

Previsão do Câmbio Real-Dólar sob um Arcabouço de Apreçamento de Ativos*

Paulo Matos[†], Giovanni Beviláqua[‡], Jaime Filho[§]

Conteúdo: 1. Introdução; 2. Referencial Teórico; 3. Metodologia; 4. Exercício Empírico; 5. Conclusão.

Palavras-chave: Câmbio Spot Nominal Real Brasileiro/Dólar Americano; Fator Estocástico de Desconto; Arcabouço de Heterocedasticidade Condicional.

Códigos JEL: G12; G15.

Este artigo estima via componentes principais uma série temporal para o Fator Estocástico de Desconto contendo informações sobre os retornos de fundos cambiais e de renda fixa operando no Brasil, visando utilizá-lo na modelagem do câmbio nominal mensal Real Brasileiro/Dólar Americano através de um *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity-in-Mean* (GARCH-M) bivariado. Este exercício empírico baseado na teoria de apreçamento de ativos segue metodologicamente Chong et alii (2002) e Da Costa et alii (2010), sendo possível evidenciar um erro de previsão de 5,27% para depreciação cambial e um acerto do sinal da variação cambial em 57,5% dos meses, durante o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2009. Estes resultados sugerem à literatura que não se deve desprezar a variação temporal dos momentos condicionais de segunda ordem.

We use principal components to extract a time series for the Stochastic Discount Factor based on returns on Brazilian mutual funds that invest in fixed-income securities and foreign currency. This factor is then used to model the Brazilian Real/American Dollar Exchange rate using a Bivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity-in-Mean (GARCH-M). Our empirical exercise based on asset pricing theory follows the methodology used in Chong, Chung and Ahmad (2002) and Da Costa et alii

*Primeira versão: Fevereiro de 2011. Os autores agradecem pelos comentários de Ivan Castelar, Antônio Dias Coelho e Rogério Siqueira e dos participantes do Seminário em Economia do CAEN/UFC. Paulo Matos agradece ao suporte financeiro do CNPq e Giovanni Beviláqua ao suporte financeiro da TBM Têxtil Bezerra de Menezes S/A.

[†]Doutor em Economia pela EPGE/FGV-RJ e Professor Adjunto II da Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Ceará (CAEN) E-mail: paulomatos@caen.ufc.br

[‡]Mestre em Economia pelo programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Ceará (CAEN). E-mail: giovannibevilaqua@gmail.com

[§]Mestre em Economia pela EPGE/FGV e Doutorando em Economia pela University of Chicago. E-mail: jaimejesus@uchicago.edu



(2010). *Our foreign currency depreciation forecasting error is 5,27% and we are able to say the correct variation sign in 57,5% of the time, during the January 2000 - December 2009 period. These results suggest to the literature that one should not omit the time varying second order conditional moments.*

1. INTRODUÇÃO

Segundo levantamento realizado pela International Financial Services of London, o mercado cambial pode ser considerado como um dos maiores e mais líquidos, com um volume médio de transação em 2010 da ordem de 4,3 trilhões de dólares ao dia.¹ Em termos espaciais, evidencia-se com base nos dados de abril de 2010 uma alocação diversificada, com 36,7% das transações realizadas no Reino Unido, seguido dos Estados Unidos, com 17,9%, o Japão, com 6,2% e Singapura, com 5,3%. A moeda norte-americana é a mais transacionada com 85% do total, seguida do Euro, com 39% e o Iene, com 19%. A observação de volumes significativos de transação e a relevância do câmbio como um instrumento indispensável na maioria das atividades comerciais e financeiras, mesmo entre residentes de uma mesma economia, justificam o crescente desenvolvimento da literatura científica empírica ou teórica sobre a modelagem e previsão das taxas de câmbio.² Segundo Baillie e McMahon (1994) e Krugman e Obstfeld (2005), a evolução desta literatura se dá principalmente a partir do fim do sistema de *Bretton Woods* e consequentemente a partir das primeiras experiências dos países com taxas de câmbio flutuantes.

Nesta vertente de modelagem, os arcabouços microfundamentados ou ad hoc propostos podem ser classificados pelo horizonte temporal ao qual se aplicam. Para o curto prazo, utilizam-se como principais fatores determinantes das taxas de câmbio, dentre outros, o efeito manada e o seguimento de tendências comuns na análise técnica, propensão ao risco por parte dos investidores, pesquisas de sentimento e posicionamento no mercado futuro. Para o médio prazo, as análises tendem a se voltar para as políticas fiscais e monetárias adotada pelos governos, diferenciais de taxas de juros entre os países, taxas de crescimento econômico, saldo da conta-corrente dos países, fluxo de capitais e balanceamento de *portfolios* de ativos. No longo prazo, consideram-se a paridade do poder de compra das moedas, os diferenciais de produtividade das economias, os níveis de poupança ou investimento. Rosenberg (2003) e Carbaugh (2005) são referências bastante informativas nessa área.

Segundo Vitek (2005), a evolução das modelagens pode ser sumarizada em uma promissora trajetória baseada nas teorias quantitativa da moeda e da paridade do poder de compra, a qual se mostrou de limitada relevância no sentido de previsão em menores horizontes de tempo, sendo sua performance inferior à obtida pelos pioneiros arcabouços de apreçamento de ativos os quais seguem a hipótese de passeio aleatório, mais especificamente um processo de *martingale*, cuja intuição foi introduzida aos “jogos de azar” por Girolamo Cardano em um manuscrito em 1565. Somente a partir da avaliação proposta por Meese e Rogoff (1983) sobre os modelos existentes até a década de 80, a literatura passou enfatizar aspectos, como a microestrutura dos mercados em Burnside et alii (2007), o peso *problem* em Evans (1995), a irracionalidade dos agentes em Chakraborty e Evans (2008), ou a acomodação de puzzles em Obstfeld e Rogoff (2000).

Diante da vasta gama de arcabouços macroeconômicos, econométricos e financeiros, em termos da moeda brasileira, destacam-se algumas aplicações empíricas recentes, como Medeiros (2004), que testa modelos híbridos de determinação da taxa nominal de câmbio utilizando o risco país e o fluxo de ordens, através das técnicas que compõem a família *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (ARCH) introduzida por Engle (1982). O estudo ressalta a relevância do fluxo de ordens para a determinação das

¹Report Foreign Exchange 2010 - International Financial Services London - disponível em <http://www.bis.org/publ/rpfx10t.pdf>

²Maiores detalhes, ver Sarno (2002) e Lardic e Mignon (2004).

taxas de câmbio, segundo o enfoque de microestrutura financeira. Soares e Lima (2010) estendem Me-deiros (2004), utilizando o enfoque de microestrutura para estudar as variações das taxas de câmbio em relação ao dólar de países emergentes da Ásia e da América Latina, através da estimação de extensões do arcabouço ARCH.

Em uma linha comparativa entre arcabouços e especificações, Goulart et alii (2005) analisam a capacidade preditiva do arcabouço *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) e extensões dessa família de modelos ARCH, tais como os modelos, *Generalized ARCH* (1,1), *Exponential GARCH* (1,1) e *Threshold GARCH* (1,1), quando empregados para prever a volatilidade das taxas de câmbio no mercado interbancário brasileiro, utilizando cotações diárias entre os anos de 2001 e 2003. Sob uma vertente financeira, Albuquerque e Portugal (2006) utilizam um modelo GARCH bivariado para analisar a relação entre a inflação e a volatilidade das taxas de câmbio no Brasil, evidenciando um padrão não linear entre estas variáveis que pode explicar o seu aparente deslocamento em períodos de regime cambial flutuante.

Neste contexto, o presente artigo agrega a esta literatura, se propondo a modelar e prever o câmbio mensal nominal Real brasileiro – Dólar americano, R\$/US\$, durante o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2009, estando alinhado a Wang (2008) e Engel e West (2005), ao assumir que os preços das operações de aquisição de títulos americanos refletem os níveis esperados dos fundamentos. No caso da economia brasileira, a adoção do câmbio flutuante data de 1999, resultado de crises de balanço de pagamentos e efeitos inflacionários que dificultavam o processo de estabilidade econômica. Sobre este histórico da política cambial, ver detalhes em De Lima (2006) e Cuiabano (2007).

Mais especificamente, este artigo segue uma vertente recente e promissora caracterizada pela fundamentação no arcabouço de apreçamento de ativos, segundo a qual, as taxas de câmbio podem ser modeladas a partir do apreçamento de operações descobertas (expostas ao risco cambial) ou cobertas (com uso do futuro cambial) de aquisição de títulos públicos de governos estrangeiros, ativos financeiros de renda fixa com liquidez significativa. Esta linha de pesquisa, corroborada por Williamson (2008), no sentido de que o preço do ativo financeiro reflete o fluxo de caixa descontado associado a este ativo, tem conseguido acomodar alguns dos puzzles mais robustos associados ao mercado de câmbio, como o *Forward Premium Puzzle*, o qual expõe o contraditório e pouco intuitivo poder do prêmio associado ao câmbio futuro de prever mudanças futuras no mercado *spot* cambial.³ A partir da equação de apreçamento fundamental de ativos, Da Costa et alii (2010) lidam com a modelagem e previsão, proporcionando *insights* relevantes sobre este *puzzle* para moedas de economias desenvolvidas.

Assim, metodologicamente, segue inicialmente Da Costa et alii (2010) em termos da extração da série temporal do Fator Estocástico de Desconto (*Stochastic Discount Factor* – SDF), com base em componentes principais e em modelos multifatoriais, a partir de uma base de retornos reais de Fundos de Investimentos Cambiais e de Renda Fixa operando no Brasil. Através uso de *Generalized Method of Moments* (GMM) desenvolvido por Hansen (1982), evidencia-se que este SDF se mostra capaz de apreçar as operações coberta e descoberta de compra de títulos do governo norte-americano.

Adotando um procedimento comum nesta literatura, assume-se a lognormalidade conjunta dos processos estocásticos, de forma que se derive o tradicional sistema de equações que descrevem os comportamentos temporais do próprio SDF e da depreciação cambial através de um *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity-in-Mean* (GARCH-M) bivariado, primeiramente proposto por Engle e Granger (1987). Ao seguir a ênfase promissora de *Asset Pricing* proposta em De Lima (2006), associado ao este arcabouço econométrico, este artigo se alinha a Chong, Chung e Ahmad (2002).⁴

Em suma, de acordo com os resultados, o arcabouço aqui proposto possui uma melhor performance que a observada no caso do uso de passeio aleatório, um *benchmark* em previsão de depreciação cambial, com um erro mensurado pela raiz do erro quadrático médio de 5,27% ao mês, acertando em 57,5% dos

³Sobre este *puzzle*, ver Hodrick (1987) e Engel (1996).

⁴De Lima (2006) utiliza o GMM durante 1999 e 2005 com frequência mensal, visando estimar quatro modelos econômicos para determinação da taxa de câmbio. O estudo conclui que as variáveis econômicas, tais como medidas de percepção de risco, como o EMBI+ Brasil, o diferencial de juros de longo prazo e os termos de troca, explicam o comportamento da taxa de câmbio.



meses com relação à direção da variação cambial e sinalizando sobre a relevância da variação temporal dos momentos condicionais de segunda ordem. O artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 será exposto o arcabouço teórico de apreçamento de ativos e a derivação do modelo. A terceira seção apresenta a metodologia econométrica do exercício empírico e os respectivos resultados são descritos na seção 4. Na quinta seção, são apresentadas as considerações finais.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A maioria dos artigos empíricos sobre modelagem e previsão no mercado cambial está fundamentada nas teorias de paridade, seja em termos do poder de compra ou da taxa de juros, premissas básicas desde os primeiros trabalhos em política monetária, a partir de Mundell (1963). Este artigo faz uso de um arcabouço de apreçamento de ativos associado à paridade coberta da taxa de juros.

2.1. A Teoria de Apreçamento de Ativos e o Fator Estocástico de Desconto

A teoria de apreçamento de ativos visa modelar o preço de fluxos de caixa intertemporais estocásticos associados a ativos financeiros, podendo ser expressa, segundo Cochrane (2000), pelas seguintes relações:

$$p_t = \mathbb{E}_t(\mathbf{M}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}) \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_{t+1} = f(\text{dados, parâmetros}) \quad (2)$$

onde, p_t é o preço do ativo em t , cujo *payoff* em $t + 1$ é caracterizado por \mathbf{X}_{t+1} , enquanto $\mathbb{E}_t(\cdot)$ representa o operador de expectativa condicional ao conjunto de informação disponível em t . O fator estocástico de desconto, ou SDF, dado por \mathbf{M}_{t+1} , consiste em uma variável aleatória que possui a propriedade de descontar corretamente qualquer fluxo de caixa, de forma que a esperança condicional deste valor descontado seja igual ao preço atual do ativo associado ao respectivo fluxo de caixa.

A relação (1) é considerada como sendo a fundamental no apreçamento de ativos. Conforme a relação (2), a partir de premissas e hipóteses estabelecidas sobre os processos estocásticos associados, é possível derivar várias formas de apreçamento, como a representação β , a fronteira média variância, o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), o arcabouço linear de multifatores e o *Consumption Capital Asset Pricing Model* (CCAPM), dentre outros.⁵ Esta teoria versátil e simples vale sob duas hipóteses bastante razoáveis: a Lei do Preço Único e a Livre Formação de Portfolio. Caso sejam observadas, demonstra-se geométrica e analiticamente que existe ao menos um SDF, chamado de *mimicking portfolio* tal que, a relação (1) seja válida. Aspectos sobre a positividade dos valores observados para o SDF e sua unicidade podem ser assegurados em mundos sem oportunidades de arbitragem e com mercados completos.⁶

2.2. Apreçando a compra de títulos estrangeiros

Seguindo Harrison e Kreps (1979) e Hansen e Richard (1987), em termos de arcabouço de apreçamento de retornos reais, é possível reescrever a relação (1) das seguintes formas:

$$1 = \mathbb{E}_t(\mathbf{M}_{t+1}\mathbf{R}_{t+1}^i), \forall i = 1, \dots, N \quad (3)$$

$$0 = \mathbb{E}_t\left[\mathbf{M}_{t+1}\left(\mathbf{R}_{t+1}^i - \mathbf{R}_{t+1}^j\right)\right], \forall i, j = 1, \dots, N \quad (4)$$

⁵Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) derivam o arcabouço que daria origem ao CAPM. Na década seguinte, os trabalhos de Lucas (1978) e Breeden (1979) são pioneiros no desenvolvimento do CCAPM.

⁶Maiores detalhes sobre as condições de validade e extensões, ver Hansen e Richard (1987) e Cochrane (2000).

onde, R_{t+1}^i e R_{t+1}^j são retornos em $t + 1$ de dois ativos i e j , quaisquer, desde que ambos sejam reais e denominados na mesma unidade monetária. Assim, considere um investidor brasileiro que possa investir em ativos estrangeiros. No tempo t , este investidor converte a moeda brasileira na moeda americana à taxa de câmbio *spot* S_t vigente no momento da transação, cuja unidade é dada em reais por dólar, e compra um título do governo norte-americano que rende no período em questão a taxa já conhecida em t , dada por i_t^* .

Na operação coberta, ao mesmo tempo em que compra o título estrangeiro, o investidor adquire um contrato futuro posicionado na venda de dólares no período $t + 1$, quando do recebimento da taxa i_t^* , estabelecendo assim a taxa de conversão entre dólar e o real em $F_{t,t+1}$, não incorrendo em riscos devido à variação cambial. Na operação descoberta, a diferença consiste na exposição ao risco cambial, uma vez que o investidor desfaz a operação ao câmbio *spot* S_{t+1} vigente em $t + 1$. Considerando o índice de preço em $t + 1$ dado por $1 + \pi_{t+1}$, os retornos reais das operações coberta e descoberta são dados por:

$$R_{t+1}^C = \frac{F_{t,t+1}}{S_t} \cdot \frac{1 + i_t^*}{1 + \pi_{t+1}} \text{ e } R_{t+1}^D = \frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot \frac{(1 + i_t^*)}{(1 + \pi_{t+1})} \quad (5)$$

Substituindo (5) nas relações de apreçamento (3) e (4), válidas para operações cobertas e descobertas envolvendo ativos estrangeiros, tem-se o seguinte sistema de apreçamento em nível:

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\mathbf{M}_{t+1} \frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{(1 + i_t^*)}{(1 + \pi_{t+1})} \right] \quad (6)$$

$$0 = \mathbb{E}_t \left\{ \mathbf{M}_{t+1} \left[\frac{(S_{t+1} - F_{t,t+1})}{S_t} \cdot \frac{(1 + i_t^*)}{(1 + \pi_{t+1})} \right] \right\} \quad (7)$$

2.3. Lognormalização das equações de apreçamento

Visando linearizar a relação de apreçamento de ativos em nível, é comum na literatura assumir a lognormalidade condicional dos processos estocásticos definidos pelo retorno descontado do ativo. Assim, a partir das propriedades desta distribuição, se \mathbf{X} *lognormal* (μ, σ^2) , então $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}(e^{\log(\mathbf{X})}) = e^{\mu + \sigma^2}$ e $\text{Var}(\mathbf{X}) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2}$, é trivial derivar a partir de (6) e (7) o seguinte sistema de equações:

$$s_{t+1} - s_t = (f_{t,t+1} - S_t) - \frac{1}{2}\sigma_t^2(s_{t+1} - s_t) - \text{cov}_t(s_{t+1} - s_t, m_{t+1} - \pi_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} \quad (8)$$

$$m_{t+1} - \pi_{t+1} = -(f_{t,t+1} - s_t + i_t^*) - \frac{1}{2}\sigma_t^2(m_{t+1} - \pi_{t+1}) + v_{t+1} \quad (9)$$

Neste sistema, as letras agora minúsculas representam o respectivo logaritmo neperiano das maiúsculas e $\sigma_t^2(\cdot)$ e $\text{cov}_t(\cdot)$ denotam a variância e a covariâncias, ambas condicionais.⁷ Não se defende aqui nenhuma originalidade neste procedimento. De fato, a vertente que estuda o Forward Premium Puzzle (FPP) há algum tempo já considera a versão lognormalizada de (6) ou (7). Da Costa et alii (2010), por exemplo, fazem uso deste arcabouço, porém sob a ótica de um investidor americano que adquire títulos de outros governos durante o período de 1977 a 2004, visando modelar o prêmio de risco cambial e agregar à literatura de eficiência proposta por Fama (1975).

Metodologicamente, este artigo está alinhado a Da Costa et alii (2010) e Albuquerque e Portugal (2006), respectivamente, ao fazer uso do arcabouço loglinearizado composto pelas relações (8) e (9) e estimá-lo via GARCH-M, porém visando modelar e prever a depreciação do câmbio nominal real-dólar.

⁷A aproximação $\ln(1 + \pi_{t+1}) \cong \pi_{t+1}$ é válida somente para valores bem pequenos de inflação e juros, respectivamente, tratando-se neste artigo, apenas de um abuso de notação.



3. METODOLOGIA

Em suma, o primeiro passo da metodologia consiste em extrair uma série temporal para o SDF como uma combinação linear de fatores obtidos a partir de componentes principais, cuja capacidade de apreçamento é testada, ao se estimar o sistema de relações em nível (6) e (7) via GMM. Sendo evidenciado que os desvios de apreçamento são individual e conjuntamente não significantes e assumindo-se a lognormalidade dos retornos descontados, estima-se o GARCH-M bivariado composto pelas relações (8) e (9), o que possibilita prever o câmbio em um exercício dentro da amostra. Estas etapas serão detalhadas nas seguintes subseções.

3.1. O fator estocástico de desconto

O fator estocástico de desconto consiste em uma variável aleatória fundamental nas equações de apreçamento de ativos, estando explícita sua presença quando das relações fundamentais de apreçamento (1) e (2). É possível extrair através de distintas formas, uma série para o SDF dependendo das premissas. Sob as hipóteses de representatividade e racionalidade sobre as decisões de consumo e poupança dos agentes financeiros, por exemplo, deriva-se o CCAPM. Apesar da inquestionável importância desta vertente microfundamentada de risco – pois a busca pela especificação da forma funcional da utilidade ainda persiste como um *mainstream* –, em razão dos objetivos aqui definidos, não é necessário incorrer nessas premissas dos arcabouços de preferência. Assim, o procedimento adotado segue uma vertente alternativa á baseada em decisões de consumo, proposta em Hansen e Jagannathan (1991), e que usa um SDF equivalente ao *mimicking* portfolio, no sentido de ser uma projeção no subespaço vetorial de retornos de ativos.

A interpretação estatística deste *return-based* SDF é a de que todo ativo financeiro contém um “pedaço” do SDF, de forma que ao se combinar um painel suficientemente grande de ativos ao longo do tempo, elimina-se os componentes idiossincráticos, em um raciocínio análogo ao desenvolvido no APT de Ross (1976), restando um único componente ou fator de risco comum, o SDF.

Basicamente, impondo-se pouco sobre a estrutura de *payoffs* e preços dos ativos, tais como lei do preço único e livre formação de portfolio, deve se escolher um conjunto amplo o suficiente de ativos tais que, devam ser corretamente apreçados pelo fator a ser extraído. Seguindo o procedimento desenvolvido por Chamberlain e Rothschild (1983), Connor e Korajczyk (1986, 1993) e Bai (2005), deriva-se um estimador do SDF consistente assintoticamente, nas dimensões do corte transversal e temporal.

3.1.1. Sumarizando informação sobre risco dos ativos

A técnica de componentes principais, cujos primeiros estudos ocorreram há mais de um século com fins em bioestatística, permite identificar padrões de interrelações complexas e multidimensionais, subsidiando a decisão de se condensar uma grande quantidade de informação contida em um painel de dados, em que a variância sistêmica prevaleça *vis-à-vis* a variância idiossincrática. Neste sentido, trata-se de uma técnica adequada, vastamente usada para determinar combinações das séries temporais dos retornos de N ativos financeiros, gerando $K < N$ *portfolios*, os quais sejam ortogonais entre si, possam ser ranqueados em ordem de importância e descrevam o risco contido na base original de ativos.

A exigência sobre a ortogonalidade assegura que os *portfolios* meçam diferentes dimensões dos dados. Com relação ao ranking, acredita-se que a variância da maioria dos *portfolios* possa ser considerada negligenciável, de forma que a maioria da variância contida na base de dados possa ser explicada pelo primeiro *portfolio*, cujo poder de explicação é o maior, pelo segundo *portfolio*, possuidor do segundo maior poder de explicação, e assim sucessivamente, de forma que poucas combinações sejam suficientes.

Assim, considere a matriz $R_{(N \times T)}$ contendo T observações temporais sobre N ativos. O primeiro componente principal consiste na combinação linear normalizada dos ativos com maior variância, a

partir do vetor de pesos x_1^* , o qual consiste no autovetor associado ao maior autovalor da matriz covariância amostral, $\widehat{\Omega}$, obtido como a solução da seguinte otimização:

$$\text{Max}_{x_1} x_1' \widehat{\Omega} x_1, \text{ s.a. } x_1' x_1 = 1 \quad (10)$$

O segundo componente também consiste em uma combinação que maximiza variância, porém limitada ao subconjunto de combinações ortogonais à primeira. Os demais componentes são análogos.⁸

3.1.2. Estimação do SDF a partir dos retornos dos ativos

Um modelo linear padrão de multifatores segue a seguinte relação:

$$\mathbf{R}_{i,t} = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} f_{k,t} + \eta_{i,t} \quad (11)$$

onde, α_i e $\beta_{i,k}$ são parâmetros desta relação linear, $f_{k,t}$ corresponde ao k -ésimo fator *demeaned*, ou seja, $f_{k,t} \equiv \widetilde{f}_{k,t} - \mathbb{E}(\widetilde{f}_{k,t})$ e $\widetilde{f}_{k,t}$ denota o retorno real em t de um portfolio específico. Como usual, o resíduo $\eta_{i,t}$ nestas análises é tal que, $\text{Plim} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_{i,t} \right) = 0$. O primeiro passo quando de um arcabouço multifator consiste em definir os fatores. Isso pode ser feito desde uma forma *ad hoc*, baseado em microfundamentos, ou em procedimentos estatísticos. Neste último caso, os componentes principais possuem a propriedade de serem estimadores consistentes dos fatores, cuja combinação linear gera um SDF capaz de apreçar corretamente os N ativos originalmente usados. O segundo passo é estimar o arcabouço descrito em (11), de forma que se possa derivar a respectiva representação beta

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}_{i,t}) = \gamma + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \lambda_k, i = 1, \dots, N \quad (12)$$

onde, λ_k é interpretado como o preço do k -ésimo do fator de risco. A partir desta representação em (12), é possível identificar os valores exatos de γ e $\beta_{i,k}$ tais que, se assegure que o estimador para o SDF, M_t^* , possa ser escrito como uma combinação linear dos fatores, sendo válidas as seguintes relações:

$$M_t^* = \frac{1}{\gamma} - \gamma [\text{cov}(f, f')]^{-1} \sum_{k=1}^K \lambda_k f_{k,t} \text{ e } \mathbb{E} \left(\widetilde{M}_t^* R_{i,t} \right) = 1, i = 1, \dots, N \quad (13)$$

Sobre a quantidade de fatores a ser usada, o pesquisador lida com o *trade-off* entre representatividade e parcimônia. A técnica aqui utilizada segue Lehmann e Modest (1988), Connor e Korajczyk (1988) e Tsay (2001) a qual consiste em optar pelo *scree plot test*, em que se observa a contribuição de cada fator adicional, a partir de um gráfico do autovalor associado a cada fator, de forma que ao perceber uma redução da inclinação, ou da contribuição marginal, define-se pelo fim da inclusão de fatores.⁹

Sobre a base de ativos a ser usada, teoricamente, o que sugere que a hipótese do apreçamento correto não seja rejeitada é o fato de esta base, cujo risco é sumarizado pelos componentes principais os quais são combinados linearmente na extração do SDF, seja composta por uma quantidade suficientemente grande de operações financeiras associadas aos principais elementos dos retornos $R_{t+1}^C e R_{t+1}^D$,

⁸Uma abordagem de extração das combinações lineares desenvolvida por Connor e Korajczyk (1986, 1988), bem aceita em finanças, faz uso dos autovetores associados aos maiores autovalores, porém da matriz de covariância $T \times T$ dos dados em corte transversal, em vez da $N \times N$ dos dados em séries temporais, aconselhável quando se dispõe de uma matriz de dados em que $N > T$.

⁹É comum que se deseje explicar um percentual mínimo da variância em questão, sendo praxe em ciências sociais, um mínimo de 60%. Mais criteriosamente, há quem imponha que cada fator explique ao menos a variância de uma variável individual. Mais recentemente, tem-se ainda o complexo teste estatístico de razão de log verossimilhança proposto por Morrison (1990).



ou seja, o câmbio real-dólar e os títulos públicos do governo norte-americano. Assim, sob a hipótese de paridade coberta da taxa de juros, os retornos de operações envolvendo a aquisição de títulos do próprio governo brasileiro são equivalentes aos retornos cobertos com títulos do governo norte-mericano, podendo servir como *proxy* adequada do risco a ser modelado e incorporado pelo SDF. Na subseção 4.1, são descritos estes ativos.

3.2. O apreçamento dos títulos americanos (em nível)

Tendo sido estimado o SDF, (M_t^*) , tal que, a respectiva série temporal extraída seja “próxima” o suficiente da série do verdadeiro e latente SDF, é possível reescrever estas relações (6) e (7), gerando assim o seguinte sistema de equações de apreçamento em nível, testável empiricamente:

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\widetilde{M}_{t+1}^* \frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{1 + i_t^*}{1 + \pi_{t+1}} \right] \text{ e } 0 = \mathbb{E}_t \left\{ \widetilde{M}_{t+1}^* \left[\frac{(S_{t+1} - F_{t,t+1})}{S_t} \frac{(1 + i_t^*)}{(1 + \pi_{t+1})} \right] \right\} \quad (14)$$

Neste exercício de apreçamento, a única hipótese necessária consiste na estacionariedade das variáveis aleatórias em questão, cujas principais estatísticas descritivas estão reportadas na Tabela 1. Os resultados dos testes de estacionariedade estão reportados na Tabela 2.

Um aspecto fundamental quando do uso do arcabouço de GMM proposto em Hansen (1982) consiste no conjunto informacional. Assim, considere z_t como sendo o vetor de variáveis instrumentais cujo valor seja observável em t , conseqüentemente mensuráveis em $\mathbb{E}_t(\cdot)$. Para o caso específico do sistema de equações, a literatura associada ao *forward-premium puzzle* está baseada exatamente no poder preditivo do *forward premium*, $\frac{F_{t,t+1} - S_t}{S_t}$, sobre a depreciação cambial, $\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}$. Seguindo a literatura deste *puzzle* de forma parcimoniosa, o conjunto de instrumentos é composto por este termo, além da constante. Os resultados obtidos com este conjunto instrumental são testados em exercícios de robustez, alterando-se o *forward premium* por variáveis macroeconômicas, uma opção tradicional, porém menos relevante.

Fazendo-se uso do artifício de *scaled returns*, ou seja, $\mathbf{R}_t \times \mathbf{z}_t$, e da Lei de expectativas iteradas, é possível definir o seguinte sistema de condições de ortogonalidade:

$$0 = \mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{t+1}^* \frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{(1+i_t^*)}{(1+\pi_{t+1})} - (1+\mu_1) \\ \widetilde{M}_{t+1}^* \left[\frac{(S_{t+1} - F_{t,t+1})}{S_t} \frac{(1+i_t^*)}{(1+\pi_{t+1})} \right] - \mu_2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{z}_t \right\} \quad (15)$$

Neste sistema, estimam-se os desvios do correto valor de apreçamento, ou seja, desvios do valor unitário para os retornos e do valor nulo para os retornos excedentes, μ_1 e μ_2 , respectivamente. Testa-se através da estatística $T \times J$ a sobreidentificação do modelo - uma combinação ponderada dos momentos, cuja interpretação em um arcabouço de apreçamento seria equivalente ao teste de uma ponderação dos erros de apreçamento, dados pela diferença entre o preço correto e o previsto pelo arcabouço. Este último teste permite inferir e mensurar o quão adequado é a capacidade de *fitting* do SDF utilizado.

Sobre a especificação da estimação, no que se refere à matriz de ponderação dos quatro momentos do sistema, opta-se por um processo iterativo, o qual gera estimadores não somente consistentes e assintoticamente normais, mas também eficientes, no sentido de que este estimador possui a “menor” matriz de variância-covariância dentre todas as possíveis escolhas de matrizes de ponderação. Nesta especificação, a escolha da matriz de ponderação é baseada em um critério estatístico, da mesma forma que em um processo com apenas duas etapas. Porém, segundo a evidência empírica proposta em Ferson e Foerster (1994), o processo de iteração, caracterizado pela convergência até que encontre o ponto fixo, geraria estimadores com melhores propriedades em pequenas amostras que os estimadores obtidos em duas etapas. Tendo em vista a limitação da amostra ao longo do tempo, esta propriedade é relevante

no exercício aqui proposto. Os resultados da estimação deste arcabouço via GMM estão reportados na Tabela 3.¹⁰

3.3. Estimando o arcabouço linearizado de depreciação cambial

Nas etapas anteriores, estima-se um SDF, \widetilde{M}_t^* , o qual precisa se mostrar adequado, ou seja, capaz de apreçar corretamente em nível as operações coberta e descoberta com títulos norte-americanos, de forma que, sob lognormalidade condicional dos processos estocásticos associados aos retornos descontados, tem-se o já apresentado sistema composto pelas relações (8) e (9). Este sistema pode ser reescrito, porém com o logaritmo do estimador do SDF, permitindo evidenciar que os processos $\widetilde{m}_{t+1}^* - \pi_{t+1}$ e de depreciação cambial, $s_{t+1} - s_t$, dependem das respectivas variâncias condicionais e da covariância condicional.

$$s_{t+1} - s_t = (f_{t,t+1} - s_t) - \frac{1}{2}\sigma_t^2(s_{t+1} - s_t) - cov_t(s_{t+1} - s_t, \widetilde{m}_{t+1}^* - \pi_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} \quad (16)$$

$$\widetilde{m}_{t+1}^* - \pi_{t+1} = (f_{t,t+1} - s_t + i_t^*) - \frac{1}{2}\sigma_t^2(\widetilde{m}_{t+1}^* - \pi_{t+1}) + v_{t+1} \quad (17)$$

Este sistema consiste em uma extensão sugerida em Engle e Granger (1987) de um modelo conhecido e vastamente usado, chamado *Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH), proposto por Bollerslev (1986), o qual estende o arcabouço desenvolvido em Engle (1982), conhecido como *Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity* (ARCH), onde o processo estocástico endógeno é um retorno heterocedástico e sua variância condicional possui um intercepto e depende linearmente dos lags da própria série e dos retornos ao quadrado.¹¹

Esta geração de modelos representa uma significativa evolução em relação aos arcabouços desenvolvidos até a década de 80, desde as modelagens de passeio aleatório aos recentes modelos de fatores, os quais se baseiam em apenas dois momentos constantes no tempo. Irrealistas e limitados, estes modelos não conseguem acomodar evidências empíricas, caracterizadas como fatos estilizados, em especial, a aglomeração de volatilidade.

Este padrão significa que os retornos tendem a surgir em grupos, uma propriedade comumente observada nas séries de dados financeiros, onde períodos turbulentos, de alta volatilidade, são seguidos por períodos mais tranquilos. Em alguns casos, a volatilidade em uma série afeta a volatilidade em outras séries, por estas serem fortemente correlacionadas. Assim, além da aglomeração de volatilidade em uma série isolada, dada a evidência da aglomeração em correlação observada nas séries, sugere-se a modelagem via modelos GARCH multivariados.

Algumas extensões foram propostas visando aprimorar ou mesmo incorporar à modelagem original outras evidências empíricas. Assim, tendo em vista acomodar a evidência sobre o padrão de *realimentação de volatilidade* (*volatility feedback*), Engle e Granger (1987) propõem uma especificação de modelo GARCH conhecida com GARCH-em-média (GARCH-M), onde a variância condicional é introduzida como variável regressora na equação de retorno do ativo, uma especificação que não deriva exatamente de um arcabouço microfundamentado nem mesmo teórico, mas que ainda assim, possui ampla aplicação empírica pela capacidade de previsões mais acuradas em várias séries financeiras.

Segundo Dominguez (1998), uma quantidade significativa de artigos empíricos modelando efeitos de intervenção na volatilidade cambial faz uso de arcabouço com heterocedasticidade condicional. Dois

¹⁰Como teste de robustez, adota-se a especificação de uma única etapa, a qual adota a matriz identidade de ponderação, sendo neste caso o estimador oriundo a partir da minimização da soma dos quadrados dos erros de apreçamento associados aos momentos.

¹¹Bueno (2008) observa que estes modelos ARCH precisam de muitos parâmetros para que sejam corretamente ajustados, o que pode ter motivado esta generalização.



aspectos são relevantes na etapa de estimação deste sistema: parcimônia e a matriz de covariância. A vertente mais expressiva de modelagem de previsão de volatilidade faz uso de especificações bastante parcimoniosas, sendo aqui sugerido o uso do GARCH-M bivariado (1,1), até mesmo em razão da limitação da série temporal vis-à-vis a quantidade de parâmetros a serem estimados. Sobre este aspecto, ver por exemplo, West e Cho (1995) e Malmsten e Terasvirta (2004).¹²

Sobre o segundo ponto, como se utiliza o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo GARCH, é necessário garantir que a matriz de covariância seja positiva definida. Assim, de forma a garantir esta propriedade, faz-se aqui uso da parametrização das equações dos modelos GARCH conhecida como BEKK, que é um caso especial do modelo VECH, conforme Engle e Kroner (1993). Esta parametrização BEKK permite a estimação de menos parâmetros, comparado com as representações VECH tradicionais. Outra vantagem, segundo Alexander (2008) e Francq e Zakoian (2010), é a não imposição sobre a forma das covariâncias condicionais, como por exemplo, nos modelos de correlação condicional constante (CCC).

4. EXERCÍCIO EMPÍRICO

4.1. Base de dados

Em princípio, em trabalhos onde sejam aplicados testes estatísticos e econométricos, é preferível a utilização de uma grande quantidade de dados nas dimensões temporal e de corte transversal, principalmente tendo vista os testes assintóticos aqui propostos. Assim, além de um maior grau de liberdade, possibilita-se a estimação de uma maior quantidade de parâmetros.

Com base na metodologia já descrita, para a construção das séries de retorno real das operações coberta e descoberta, os dados básicos são as séries temporais das taxas de câmbio nominal PTAX R\$/US\$, *spot* e futura para 30 dias, cujas séries temporais durante o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2009 são altamente correlacionadas e possuem estatísticas amostrais associadas aos momentos centrais com valores bastante próximos, conforme a Tabela 1. Estas variáveis apresentam um crescimento até o ponto máximo no segundo semestre de 2002, refletindo as incertezas dos investidores quanto aos rumos da economia com a eleição do presidente Luis Inácio Lula da Silva, em outubro de 2002, e um recuo das taxas aos seus níveis no início das séries em 2000, durante os anos seguintes. A série *spot* foi extraída do Banco Central do Brasil (BACEN), enquanto a futura foi fornecida pela Bolsa de Mercadorias e Futuros (*BM&F*).

As outras séries são as de juros dos títulos de curto-prazo do governo norte-americano, obtida junto ao Federal Reserve (FED) e as taxas de inflação mensal no Brasil, dadas pelo Índice de Preços ao Consumidor Amplo, calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IPCA/IBGE).

A Tabela 1 reporta ainda as principais estatísticas das séries de retorno.

A operação descoberta possui retorno médio negativo e com menor ordem de grandeza que a operação coberta, a qual possui média mensal superior a 0,5% e é bem menos volátil, com base no desvio-padrão ou na semivariância. Ambas apresentam leptocurtose elevada, porém assimetrias em direções opostas. O retorno excedente apresenta um comportamento próximo ao da operação descoberta, tanto em termos de risco, como levando-se em consideração os momentos de terceira e quarta ordem. O teste de normalidade proposto em Bera e Jarque (1981) sugere que nenhuma das séries analisadas seja gaussiana.

Ainda sobre a base de dados necessária, o último elemento consiste no SDF. Assim, visando sumarizar através dos componentes principais a fonte de risco associada às operações coberta e descoberta,

¹²Segundo Morettin e Toloi (2004), “a identificação da ordem de um modelo GARCH, a ser ajustado a uma série real, usualmente é difícil. Recomenda-se que se use modelos de ordem baixa, como (1, 1), (1, 2) ou (2, 1) e depois se escolha o modelo com base em vários critérios, como AIC ou BIC,...”. Um interessante trabalho realizado na tentativa de identificação da ordem de um modelo GARCH é o de Caldeira et alii (2009).

Tabela 1: Estatísticas básicas das séries temporais das cotações cambiais spot e futuro (Painel A) e dos retornos reais brutos associados às operações de compra coberta e descoberta de títulos norte-americanos de curto prazo (Painel B)

	Métricas de ganho			Métricas de risco		3 ^o e 4 ^o momentos	
	Media	Minimo	Maximo	Desvio Padrão	Sem Ivariância	Assimetria	Curtose
Painel A: Câmbio R\$/US\$							
$F_{t,t+1}$	2,37	1,58	3,71	0,53	0,33	0,67	2,64
S_t	2,35	1,57	3,89	0,53	0,32	0,75	2,89
$\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$	0,12%	-13,82%	28,88%	5,57%	3,19%	1,70	9,52
Painel B: Retornos reais com títulos americanos de curto prazo							
R_{t+1}^C	0,52%	-7,36%	3,26%	1,35%	1,17%	-3,34	20,11
R_{t+1}^D	-0,24%	-14,26%	27,39%	5,56%	3,24%	1,55	8,70
$R_{t+1}^C - R_{t+1}^D$	-0,76%	-15,28%	28,06%	5,45%	3,04%	1,90	10,49

^a: Séries temporais durante o período de 2000.1 a 2009.12, 120 observações mensais

Fonte: BACEN, BM&F, FED e IBGE.

faz-se uso, sob a hipótese de paridade coberta da taxa de juros, de operações envolvendo a aquisição de títulos do próprio governo brasileiro as quais podem servir como *proxy* do risco a ser modelado e incorporado pelo SDF. Mais especificamente, fez-se uso de fundos de investimento de renda fixa e de fundos cambiais-dólares, tendo sido o Fortuna a fonte dessas informações.

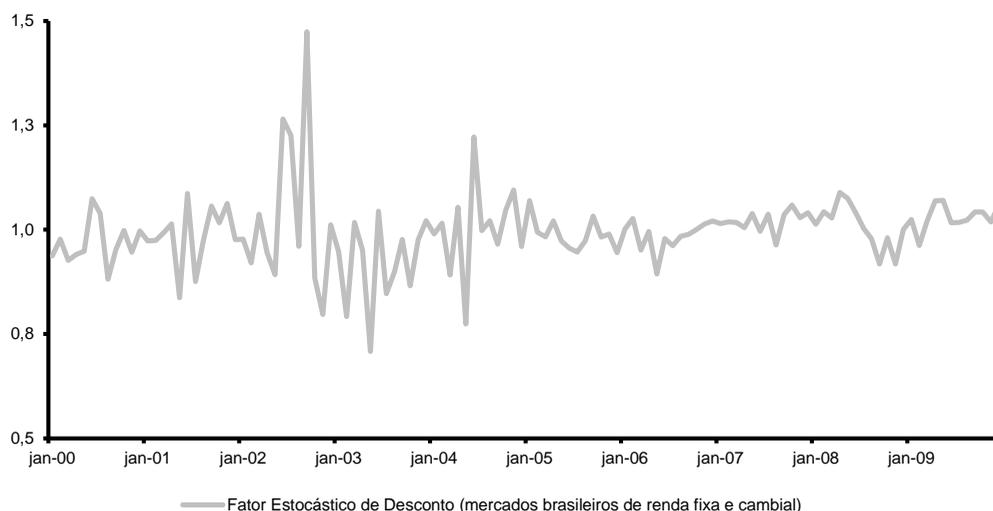
A escolha desses fundos se dá pela natureza das operações realizadas por eles. Segundo o Conselho de Valores Mobiliários (CVM), os fundos de renda fixa devem manter, no mínimo, 80% de sua carteira em títulos públicos federais ou ativos com baixo risco de crédito, enquanto os fundos classificados como cambiais-dólares aplicam pelo menos 80% de sua carteira em ativos de qualquer espectro de risco de crédito relacionados diretamente à moeda norte-americana, ou sintetizados via derivativos.

Em atividade no Brasil, ao final de 2009, existem 45 fundos cambiais-dólares e 470 fundos de renda fixa em atividade no país, caracterizando esta como uma indústria dominada por poucas instituições. Deste conjunto de fundos, são selecionados todos os fundos cambiais e de renda fixa que continham histórico completo de cotas de dezembro de 1999 a dezembro de 2009, perfazendo um total de 18 fundos cambiais e 66 fundos de renda fixa. Nos fundos cambiais, a maioria apresenta retornos médios negativos durante o período analisado, elevadas volatilidades e comportamento não gaussiano. Já os fundos de renda fixa apresentaram retornos médios positivos e muito próximos entre si, com valores superiores em termos de ganho e risco aos obtidos para a poupança no mesmo período.

4.2. O Fator Estocástico de Desconto (SDF)

O arcabouço caracterizado por um GARCH-M bivariado composto pelas relações lognormalizadas (8) e (9) não é inédito deste artigo, sendo a principal inovação o uso da série estimada de um SDF capaz de satisfazer as relações de apreçamento em nível descritas em (6) e (7). O gráfico do SDF estimado é mostrado na Figura 1.

É espúrio usar um SDF sem que este fosse baseado em um arcabouço microfundamentado de consumo ou baseado em um conjunto de ativos financeiros associados às operações coberta e descoberta de aquisição de títulos do governo norte-americano.

Figura 1: Série temporal do Fator Estocástico de Desconto^{a,b}

a: SDF obtido como combinação linear de fatores extraídos a partir da técnica de componentes principais.

b: Base de dados na extração dos componentes principais: fundos de investimento brasileiros nas categorias cambial e renda fixa, durante o período de 2000.1 a 2009.12, 120 observações mensais.

Neste artigo, opta-se pela segunda vertente, em razão de fazer necessário o uso de menos premissas, além da própria qualidade dos dados financeiros vis-à-vis macroeconômicos, os quais em geral estão disponíveis para frequências trimestrais, em vez de mensais. Assim, para a fonte de dados faz-se uso do painel construído com retornos reais mensais dos 84 fundos cambiais e de renda fixa descritos na seção anterior, sendo utilizado o IPCA como índice de preço.

Seguindo o procedimento proposto por Tsay (2001), a escolha da quantidade de fatores se dá a partir da análise do gráfico dos autovalores ordenados decrescentemente - scree plot test. São utilizados apenas três fatores, os quais são responsáveis por 97,92% da variação dos retornos dos 84 fundos.

Este SDF estimado possui valor médio de 0,99 - associado a uma taxa livre de risco anual real média de 7,23% -, apresentando uma volatilidade de quase 9,00%, considerável quando comparado aos desvios obtidos a partir de SDF's microfundamentados. O SDF oscila entre 0,71 e 1,45, apresentando leve assimetria para direita e elevada curtose de 8,12.

4.3. Resultados

4.3.1. Teste de apreçamento em nível

Partindo-se do pressuposto de que a série extraída para o SDF é suficientemente próxima do verdadeiro SDF, então é estritamente necessário que se satisfaça uma hipótese básica em estudos empíricos

que envolvam séries temporais: a estacionariedade das séries de retornos coberto e descoberto, ambos descontados pelo SDF, para que seja estimado o sistema de condições de ortogonalidade (15) via GMM.¹³

Uma variável aleatória, cujo comportamento mude ao longo do tempo, é considerada estacionária, caso oscile em torno de uma mesma média, constante ao longo do tempo. Analogamente, uma série não estacionária flutua em torno de tendências temporais determinísticas ou estocásticas. Formalmente, define-se a série como fracamente estacionária se esta possuir segundo momento não centrado incondicional finito e esperança e autocovariância incondicionais constantes ao longo do tempo.

Apesar do interesse em estudos econométricos por séries estacionárias, tendo em vista a validade das inferências estatísticas obtidas, o desenvolvimento de testes estatísticos que visem identificar a presença de tendência determinística ou estocástica em séries temporais, conhecidos por testes de raiz unitária, podem ser motivados pela intuição de que séries não estacionárias possuem momentos não constantes ao longo do tempo e até mesmo explosivos.

O primeiro teste reportado na literatura é proposto em Dickey e Wayne (1979, 1981), cuja hipótese nula de presença de raiz unitária na série estava associada à estimativa do único coeficiente em um processo auto-regressivo de ordem 1, AR (1), sem *drift*, cujos valores críticos da distribuição do teste de hipóteses eram derivados a partir de simulações de Monte Carlo.¹⁴

Apesar da simplicidade do teste, a hipótese de que o erro estocástico fosse necessariamente um ruído branco motivou o desenvolvimento de extensões flexibilizando o processo do erro. Em uma versão aumentada deste teste, ADF, estima-se um processo auto-regressivo similar, porém com a inclusão de mais *lags* da própria variável, sendo mantidos os valores críticos.

Com o intuito de obter resultados com um mínimo de robustez à mudança de técnicas faz-se uso de diferentes especificações de testes de estacionariedade. Assim, os demais testes utilizados são: i) o arcabouço semiparamétrico sugerido em Phillis e Phillips e Perron (1988), ii) o teste proposto em Kwiatkowski et alii (1992), e iii) o método desenvolvido em Elliot, Rothemberg e Stock (1996).¹⁵

De acordo com os resultados destes testes reportados na Tabela 2, as séries de retorno descontado se mostram estacionárias com base em todos os teste utilizados, os quais foram especificados apenas com uso de intercepto.

Esta especificação é fundamental, uma vez que a exclusão ou inclusão indevidas podem influenciar no poder do teste, gerando estimações viesadas.

Com relação aos interceptos, estes são significativos a 1% para ambas as séries, sendo inadequado sua exclusão dos testes.

Em relação à tendência, o conhecimento prévio do comportamento das séries é bastante útil, sendo comum em finanças empíricas, mais especificamente, quando do teste de séries de retornos reais de ativos financeiros, adotar que estas não possuam tendência.

Ainda assim, os testes reportados na Tabela 2 foram replicados com a inclusão de tendência, sendo corroborados os resultados de estacionariedade previamente obtidos.

Sendo satisfeita a única premissa, estima-se o modelo em nível via GMM, cujos resultados estão reportados na Tabela 3.

De acordo com os resultados, observa-se a insignificância individual e conjunta ao nível de 5% de significância dos parâmetros μ_1 e μ_2 , evidenciando que os desvios do correto valor de apreçamento são estatisticamente nulos, ou seja, o valor unitário para o retorno da operação descoberta e o valor nulo para o retorno excedente da operação descoberta em relação à coberta.

Através da estatística $T \times J$, evidencia-se também que as condições de sobreidentificação são satisfeitas. Este último resultado sobre a ponderação dos erros de apreçamento permite inferir sobre a boa

¹³Granger e Newbold (1974, 1977) abordam os problemas oriundos do uso de series não estacionárias em arcabouços econométricos.

¹⁴Para maiores informações, ver Chan e Wei (1988) e Phillips (1987).

¹⁵Em razão de lidar com o tamanho da série temporal, foi proposta por Perron e Ng (1996) uma extensão de Phillips e Perron (1988).

Tabela 2: Estacionariedade das séries temporais de retornos reais descontados de compra dos títulos norte-americanos de curto prazo^{a,b,c,d}

Teste de Estacionariedade	Hipótese nula	\widehat{M}_{t+1}^{*RC}		\widehat{M}_{t+1}^{*RD}	
		Output	Resultado	Output	Resultado
Augmented Dickey-Fuller	Presença de raiz unitária	pvalor (0,0008)	Estacionário (1% de signif.)	pvalor (0,0000)	Estacionário (1% de signif.)
	Presença de raiz unitária	pvalor (0,0000)	Estacionário (1% de signif.)	pvalor (0,0000)	Estacionário (1% de signif.)
Phillips-Perron (1988)	Presença de raiz unitária	pvalor (0,0000)	Estacionário (1% de signif.)	pvalor (0,0000)	Estacionário (1% de signif.)
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992)	Estacionariedade	Estadística LM (0,3975)	Estacionário	Estadística LM (0,0782)	Estacionário
Elliott-Rothenberg-Stock (1996)	Presença de raiz unitária	Estadística P (1,9864)	Estacionário (5% de signif.)	Estadística P (0,1721)	Estacionário (1% de signif.)

a: Especificação do teste: inclusão apenas de intercepto.

b: Valor crítico do teste KPSS: 10% - 0,3470

c: Valores críticos do teste ERS: 1% - 1,9420 e 5% - 3,1220

d: Séries temporais durante o período de 2000.1 a 2009.12. 120 observações mensais.

capacidade de *fitting* do SFD utilizado. Este resultado satisfatório permite que finalmente se estime o sistema em sua versão lognormalizada.

Tabela 3: Estimação via GMM do arcabouço em nível da equação fundamental de apreçamento de ativos^{a,b,c}

Sistema de equações		Resultados da estimação	
$0 = \mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{t+1}^* \frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{(1+i_t^*)}{(1+\pi_{t+1})} - (1+\mu_1) \\ \widetilde{M}_{t+1}^* \left[\frac{(S_{t+1} - F_{t,t+1})}{S_t} \frac{(1+i_t^*)}{(1+\pi_{t+1})} \right] - \mu_2 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{Z}_t \right\}$			
Instrumentos: Constante e $\frac{F_{t,t+1} - S_t}{S_t}$			
Teste de Wald	Erros de apreçamento	Condições de sobreidentificação	
$H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 0$	$\tilde{\mu}_1$	1,8 e -5	(0,0076) [0,9981]
X^2	$\tilde{\mu}_2$	-0,0085	(0,0058) [0,1426]
2,1678	[0,3383]	0,0148	[0,4112]

*: Indica a rejeição da hipótese nula do desvio de apreçamento insignificante ao nível de 5%.

** : Indica a rejeição da hipótese nula da insignificância conjunta dos desvios de apreçamento a 5%.

***: Indica a rejeição da validade das condições de sobreidentificação.

a: Técnica do Método Generalizado dos Momentos (GMM) proposta por Hansen (1982) usada para teste da Equação de Euler e

estimação dos parâmetros, durante o período de janeiro

de 2000 a dezembro de 2009, 120 observações mensais.

b: Respectivo erro padrão reportado em parênteses e *p*-valor em colchetes.

4.3.2. Estimação do arcabouço GARCH-M

A última etapa do processo de previsão da depreciação cambial consiste em estimar o sistema composto pelas relações (16) e (17), o qual corresponde à versão lognormalizada do sistema em nível dado pelas relações (18) e (19), já satisfeitas empiricamente para o SDF aqui proposto.

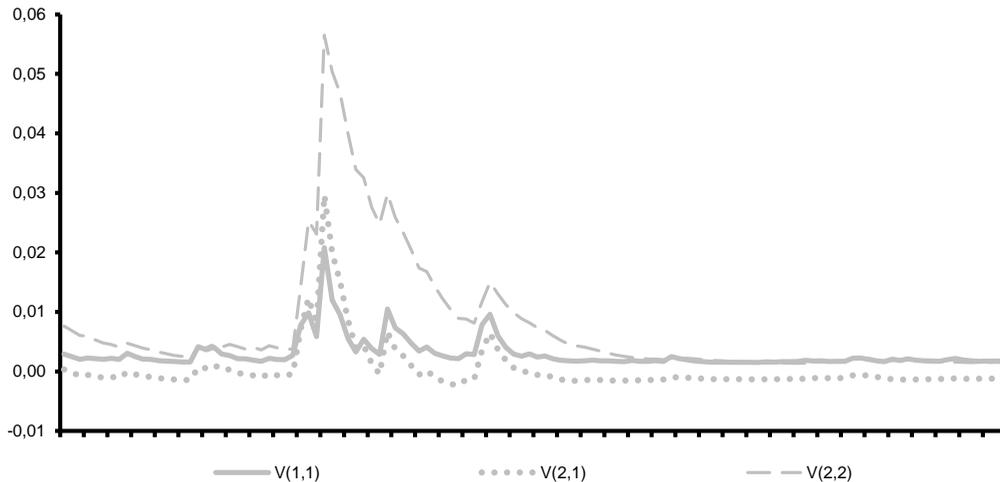
Um dos principais pontos relevantes no arcabouço usado consiste exatamente na heterocedasticidade das séries em questão. Os termos $V(1,1) = \sigma_t^2(s_{t+1} - s_t)$, $V(1,2) = cov_t(s_{t+1} - s_t, \widetilde{m}_{t+1} - \pi_{t+1})$ e $V(2,2) = \sigma_t^2(\widetilde{m}_{t+1} - \pi_{t+1})$, os quais caracterizam a variância e a covariância condicionais, são representados na Figura 2, sendo significativos os parâmetros da matriz de covariância estimados.

Estas séries de variância e covariância condicionais utilizadas no sistema lognormalizado possuem teoricamente poder preditivo na depreciação cambial e no movimento do SDF estimado. Visivelmente, o excesso de volatilidade dessas séries no período compreendido entre o segundo semestre de 2002 e o final de 2004 parece indicar ser aconselhável recorrer ao uso de arcabouços heterocedásticos na modelagem de câmbio.

Os resultados da estimação dos parâmetros do GARCH-M (1,1), via máxima verossimilhança, conforme a parametrização BEKK proposta em Baba et alii (1993) abordada na subseção 3.3, estão reportados na Tabela 4. Não é possível rejeitar a hipótese nula de que apesar de insignificantes individualmente, os parâmetros associados à equação da depreciação cambial sejam conjuntamente próximos o suficiente dos valores previstos pelo arcabouço teórico do GARCH-M, conforme o teste de Wald adotado para ambas as equações que descrevem o comportamento da depreciação cambial e do SDF. Observa-se ainda a insignificância individual de todos os parâmetros estimados associados à equação da SDF.



Figura 2: Séries temporais da covariância condicional, $V(1,2)$, e das variâncias condicionais da variação cambial, $V(1,1)$ e do SDF, $V(2,2)$



a: SDF obtido como combinação linear de fatores extraídos a partir da técnica de componentes principais.

b: Base de dados na extração dos componentes principais: fundos de investimento brasileiros nas categorias cambial e renda fixa, durante o período de 2000.1 a 2009.12, 120 observações mensais.

Tabela 4: Estimação via GARCH-M bivariado da versão loglinearizada da equação fundamental de apreçamento de ativos ^{a,b}

$$s_{t+1} - s_t = \alpha_1(f_{t,t+1} - s_t) + \beta_{11}\sigma_t^2(s_{t+1} - s_t) + \beta_{12}(s_{t+1} - s_t, \widehat{m}_{t+1}^* - \pi_{t+1}) + \varepsilon_{t+1}$$

$$\widehat{m}_{t+1}^* - \pi_{t+1} = \alpha_2(f_{t,t+1} - s_t + i_t^*) + \beta_{22}\sigma_t^2(\widehat{m}_{t+1}^* + \pi_{t+1}) + v_{t+1}$$

Resultados da estimação da equação de depreciação cambial					
Teste de Wald			Coeficientes		
$H_0 : \alpha_1 = 1, \beta_{11} = -\frac{1}{2}, \beta_{12} = -1$			$\widehat{\alpha}_1$	0,3768	(0,4523) [0,4047]
X_2	6,9939	[0,0721]	$\widehat{\beta}_{11}$	-0,6096	(2,2744) [0,7887]
			$\widehat{\beta}_{12}$	-0,7505	(2,3136) [0,7457]
Resultados da estimação da equação do fator estocástico de desconto					
Teste de Wald			Coeficientes		
$H_0 : \alpha_2 = -1, \beta_{22} = -\frac{1}{2}$			$\widehat{\alpha}_2$	0,3928	(0,3916) [0,3159]
X_2	2,4339	[0,2961]	$\widehat{\beta}_{22}$	-1,4186	(1,1017) [0,1978]

*: Indica a rejeição da hipótese nula do coeficiente insignificante ao nível de 5%;

** : Indica a rejeição da hipótese nula da insignificância conjunta dos coeficientes a 5%.

a: Arcabouço do GARCH-M bivariado (1,1) com especificação do tipo BEKK usado para estimação dos parâmetros, durante o período de janeiro de 2000 a dezembro de 2009, 120 observações.

b: Respectivo erro padrão reportado em parênteses e p-valor em colchetes.

4.4. Exercício de previsão *in-sample*

A Figura 3 mostra os gráficos da série temporal da depreciação cambial em log e da série do câmbio nominal em nível e as respectivas previsões obtidas através da estimação do GARCH-M proposto, considerando-se as séries de covariância e variância condicionais e as estimações dos parâmetros do arcabouço GARCH-M bivariado. É possível observar que parecem ser preservados os momentos estatísticos analisados da série observada para o câmbio nominal R\$/US\$ em relação às séries estimadas através do GARCH-M bivariado, uma vez que o comportamento observado na Figura 3.b sinaliza que os arcabouços tendem a replicar a movimentação cambial, porém, ou com uma defasagem ou acompanhando contemporaneamente, mas sugerindo desvios cambiais com menor intensidade. A correlação entre as séries é de 0,96. Em termos de métrica de performance, cuja avaliação se deu através da raiz do erro quadrado médio (RMSE) entre os valores observados e os valores previstos pelos modelos para a série do câmbio nominal spot, obtém-se um RMSE de 14,44%, inferior ao erro evidenciado pelo arcabouço de passeio aleatório, 14,72%.

A observação de algumas estatísticas básicas das séries temporais associadas aos momentos centrais das taxas de câmbio nominal ratifica a equivalência entre os comportamentos das séries observada e prevista, cuja média é de aproximadamente R\$2,25, oscilando entre R\$1,57 e R\$3,86 e desvio-padrão R\$0,53. Estes valores são bem próximos aos reportados na Tabela 1 para a série observada de câmbio.

Levando-se em consideração a depreciação cambial, apesar do modesto poder do sistema estimado em termos de antecipação dos movimentos de depreciação cambial, com se observa na Figura 3.a, em 57,5% dos meses, o arcabouço estimado sugere corretamente a direção, ou seja, o sinal da movimentação cambial, superior aos 50% esperados pelo movimento aleatório. A correlação entre a série temporal oriunda da previsão e a série observada foi de 0,22 e atendo-se a estas mesmas métricas associadas ao exercício de previsão, porém considerando a depreciação cambial em log dada por $s_{t+1} - s_t$, o modelo aqui proposto possui um erro de previsão de aproximadamente 5,27% ao mês, valor inferior ao RMSE de 5,34% observado quando do uso de passeio aleatório, um benchmark em previsão cambial.

Tanto para a previsão de depreciação, como da taxa em nível, a razão entre o RMSE das previsões do arcabouço GARCH-M e utilizando o modelo de passeio aleatório, é próxima de 98%.

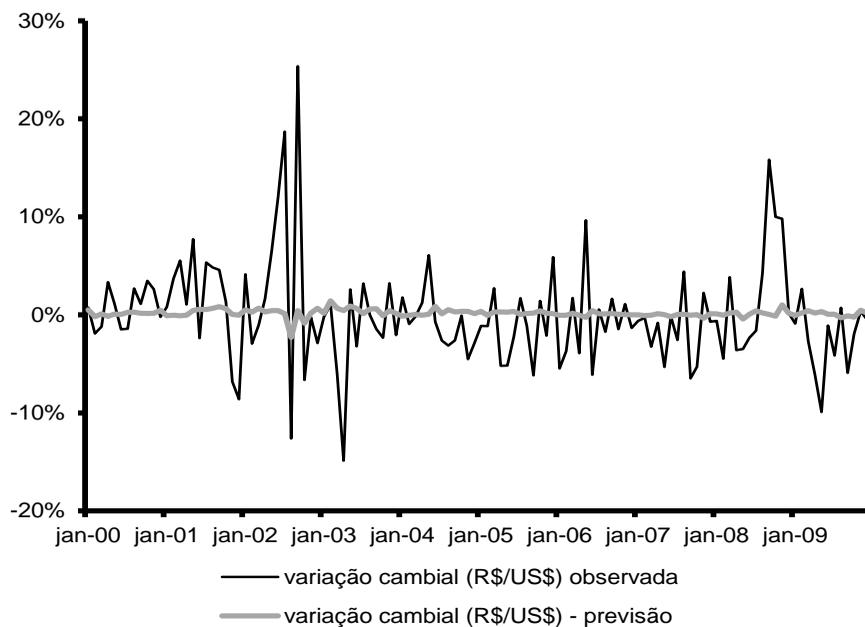
Este resultado do exercício de previsão pode ter sido influenciado pela especificação parcimoniosa do GARCH-M (1,1), de forma que as séries de variância e covariância condicionais não sejam suficientemente voláteis. Outro possível fator consiste na hipótese de lognormalidade dos processos estocásticos na equação de apreçamento fundamental. Com relação à distribuição das séries descontadas pelo SDF, além de se rejeitar a hipótese nula de lognormalidade das séries coberta e descoberta a partir dos testes paramétricos de Lilliefors, Cramer-von Mises, Watson e Anderson-Darling, o teste de ajuste de distribuição permite evidenciar que a distribuição loglogística foi a que apresentou melhor fitting aos dados observados.

Em termos comparativos, mais próximo a este exercício, por considerar o câmbio corresponde ao valor presente descontado dos fundamentos futuros da economia, De Lima (2006) usa dados mensais entre 1999 e 2005 e obtém o valor de 80,7% para a razão entre o erro quadrático médio das previsões dos modelos analisados e o erro quadrático médio das previsões utilizando o modelo de passeio aleatório.

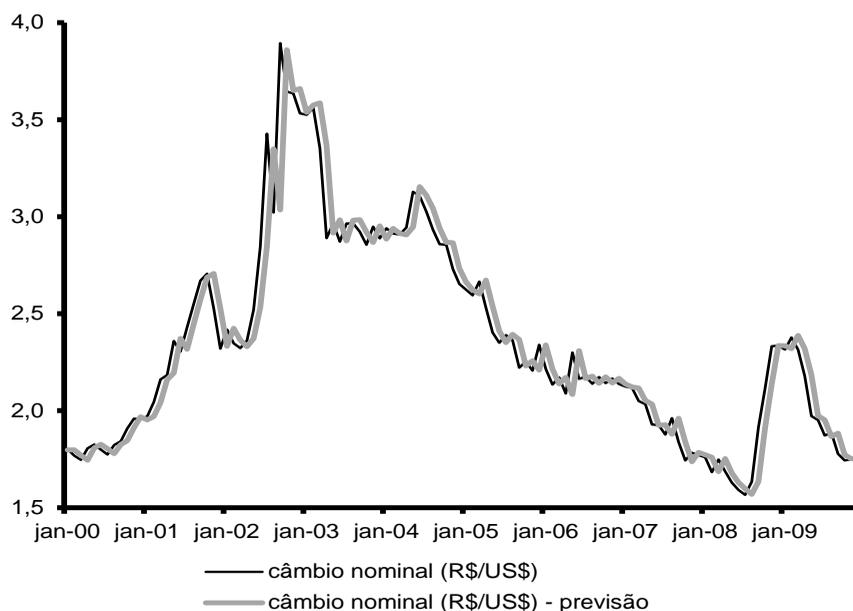
Mesmo sendo mais adequada a comparação quando há equivalência na frequência dos dados e do horizonte temporal entre este artigo e os demais estudos, ainda assim, observa-se que Coelho et alii (2008) utilizam dados diários e semanais, durante o período de 2000 a 2004, sendo obtidos valores de RMSE da ordem de 0,5% para diversos modelos autorregressivos e de redes neurais, enquanto Bernardo (2008), utilizando um modelo de correção de erros, reporta um erro quadrático médio mensal de 22,54% para a previsão das taxas de câmbio durante o período de 1995 a 2007. Margarido (2008) utiliza um modelo vetorial autoregressivo para a análise das taxas de câmbio entre 2000 e 2007, obtendo 13,98% como valor para o coeficiente de desigualdade de Theil utilizado como métrica de adequação do modelo.



3.A. Variação Cambial - Séries temporais da variação cambial em log (3.A.) e do câmbio nominal em nível (3.B.) e respectivas previsões obtidas a partir da estimação do GARCH-M bivariado (2000.1 a 2009.12, 120 observações)



3.B. Câmbio Nominal em Nível



5. CONCLUSÃO

O mercado de câmbio possui peculiaridades incomuns associadas ao seu considerável volume, sua liquidez, sua diversificada alocação dentre economias e sua complexidade em termos de interrelações financeiras e macroeconômicas que afetam e são afetadas pelo câmbio, tanto em mercados spot como futuro, nos diversos horizontes de tempo. Essas características motivam a literatura teórica e empírica a respeito da modelagem do câmbio, sendo esta a variável financeira considerada como a de maior dificuldade de previsão, e passiva de influências comportamentais e ou de irracionalidades.

Na vasta gama de arcabouços macroeconômicos, econométricos e financeiros que visam acomodar evidências empíricas desconfortáveis, este artigo se propõe a modelar a variação mensal entre as moedas real brasileiro e dólar americano, a partir de 2000, baseado na teoria fundamental de apreçamento de ativos, sendo a principal contribuição a derivação de um sistema de relações lineares caracterizado por um GARCH-M bivariado, o qual pode ser testável, uma vez extraída a série temporal para um SDF capaz de apreçar operações coberta e descoberta de aquisição de títulos do governo americano.

Os desvios aqui obtidos com ordem de grandeza de 5% e 14% para depreciação e câmbio em nível, respectivamente, parecem próximos aos evidenciados nestes outros trabalhos. O acerto superior a 50% das vezes com relação à direção da variação cambial sugere ser modesto, mas não desprezível o ganho em termos de poder de previsão em relação ao passeio aleatório, sinalizando ser esta uma vertente teórica, não *ad hoc* e baseada no apreçamento de ativos, promissora e passiva de extensões e melhorias teóricas ou empíricas. Os resultados deste artigo sugerem ainda à literatura que, ao menos para frequência mensal, não se deve desprezar a variação temporal dos momentos condicionais de segunda ordem.

BIBLIOGRAFIA

- Albuquerque, C. & Portugal, M. (2006). Testing nonlinearities between Brazilian exchange rate and inflation volatilities. *Revista Brasileira de Economia*, 60(4):325–351.
- Alexander, C. (2008). *Market risk analysis, Vol. II: Practical Financial Econometrics*. Wiley.
- Baba, Y., Engel, R., Kraft, D., & e Kroner, K. (1993). Multivariate simultaneous generalized arch. Economics working paper series, Department of Economics. University of California, San Diego.
- Bai, J. (2005). Panel data models with interactive fixed effects. Working paper, New York University.
- Baillie, R. & McMahon, P. (1994). The foreign exchange market: Theory and econometric evidence. Working paper, Cambridge University Press.
- Bera, A. & Jarque, C. (1981). An efficient large-sample test for normality of observations and regression residuals. Working Paper in Economics and Econometrics 40, Australian National University.
- Bernardo, M. (2008). Duas abordagens para a previsão da taxa de câmbio real-dólar, 1995-2008. Dissertação de mestrado, IBMEC-RJ.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
- Breeden, D. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7:265–296.
- Bueno, R. (2008). *Econometria de séries temporais*. Cengage Learning.
- Burnside, C., Eichenbaum, M., Kleshchelski, I., & Rebelo, S. (2007). The returns to currency speculation. Working paper n. 12489.



- Caldeira, A., Souza, R., & Machado, M. (2009). Identificação automática das ordens dos modelos GARCH utilizando redes neurais. *Engevista*, 11:82–89.
- Carbaugh, R. (2005). *International economics*. 10th edition, Thomson.
- Chakraborty, A. & Evans, G. (2008). Can perpetual learning explain the forward-premium puzzle? *Journal of Monetary Economics*, 55:477–490.
- Chamberlain, G. & Rothschild, M. (1983). Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large asset markets. *Econometrica*, 51(5):1281–1304.
- Chan, N. & Wei, C. (1988). Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes. *Annals of Statistics*, 16:367–401.
- Chong, C., Chun, L., & Ahmad, M. (2002). Modelling the volatility of currency exchange rate using GARCH model. Technical report, Universiti Putra Malaysia Press.
- Cochrane, J. (2000). *Asset pricing*. Working paper, Princeton University Press.
- Coelho, L., Santos, A., & Da Costa, N. (2008). Podemos prever a taxa de câmbio brasileira? Evidência empírica utilizando inteligência computacional e modelos econométricos. *Gestão da Produção*, 15:635–647.
- Connor, G. & Korajczyk, R. (1986). Performance measurement with the arbitrage pricing theory: A new framework for analysis. *Journal of Financial Economics*, 15:373–394.
- Connor, G. & Korajczyk, R. (1988). Risk and return in an equilibrium apt: Application of a new estimation methodology. *Journal of Financial Economics*, 21:255–290.
- Connor, G. & Korajczyk, R. (1993). A test for the number of factors in an approximate factor model. *Journal of Finance*, 48:1263–1291.
- Cuiabano, S. (2007). Determinação da taxa de câmbio: Aplicação do modelo de cagan para o Brasil. Dissertação de mestrado, Universidade Católica de Brasília.
- Da Costa, C., Matos, P., & Filho, J. (2010). Forward-premium puzzle: is it time to abandon the usual regression? Working paper, VI Portuguese Financial network.
- De Lima, A. (2006). Determinação da taxa de câmbio: uma aplicação de modelos econômicos à economia brasileira. Mimeo, INSPER.
- Dickey, D. & Wayne, F. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74:427–431.
- Dickey, D. & Wayne, F. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49:1057–1072.
- Dominguez, K. (1998). Central Bank intervention and exchange rate volatility. *Journal of International Money and Finance*, 17:161–190.
- Elliott, G., Rothenberg, T., & Stock, J. (1996). Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64:813–836.
- Engel, C. (1996). The forward discount anomaly and risk premium: A survey of empirical evidence. *Journal of Empirical Finance*, 3:123–191.

- Engel, C. & West, K. (2005). Exchange rates and fundamentals. *Journal of Political Economics*, 113:485–517.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica*, 50:987–1008.
- Engle, R. & Kroner, K. (1993). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11:122–150.
- Engle, R., Lilien, D., & Robins, R. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica*, 55:391–407.
- Evans, M. (1995). *Peso problems: Their theoretical and empirical implications*. in G.S. Maddala and C.R. Rao, eds., *Statistical Methods in Finance*. Amsterdam: Elsevier.
- Fama, E. (1975). Short-term interest rates as predictors of inflation. *American Economic Review*, 65:269–282.
- Ferson, W. & Foerster, S. (1994). Finite sample properties of the generalized method of moments in tests of conditional asset pricing models. *Journal of Financial Economics*, 36:29–55.
- Franco, C. & Zakoian, J. (2010). *Garch Models: Structure, statistical inference and financial applications*. Wiley.
- Goulart, C., Amaral, H., Bertucci, L., & Bressen, A. (2005). Previsão da volatilidade no mercado interbancário de câmbio. *Revista de Administração de Empresas*, 45:86–71.
- Granger, C. & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in economics. *Journal of econometrics*, 2:111–120.
- Granger, C. & Newbold, P. (1977). Forecasting economic series. *Journal of Macroeconomics*, 1:318–319.
- Hansen, L. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50:1029–1054.
- Hansen, L. & Jagannathan, R. (1991). Restrictions on the intertemporal marginal rates of substitution implied by asset returns. *Journal of Political Economy*, 99:225–262.
- Hansen, L. & Richard, S. (1987). The role of conditioning information in deducting testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. *Econometrica*, 55:587–613.
- Harrison, J. & Kreps, D. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities market. *Journal of Economic Theory*, 20:381–408.
- Hodrick, R. (1987). The empirical evidence on the efficiency of forward and futures foreign exchange markets. *Horwood Academic Publishers*, 24.
- Iuamoto, R. (2009). Modelando o prêmio de risco cambial no Brasil através de modelos GARCH-M: O mercado forward reflete a visão dos economistas? Dissertação de mestrado, EESP/FGV.
- Krugman, P. & Obstfeld, M. (2005). *Economia internacional: Teoria e prática*. 6ª edição.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54:159–178.
- Lardic, S. & Mignon, V. (2004). Recent developments on exchange rates. Working paper, Palgrave Macmillan.



- Lehmann, B. & Modest, D. (1988). The empirical foundations of the arbitrage pricing theory. *Journal of Financial Economics*, 21:213–254.
- Lintner, J. (1965). Security prices, risk and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, 20:587–615.
- Lucas, R. (1978). Asset pricing in an exchange economy. *Econometrica*, 46:1429–1445.
- Malmsten, H. & Terasvirta, T. (2004). Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility. Stockholm school of economics., SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 563.
- Margarido, M. (2008). Taxa de câmbio no Brasil : Quo vadis? *Análise e Indicadores do Agronegócio*, 3:1–6.
- Medeiros, O. (2004). Determinação da taxa de câmbio no Brasil: um enfoque econômico-financeiro. Mimeo, UNB.
- Meese, R. & Rogoff, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies: Do they fit out of sample? *Journal of International Economics*, 14:3–24.
- Morettin, P. & Toloi, C. (2004). Análise de séries temporais. Edgard Blücher.
- Morrison, D. (1990). Multivariate statistical methods. New York: McGraw-Hill.
- Mundell, R. (1963). Capital mobility and stabilization policy under fixed and flexible exchange rates. *Canadian Journal of Economics*, 29:475–485.
- Obstfeld, M. & Rogoff, K. (2000). The six major puzzles in international macroeconomics: Is there a common case? Working paper series, n. 7777, NBER.
- Perron, P. & Ng, S. (1996). Useful modifications to some unit root tests with dependent errors and their local asymptotic properties. *Review of Economic Studies*, 63:435–463.
- Phillips, P. (1987). Time series regression with a unit root. *Econometrica*, 55:277–301.
- Phillips, P. & Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75:335–346.
- Rosenberg, M. (2003). Exchange rate determination: models and strategies for exchange-rate forecasting. McGraw-hill.
- Ross, S. (1976). The arbitrage pricing theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13:341–360.
- Sarno, L. e Taylor, M. (2002). The economics of exchange rates. Press, Cambridge University.
- Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19:425–442.
- Soares, V. & Lima, A. (2010). Modelo de microestrutura ajustado: Estudo das variações das taxas de câmbio para países emergentes da Ásia e da América Latina. *Revista Eletrônica de Gestão de Negócios*, 6:i–iv.
- Tsay, R. (2001). Analysis of financial time series. New york, John Wiley and Sons.
- Vitek, F. (2005). The exchange rate forecasting puzzle. Working paper, University of British Columbia.
- Wang, J. (2008). Why are exchange rates so difficult to predict? June 2008 – FRB Dallas, Economic Letter.

- West, K. & Cho, D. (1995). The predictive ability of several models of exchange rate volatility. *Journal of Econometrics*, 69:367–391.
- Williamson, J. (2008). The Peterson institute for international economics. Working paper, Exchange rate economics.