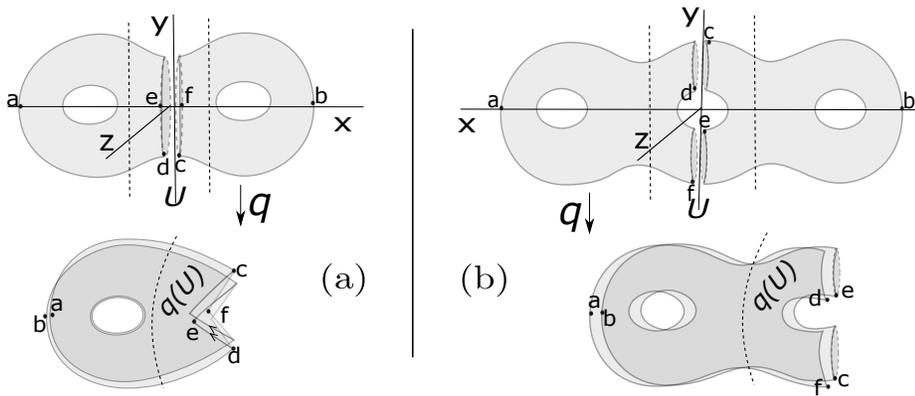


Figura 14: (a) $2\mathbb{T}^2$ recobre duas vezes $3\mathbb{P}^2$ e (b) $3\mathbb{T}^2$ recobre duas vezes $4\mathbb{P}^2$.

Proof. Seja M a imersão da superfície de $t\mathbb{T}^2$ no 3-espaco, com coordenadas X, Y e Z e simétrica em relação aos planos XY e YZ , como ilustra a Figura 14. Tome o eixo de coordenadas com a origem no centro, com o o plano YZ dividindo M em duas componentes M_1 e M_2 , de forma que:

- i) se t é par, o gênero de M_1 e M_2 é $\frac{t}{2}$, a interseção de M com o plano coordenado YZ , $M \cap YZ$, tenha uma curva fechada e $M \cap XY$ tenha $t + 1$ curvas fechadas, todas centrados no eixo

X . Se U é uma vizinhança de $M \cap YZ$, então U é homeomorfa a um cilindro. A aplicação antípoda $\phi(x) = -x$, sobre M fornece um recobrimento de duas folhas para a superfície não orientada $N = p\mathbb{P}^2$, com $p = 2(\frac{t}{2}) + 1 = t + 1$, levando M_1 sobre M_2 e $\phi(U)$ é uma faixa de Möebius.

- ii) se t é ímpar, o gênero de M_1 e M_2 é $\frac{t-1}{2}$, a interseção $M \cap YZ$, tenha duas curvas fechadas e $M \cap XY$ tenha $t + 1$ curvas fechadas, todas centradas no eixo X . Se U é uma vizinhança de $M \cap YZ$, então U é homeomorfa a ao toro menos dois discos. A aplicação antípoda $\phi(x) = -x$, sobre M fornece um recobrimento de duas folhas para superfície não orientada $N = p\mathbb{P}^2$, com $p = 2(\frac{t}{2}) + 1 = t + 1$, levando M_1 sobre M_2 e $\phi(U)$ é uma garrafa de Klein “menos um disco” (com dois buracos).

Nos dois casos, $t\mathbb{T}^2$ é um recobrimento de duas folhas para $p\mathbb{P}^2$, quando $p = t + 1$. □

Lema 4.2. *Se $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ é um grafo bipartido associado a uma aplicação não planar $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$ com grau zero e $y \in N$ é tal que $f^{-1}(y) = \emptyset$ ($y \notin f(M)$), então existe uma aplicação não planar $g : m\mathbb{T}^2 \rightarrow p\mathbb{P}^2$ associada a $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$, onde $p > 2n$.*

Proof. Seja $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$ uma aplicação não planar de grau zero e $y \in n\mathbb{T}^2$ é tal que $f^{-1}(y) = \emptyset$. Seja B_y um “disco”vizinhança de y tal que $B_y \cap f(m\mathbb{T}^2) = \emptyset$. Pode trocar o disco B_y por uma superfície não orientada gênero k e uma componente de bordo, identificando os bordos de $n\mathbb{T}^2 \setminus B_y$ e N_k , obtendo a superfície não orientada $(2n + k)\mathbb{P}^2$. Considere a aplicação não planar $g : m\mathbb{T}^2 \rightarrow (2n + k)\mathbb{P}^2$, tal que $g(m\mathbb{T}^2) = j(f(m\mathbb{T}^2))$, onde $j : f(m\mathbb{T}^2) \rightarrow (2n + k)\mathbb{P}^2$ é um mergulho, com $\Sigma f = \Sigma g$. Assim obtém uma aplicação não planar sobre uma superfície não orientada que realiza o grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$. □

Teorema 4.2. *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ pode ser associado a alguma aplicação estável $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow p\mathbb{P}^2$.*

Proof. Segue da Proposição 4.3, que toda grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ pode ser associado a alguma aplicação $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $m = 1 - V + E + T$ [7]. Logo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ também pode ser associado a alguma aplicação planar $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow p\mathbb{P}^2$. Pelo Lema 4.2, qualquer grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ pode ser associado a uma aplicação estável não planar $f : m\mathbb{T}^2 \rightarrow p\mathbb{P}^2$, com $m = 1 - V + E + T$, sem precisar cobrir $p\mathbb{P}^2$. Agora falta mostrar que o grafo também pode ser realizado por aplicações que cobrem $p\mathbb{P}^2$. Se $p = t + 1$, o grafo tipo $\mathcal{G}_{(t,0)}^0(1, 0)$ pode ser realizado, pelo Lema 4.1, por uma aplicação recobrimento de duas folhas $q : t\mathbb{T}^2 \rightarrow (t + 1)\mathbb{P}^2$ (ver Figura 14). No caso geral, para $N = (2k + 1)\mathbb{P}^2$, se todos os vértices do grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ tem peso menor que menor que $2k$ então a aplicação não terá região regular que recobre N . Suponha que o grafo tem pelo menos um vértice v com peso $w \geq 2k$, então retira $2k$ do peso w e realize o grafo auxiliar $\mathcal{G}_{(t-2k,0)}^0(V, E)$ por uma aplicação $h : t - 2k\mathbb{T}^2 \rightarrow (2k + 1)\mathbb{P}^2$ como em um dos casos anteriores. Seja $q_1 : 2k\mathbb{T}^2 \rightarrow (2k + 1)\mathbb{P}^2$ a aplicação obtida do recobrimento de duas folhas $q : 2k\mathbb{T}^2 \rightarrow (2k + 1)\mathbb{P}^2$ pela transição lips (que cria uma curva singular com dois pontos de

cúspides), associada ao grafo $\mathcal{G}_{(2k,0)}^0(2, 1)$. Fazendo uma cirurgia horizontal entre h e q_1 , de forma que o peso $2k$ é somado ao peso $w - 2k$, obtem-se uma aplicação $f = h + q_1 : m\mathbb{T}^2 \rightarrow (2k + 1)\mathbb{P}^2$ que cobre $N = (2k + 1)\mathbb{P}^2$ e realiza o grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$. A construção para $N = (2k + 2)\mathbb{P}^2$ é análoga, lembrando que $M = (2k + 1)\mathbb{T}^2$ recobre N com duas folhas (ver (b) na Figura 14). Esta construção pode ser feita em mais de um vértice do grafo. \square

4.3 Aplicações de superfícies não orientadas em orientadas

Se N é uma superfície orientada, então toda região regular de $f : M \rightarrow N$ é orientada e imersa em N por f , logo o peso $P = 0$. Neste caso, a superfície M é orientada se, e somente se, o grafo é bipartido (ver [8, 9]). Em [3], foi mostrado que todo grafo com $P = 0$ pode ser realizado por alguma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{S}^2$. Resta ver o caso em que N é orientada com gênero maior que zero, para $S = 0$ e $S > 0$.

Lema 4.3. *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ pode ser associado a alguma aplicação estável $f : p\mathbb{P}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$.*

Proof. Suponha que o grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$ é não bipartido e tem k ciclos com um número ímpar de arestas. Primeiro retira uma aresta de cada um desses k ciclos não bipartido, obtendo um subgrafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E - k)$. Pelo Teorema 4.1, existe alguma aplicação estável $h : M_0 \rightarrow N$ que realiza $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E - k)$, onde M_0 tem gênero $m = (1 - V + (E - k) + T)$. Como o grafo é bipartido, cada um dos vértices pode receber um sinal $+$ ou $-$, de forma que uma aresta sempre conectada vértices com sinais opostos. Os dois vértices de cada par (v_i, v'_i) , de onde foi arrancada uma aresta a_i , recebem o mesmo sinal. Uma aplicação $g : M_1 \rightarrow N$, que realiza o grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E)$, pode ser obtida por k cirurgias verticais sobre h , sendo que cada uma conecta duas regiões correspondente ao par de vértices (v_i, v'_i) , tornando a nova superfície M_1 não orientada e com $2k$ alças a mais que M_0 . Logo o gênero de M_1 é $p = 2(1 - V + (E - k) + T) + 2k = 2(1 - V + E + T)$. \square

Teorema 4.3. *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V, E)$ pode ser associado a alguma aplicação estável $f : p\mathbb{P}^2 \rightarrow n\mathbb{T}^2$.*

Proof. Suponha que $S > 0$, primeiro retira os S \star -laços do grafo, obtendo o subgrafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E - S)$ que pode ser realizado pela aplicação estável $h_2 : M_2 \rightarrow N$, como no Lema 4.3, por alguma aplicação estável $g : M_1 \rightarrow N$, onde M_1 tem gênero $2(1 - V + (E - S) + T)$. A aplicação $f : M \rightarrow N$ que realiza o grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V, E)$, pode ser obtida por S cirurgias horizontais (de forma conveniente) entre a aplicação g e outras S aplicações do tipo (b) na Figura 2 (com duas arestas e um \star -laços), respeitando os locais de cada \star -laço. O aumento de cada um dos S \star -laço corresponde o aumento de um gênero na superfície não orientada, então a superfície não orientada M tem gênero dado por $p = 2(1 - V + (E - S) + T) + S = 2(1 - V + E + T) - S$. \square

4.4 Aplicações entre duas superfícies fechadas

Em [12] foi mostrado que todo grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V,E)$ pode ser realizado por alguma aplicação estável de uma superfície fechada M no plano projetivo. A superfície M é orientada, se e somente se, o grafo é bipartido com $P = 0$. A identidade $id : p\mathbb{P}^2 \rightarrow p\mathbb{P}^2$ pode ser associada ao grafo $\mathcal{G}_{(0,p)}^0(1,0)$. Consequentemente $id : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tem o grafo $\mathcal{G}_{(0,1)}^0(1,0)$ e $id : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ tem o grafo $\mathcal{G}_{(0,2)}^0(1,0)$.

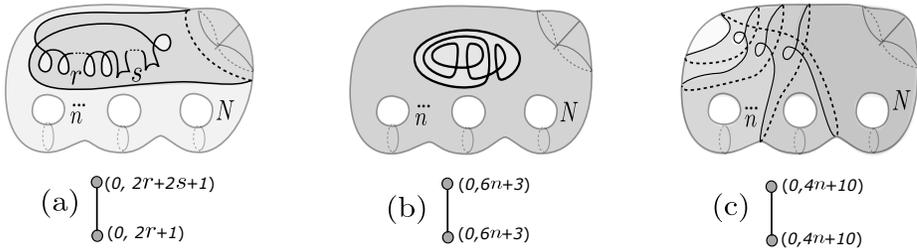


Figura 15: Exemplos de contornos aparentes no $2n + 1$ -projetivo.

A Figura 15 ilustra imagens de três aplicações estáveis não planares no 7-projetivo, com única curva singular e regiões regulares não orientadas: em (a) a aplicação do $2(2r + s + 1)$ -projetivo tem contorno aparente não planar com $2r + 2$ pontos duplos e $2s$ cúspides e grafo $\mathcal{G}_{(0,4r+2s+2)}^0(2,1)$; em (b) a aplicação do $(12n + 6)$ -projetivo tem contorno aparente planar com 4 pontos duplos e grafo $\mathcal{G}_{(0,12n+6)}^0(2,1)$; em (c) a aplicação do $(8n + 20)$ -projetivo tem o contorno aparente não planar com seis pontos duplos e grafo $\mathcal{G}_{(0,8n+20)}^0(2,1)$.

Lema 4.4. *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V,E)$ pode ser associado a alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas.*

Proof. O grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V,E)$ pode ser realizado como no Teorema 4.2. Se $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V,E)$ é não bipartido com k ciclos com número ímpar de arestas, então pode retirar uma aresta de cada um desses k ciclos ímpares, como no Lema 4.3, obtendo um subgrafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V,E - k)$ que pode ser realizado por uma aplicação $h_1 : m_1\mathbb{T}^2 \rightarrow N$, onde $m_1 = 1 - V + (E - k) + T$. Para realizar o grafo não bipartido $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V,E)$, basta fazer k cirurgias verticais para obter uma aplicação $h_2 : p_2\mathbb{P}^2 \rightarrow N$, com $p_2 = 2(1 - V + E + T)$, que realiza o grafo original. Se $S > 0$ em $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V,E)$, o grafo pode ser realizado como no Teorema 4.3. Primeiro retira os S \star -laços e realiza o subgrafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V,E - S)$, como no caso anterior, por uma aplicação $h_2 : p_2\mathbb{P}^2 \rightarrow N$, onde $p_2 = 2(1 - V + (E - S) + T)$. Uma aplicação $h : p\mathbb{P}^2 \rightarrow N$ (com $p = 2(1 - V + E + T) - S$) que realiza o grafo $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(V,E)$, pode ser obtida por S cirurgias horizontais entre h_2 e S aplicações com grafos com \star -laços tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2,2)$, como (b) na Figura 11. \square

Teorema 4.4. *Todo grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V,E)$ pode ser associado a alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas.*

Proof. Se $P > 0$, retira todos os pesos do tipo $(0, p)$ do grafo, obtendo um subgrafo tipo $\mathcal{G}_{(T,0)}^{IS}(V, E)$ que pode ser realizado como no Lema 4.4, por alguma aplicação $h : M' \rightarrow N$. Se $\mathcal{G}_{(T,0)}^{IS}(V, E)$ é bipartido e $S = 0$, então a superfície M' é orientada com gênero $1 - V + E + T$, caso contrário M' é não orientada com gênero $2(1 - V + E + T) - S$. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ que realiza o grafo dado pode ser obtida por cirurgias horizontais entre a aplicação h e aplicações com grafos tipo $\mathcal{G}_{(0,p_i)}^0(2, 1)$, como na Figura 15 (c), que acrescenta pesos tipo $(0, p_i)$ nos vértices sem alterar o número de vértices e de arestas do grafo. \square

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção de grafos associado às aplicações estáveis entre superfícies garante que toda aplicação está associada a um grafo com pares de pesos nos vértices (grafo dual da aplicação). Dado um grafo, mostrar a existência de uma aplicação entre duas superfícies associada ao grafo pode não ser tão simples. Alguns grafos podem ser realizados pela manipulação de transições (de codimensão um) no espaço de funções, partindo de uma aplicação inicial com única aresta ou até mesmo com único vértice. Esta manipulação pode ser difícil dependendo dos pesos nos vértices e dos comprimentos dos ciclos no grafo. As cirurgias surgem como ferramentas importante no auxílio destas construções. Uma vez que já se conhece exemplos de aplicações com única curva singular, ou mesmo sem pontos singulares (recobrimento de n folhas), uma aplicação que realiza o grafo dado pode ser obtida por manipulação das transições e das cirurgias entre estas aplicações já conhecidas, sendo que a cirurgia horizontal bastante útil para realizar os pesos nos vértices, ou seja, somar grafos aplicações com grafos de única arestas e com pesos nos vértices, enquanto que a cirurgia vertical pode ser bastante útil para para realizar (fechar) os ciclos do grafo.

Agradecimentos

Agradeço aos revisores pelas valiosas sugestões.

ABSTRACT. In this work we present results on graphs with weights associated with stable mappings between two closed surfaces, extending the results already obtained to particular cases of maps between closed surfaces.

Keywords: stable maps, graphs, closed surfaces.

REFERÊNCIAS

- [1] C.M. de Jesus. “Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano”. Ph.D. thesis, Tese de Doutorado, PUC-RIO (2001).
- [2] S.i. Demoto. Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve. *Hiroshima mathematical journal*, **35**(1) (2005), 93–113.
- [3] A.C. Felipe & C.M. de Jesus S. Graphs: A global invariant of the stable maps. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, **8**(1) (2021).

- [4] T. Fukuda & T. Yamamoto. Apparent contours of stable maps into the sphere. *Journal of Singularities*, **3** (2011), 113–125.
- [5] M. Golubitsky & V. Guillemin. “Stable mappings and their singularities”, volume 14. Springer Science & Business Media (2012).
- [6] D.L. Gonçalves. The Borsuk-Ulam theorem for surfaces. *Quaestiones Mathematicae*, **29**(1) (2006), 117–123.
- [7] D. Hacon, C.M. de Jesus & M.C. Romero-Fuster. Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data. *Topology and its Applications*, **154**(1) (2007), 166–175.
- [8] D. Hacon, C.M. de Jesus & M.C. Romero-Fuster. Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *Journal of Singularities*, **2** (2010), 67–80.
- [9] C. Mendes de Jesus. Graphs of stable maps between closed orientable surfaces. *Computational and Applied Mathematics*, **36**(3) (2017), 1185–1194.
- [10] C. Mendes de Jesus, S.M. Moraes & M.C. Romero-Fuster. Stable Gauss maps from a global viewpoint. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **42**(1) (2011), 87–103.
- [11] C. Mendes de Jesus & P.D. Romero. Invariants of Stable Maps between Closed Orientable Surfaces. *Mathematics*, **9**(3) (2021), 215.
- [12] C. Mendes de Jesus & M.C. Romero-Fuster. Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane. *Topology and its Applications*, **234** (2018), 298–310.
- [13] C. Mendes de Jesus & M.C. Romero-Fuster. Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane. *Topology and its Applications*, **234** (2018), 298–310.
- [14] C. Mendes de Jesus & E. Sanabria-Codesal. Realization of graphs by fold Gauss maps. *Topology and its Applications*, **234** (2018), 248–258.
- [15] T. Ohmoto & F. Aicardi. First order local invariants of apparent contours. *Topology*, **45**(1) (2006), 27–45.
- [16] R. Pignoni. Minimal arrangements of singularities for apparent contours. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série I, Mathématique*, **313**(12) (1991), 873–878.
- [17] J. Quine. A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, **236** (1978), 307–314.
- [18] H. Whitney. On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. *Annals of Mathematics*, (1955), 374–410.
- [19] M. Yamamoto. The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces. *Houston J. Math*, **35**(4) (2009), 1051–1069.

