

# Fiscalização com e sem radares móveis à luz da teoria dos jogos<sup>\*</sup>

JEFFERSON DONIZETI PEREIRA BERTOLAI<sup>†</sup>

IGOR SOARES COSTA<sup>‡</sup>

LUCIANO NAKABASHI<sup>§</sup>

## Sumário

1. Introdução .....	371
2. A interação estratégica <i>essencial</i> .....	374
3. O modelo para radares móveis .....	382
4. O modelo para radares fixos .....	389
5. A escolha entre radares fixos e móveis ..	394
6. Considerações Finais .....	403
Apêndice. Demonstrações .....	406

## Palavras-chave

radar móvel, fiscalização de trânsito, jogo de fiscalização, escolha de velocidade

## JEL Codes

C72, D78



## Resumo • Abstract

Com o objetivo de analisar os efeitos previstos pela Teoria Econômica para a proibição de fiscalização com radares móveis experimentada em 2019 no Brasil, este trabalho utiliza o ferramental usual de Teoria dos Jogos para modelar de forma parcimoniosa a interação estratégica entre a fiscalização de excesso de velocidade e os condutores de veículos. Em grandes linhas, o modelo prevê para as áreas até então fiscalizadas com radares móveis *uma intensificação da fiscalização*, com uso de radares fixos, nas localidades mais perigosas e *uma descontinuidade de fiscalização* naquelas mais seguras.

## 1. Introdução

A interrupção de fiscalização de excesso de velocidade por meio de radares móveis é um tema que com frequência é defendido no Brasil por representantes legislativos e por autoridades do Poder Executivo (ver, por exemplo, Lobel & Santos, 2018 e Bem Paraná, 2019). Uma das características desta modalidade de fiscalização mais criticadas pelos agentes políticos é a ausência de aviso prévio sobre a presença do radar móvel em determinada localidade (Estadão Conteúdo, 2019). Considerando

<sup>\*</sup>Uma versão anterior deste artigo circulou sob o título "A proibição de radares móveis: eliminando o efeito surpresa da fiscalização". Agradecemos as sugestões de melhoria para o manuscrito apresentadas pelo(a) parecerista. Jefferson Bertolai e Igor Soares agradecem o apoio institucional da USP e da FEARP/USP ao Laboratório de Economia, Matemática de Computação (LEMC-FEARP/USP), laboratório no qual grande parte deste trabalho foi desenvolvido.

<sup>†</sup>Universidade de São Paulo (USP), Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto (FEARP), Departamento de Economia. Avenida Bandeirantes, 3900, Monte Alegre, Ribeirão Preto, SP, CEP 14040-905, Brasil.  0000-0002-2535-920X

<sup>‡</sup>USP/FEARP.  0000-0003-1170-7290

<sup>§</sup>USP/FEARP.  0000-0002-4937-5669

 jbertolai@fearp.usp.br  igor.soares.costa@usp.br  nakabashi@fearp.usp.br

que tais declarações refletem uma resistência de parte do eleitorado à “fiscalização de trânsito sem prévia notificação” e que os limites de velocidade existem para reduzir o risco de acidentes causados por excesso de velocidade, a resistência dos eleitores à fiscalização por radar móvel é no mínimo intrigante.

Possivelmente motivado em atender o interesse dessa parte do eleitorado, o Governo Federal do Brasil suspendeu em agosto de 2019 a utilização de radares *móveis* na fiscalização de excesso de velocidade em todas as rodovias federais, mantendo-se permitida a fiscalização por meio de radares somente com aparelhos fixos (montados sobre pórticos ou postes).<sup>1</sup> Como justificativa para tal suspensão, o despacho da Presidência da República estabelece que “a suspensão é para evitar o desvirtuamento do caráter pedagógico e a utilização meramente arrecadatória dos instrumentos e equipamentos medidores de velocidade.”

Com o objetivo de analisar os efeitos previstos pela Teoria Econômica para a proibição de fiscalização com radares *móveis*, este trabalho utiliza o ferramental usual de Teoria dos Jogos para modelar de forma parcimoniosa a interação estratégica entre a fiscalização de excesso de velocidade e os condutores de veículos.<sup>2</sup> O modelo assim construído é utilizado para avaliar o efeito de proibir fiscalizações por meio de radares *móveis*, mantendo-se a opção de fiscalização por radares fixos.

O modelo proposto é uma extensão natural do modelo de Bjørnskau e Elvik (1992) para o caso em que a fiscalização pode ser executada também por meio de radares fixos e no qual há mais de uma localidade na rodovia para ser fiscalizada. A existência de mais de uma localidade permite estudar a situação em que a fiscalização pode ser organizada em três formatos: ela pode ser estruturada somente com radares fixos, ou somente com radares *móveis* ou usar uma combinação de radares fixos com radares *móveis*.

A diferença *estratégica* essencial entre os dois tipos de fiscalização considerados (por meio de radares *móveis* e por meio radares fixos) reside no fato de o posicionamento dos radares fixos na rodovia ser previamente conhecido pelos condutores. A autoridade de trânsito é obrigada a sinalizar a presença do radar pouco antes da localidade na qual ele foi instalado e, após descobrir o posicionamento do radar em período anterior, os condutores sabem que sua posição não mudou desde então. Na

---

<sup>1</sup>Ver Sorano e Néri (2019) e despacho da Presidência da República publicado no Diário Oficial da União de 15/08/2019 (DOU, 2019). A medida se aplica somente aos radares usualmente conhecidos como “*móveis*”: radares instalados em veículo parado ou sobre suporte (tecnicamente denominado *radar estático*), instalados em veículo em movimento (tecnicamente denominado *radar móvel*) e direcionados manualmente para os veículos (tecnicamente denominado *radar portátil*). Segundo DOU (2019), a medida seguirá em vigor até que o Ministério da Infraestrutura conclua a reavaliação da regulamentação dos procedimentos de fiscalização eletrônica de velocidade em vias públicas e não há prazo definido para a volta da fiscalização. Conforme noticiado recentemente por Richter (2019), no entanto, uma decisão judicial de 11 de dezembro de 2019 ordena o reestabelecimento da fiscalização com radares deste tipo.

<sup>2</sup>Bjørnskau e Elvik (1992) e Elvik (2014) discutem a atratividade superior da abordagem de Teoria dos Jogos para se estudar o comportamento dos condutores.

fiscalização por radar móvel, por outro lado, não há obrigatoriedade de sinalização prévia e o posicionamento do radar pode ser mais facilmente mudado de um período para outro. Dessa forma, o *jogo estático* proposto por Bjørnskau e Elvik (1992) para modelar a interação entre a fiscalização e os condutores é adequado para estudar a situação em que a fiscalização é possível somente com radares móveis. A adaptação deste modelo para a possibilidade de fiscalização com radares fixos requer uma dimensão dinâmica que reflita a informação possuída pelos condutores no momento de sua decisão. O modelo resultante é o jogo dinâmico com informação completa e imperfeita apresentado na Figura 4 em sua forma extensiva.

A relevância para o contexto brasileiro do assunto aqui tratado justifica uma análise cuidadosa sobre potenciais efeitos das políticas públicas. Conforme destacado por Bacchieri e Barros (2011), o trânsito no Brasil é considerado um dos mais violentos do mundo.<sup>3</sup> Citando estimativas do IPEA, os autores chamam a atenção para o fato de que o custo dos Acidentes de Transporte Terrestres (ATT's) são significativos: os custos totais em 2005 são estimados em torno de R\$28 bilhões, sendo R\$6,5 bilhões estimados para os ATT's ocorridos em rodovias federais, R\$ 14,1 bilhões nas rodovias estaduais e de R\$ 1,4 bilhão nas rodovias municipais.

A relação da velocidade dos veículos com a probabilidade e severidade dos ATT's é bastante bem documentada por vários trabalhos empíricos.<sup>4</sup> Alguns estudos identificam uma correlação positiva e significativa entre o nível de velocidade e a probabilidade e severidade de ATT's, enquanto outros encontram maior relevância da variabilidade de velocidade entre veículos na explicação dos acidentes. Neste sentido, as regras de limite de velocidade são importantes instrumentos para combater a insegurança no trânsito. Elas cumprem o papel de desincentivar níveis de velocidade muito elevados e podem agir como um mecanismo de coordenação que induz a uniformização da velocidade entre condutores.<sup>5</sup>

Os radares utilizados para aferição de velocidade de veículos são instrumentos úteis para promover o cumprimento das regras de limite de velocidade. Em uma revisão de 35 estudos para países desenvolvidos,<sup>6</sup> Wilson et al. (2010) encontram que todos eles indicam redução da velocidade nas áreas próximas do radar: queda entre 8% e 70% no número de condutores acima do limite de velocidade, sendo que a maior parte dos estudos mostrou uma queda entre 10% e 35%. Dentre tais estudos,

---

<sup>3</sup>Moreira, Ribeiro, Motta, e Motta (2018) cita que 733.120 pessoas morreram no Brasil em decorrência de Acidentes de Trânsito Terrestres (ATT) entre 1996 e 2015, cerca de 3,5% do total de mortes do período. Destaca ainda que 2.272.068 pessoas foram internadas por se envolverem ATT's no mesmo período. Dentre estes, os motociclistas são as vítimas com maior tempo de permanência hospitalar, conforme destacado por Andrade e Jorge (2017).

<sup>4</sup>Ver Zlatoper (1991), Aarts e Van Schagen (2006), Wilson, Willis, Hendrikz, Le Brocque, e Bellamy (2010), Theofilatos e Yannis (2014), e Fowles e Loeb (1989).

<sup>5</sup>Ver Lave (1985), Ryeng (2012), Connolly e Åberg (1993), e Elvik (2014).

<sup>6</sup>Com dados de velocidade em rodovias antes e após a introdução de radares e usando como controle medidas de velocidade em rodovias similares no mesmo período.

28 analisaram o efeito da introdução dos radares sobre os acidentes e identificaram queda entre 8% e 49%, com a maior parte deles mostrando redução entre 14% e 25%. Nesta mesma linha, Teed, Lund, e Knoblauch (1993) apontam que o uso de radares móveis pela polícia reduz de forma considerável a velocidade dos condutores, embora tal efeito seja relevante somente nas proximidades da localização do radar (*distance-halo effect*).<sup>7</sup> Estes dois efeitos são identificados no contexto brasileiro por Yamada (2005), o qual conclui que o efeito na redução da velocidade é localizado em um pequeno segmento imediatamente anterior a posição do radar. Vaa (1997), por sua vez, identifica em rodovias da Noruega uma redução na velocidade dos condutores causada pela fiscalização via radares, mas destaca que tal efeito se dissipou após o período de maior fiscalização (*time-halo effect*).

Em resumo, os ATT's envolvem custos sociais significativos e a fiscalização de velocidade por meio de radares é um instrumento bastante relevante para reduzir tais custos (uma vez que promove regras de limite de velocidade), embora seu efeito se concentre nas proximidades geográfica e temporal de sua atuação.

Tendo em vista a relativa complexidade do modelo aqui desenvolvido (ver Figura 4) e com o objetivo de manter o artigo acessível para um público mais abrangente, a apresentação dos conceitos, objetos e linguagem utilizados na análise é dividida em quatro passos, correspondentes às seções 2, 3, 4 e 5. O modelo de Bjørnskau e Elvik (1992) é apresentado na seção 2 como forma de familiarizar o leitor com o modelo existente na literatura. Em seguida, este modelo é generalizado na seção 3 para o caso em que há duas localidades nas quais existe limite de velocidade a ser verificado com o uso de radares. A seção 4 apresenta uma adaptação do modelo da seção 3 para o caso em que a fiscalização é executada somente com radares fixos. Finalmente, a seção 5 se beneficia da exposição das seções 2, 3 e 4 para apresentar a versão completa do modelo, na qual existe as três opções de organização da fiscalização: somente com radares fixos, somente com radares móveis ou combinar o uso de radares fixos com radares móveis.

## 2. A interação estratégica essencial

Considere um jogo entre dois jogadores: jogador 0 e jogador 1. O jogador 1 é denominado *Condutor* e precisa decidir se excede ou não a máxima velocidade permitida em uma determinada rodovia. O jogador 0 é denominado *Fiscal* e é

---

<sup>7</sup>No estudo realizado pelos autores na Interstate 70 (no trecho rural do estado de Maryland, EUA), foi encontrado uma elevação na velocidade média dos motoristas quando não há radar ativo. No entanto, o efeito é apenas local. Nas proximidades da localização do radar, houve redução de 42% para 28% no número de motoristas com velocidade 10 milhas por hora acima do limite máximo (55 milhas por hora). Após 1 milha, 38% dos motoristas já desenvolviam velocidade acima de 65 milhas por hora, com a porcentagem aumentando para 40% após duas a cinco milhas da posição do radar.

responsável por fiscalizar o cumprimento da regra que estabelece o limite máximo de velocidade nesta rodovia.

Suponha, por simplicidade, que o veículo utilizado pelo condutor é capaz de desenvolver somente dois níveis de velocidade: um nível baixo, denotado por  $v_b$ , e um nível alto, denotado por  $v_a$  e tal que  $v_a > v_b$ . Suponha, ainda por simplicidade, que há somente um local na rodovia em que existe um limite máximo para a velocidade dos veículos: denominado local 1 e denotado por  $l_1$ . O limite máximo de velocidade nesta localidade é dado por  $\bar{v}$  tal que  $v_b < \bar{v} < v_a$ .

A verificação do cumprimento da regra (*manter velocidade abaixo de  $\bar{v}$  na localização  $l_1$* ) é efetuada por meio de um aparelho de aferição de velocidade, doravante denominado *radar*. Para aferição da velocidade, o radar precisa ser posicionado na localidade  $l_1$  e precisa ser operado presencialmente por uma pessoa.

O Condutor do veículo precisa decidir sob qual velocidade transitará com seu veículo pela localidade  $l_1$ . A atratividade da velocidade alta ( $v_a$ ) reside no fato de que ela permite chegar mais cedo ao destino. A atratividade da velocidade baixa ( $v_b$ ) decorre do fato de esta respeitar o limite máximo  $\bar{v}$  e, portanto, evitar uma eventual multa.

O Fiscal, por outro lado, precisa decidir onde estará localizado no momento de passagem do condutor. A atratividade de se posicionar em  $l_1$  para operar o radar reside no fato de que o fiscal possui autorização para cobrar uma *multa* (confiscar um montante de recursos) do condutor quando este é identificado violando o limite  $\bar{v}$ . Alternativamente, o Fiscal tem a opção de se posicionar em outra localidade, denominada  $l_0$ , desempenhando uma atividade (produtiva ou de lazer) distinta da verificação de cumprimento da regra. O benefício desta atividade alternativa (produção ou lazer) é o *custo de oportunidade* incorrido pelo fiscal ao se posicionar em  $l_1$ .

**Exemplo 1.** A matriz a seguir ilustra de maneira bastante conveniente (na *forma normal*) a situação estratégica na qual estão envolvidos o Condutor e o Fiscal. Cada linha da matriz corresponde a uma ação do Fiscal e cada coluna corresponde a uma ação do Condutor. Dessa forma, por exemplo, a célula definida pela segunda linha da primeira coluna representa a situação em que o Condutor decidiu passar pela localidade  $l_1$  sob uma velocidade baixa ( $v_b$ ) e o Fiscal decidiu se posicionar na localidade de operação do radar ( $l_1$ ).

$$\begin{array}{c}
 \text{Condutor (jogador 1)} \\
 \begin{array}{cc}
 v_b & v_a \\
 \hline
 \text{Fiscal (jogador 0)} \begin{array}{l} l_0 \\ l_1 \end{array} & \begin{array}{cc} 0, 0 & -1, 1 \\ -1, 0 & 0, -1 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{1}$$

Cada célula da matriz apresenta um par ordenado  $(x, y)$  de números  $x$  e  $y$  que denotam o nível de satisfação do Fiscal e do Condutor, respectivamente, na com-

binacão de ações correspondente a referida célula. Assim, o par ordenado  $(-1, 0)$  apresentado na segunda linha da primeira coluna da matriz revela que o nível de satisfação (*payoff*) do Condutor é igual a 0 quando ele passa pela localidade  $l_1$  em velocidade baixa e o Fiscal está presente para aferir sua velocidade. Revela ainda que o *payoff* do Fiscal nesta situação é  $-1$ , consequência do custo de oportunidade da fiscalização.

Note que o exemplo apresentado é um caso particular da situação descrita acima, embora já seja rico o suficiente para captar a essência da interação estratégica entre o Fiscal e o Condutor. O Condutor prefere exceder o limite  $\bar{v}$ , a fim de chegar ao seu destino em menos tempo, quando o Fiscal não está presente em  $l_1$  para verificar sua velocidade: seu *payoff* aumenta em uma unidade ao trocar  $v_b$  por  $v_a$  neste caso. Por outro lado, o Condutor prefere não exceder  $\bar{v}$  quando o Fiscal está presente em  $l_1$ . Ao trocar  $v_b$  por  $v_a$  neste caso, seu *payoff* é reduzido em uma unidade: o condutor chegaria mais cedo ao destino (o que gera um ganho unitário de *payoff*), mas teria que arcar com o custo monetário da multa por excesso de velocidade (o que reduz seu *payoff* em 2 unidades, no exemplo apresentado). Similarmente, o Fiscal prefere não se posicionar em  $l_1$  quando o Condutor está respeitando o limite  $\bar{v}$ : seu *payoff* aumenta em uma unidade quando ele troca a localidade  $l_1$  pela localidade  $l_0$ , uma vez que isto evita o custo de oportunidade de se posicionar em  $l_1$ . Quando o Condutor excede o limite de velocidade, no entanto, o Fiscal prefere se posicionar em  $l_1$ : o Fiscal recebe uma unidade adicional de *payoff* ao trocar  $l_0$  por  $l_1$  nesta situação.

## 2.1 Previsões de comportamento

Como cada um dos jogadores (Fiscal e Condutor) possui duas ações possíveis, então há 4 possibilidades de *resultado* no jogo descrito acima:  $(l_0, v_b)$ ,  $(l_0, v_a)$ ,  $(l_1, v_b)$  e  $(l_1, v_a)$ . Um dado resultado é considerado uma *boa previsão* sobre o comportamento dos jogadores se nenhum dos jogadores possui interesse em se comportar de maneira distinta daquela prevista no referido resultado. Por exemplo, o resultado  $(l_0, v_b)$  não pode ser considerado uma boa previsão para o comportamento dos jogadores, pois o Condutor possui interesse em exceder o limite de velocidade quando Fiscal está em  $l_0$ . Usando tal definição de boa previsão, nenhum dos quatro resultados do jogo acima pode ser considerado uma boa previsão para o comportamento dos jogadores, conforme estabelecido pelo Lema 1 a seguir.

**Lema 1.** *Cada um dos possíveis resultados do jogo (1) não pode ser considerado uma boa previsão para o comportamento dos jogadores.*

*Demonstração.* A razão de  $(l_0, v_b)$  não poder ser considerado uma boa previsão já foi exposta no texto. O Condutor possui interesse em respeitar  $\bar{v}$  quando Fiscal está em  $l_1$  e, portanto,  $(l_1, v_a)$  não é uma boa previsão. O Fiscal possui interesse em se

posicionar em  $l_1$  quando o Condutor excede  $\bar{v}$ . Logo,  $(l_0, v_a)$  não é uma boa previsão. O Fiscal possui interesse em se posicionar em  $l_0$  quando o Condutor respeita  $\bar{v}$ . Com isso,  $(l_1, v_b)$  não é uma boa previsão.  $\square$

Em situações nas quais nenhum resultado do jogo é uma boa previsão sobre o comportamento dos jogadores (como é o caso aqui considerado de interação estratégica entre o Condutor e o Fiscal), a previsão de comportamento é feita em termos probabilísticos. Um exemplo de *comportamento probabilístico*<sup>8</sup> para o Condutor seria respeitar  $\bar{v}$  com probabilidade  $3/4$  e excedê-lo com probabilidade  $1/4$ . Tal comportamento é usualmente denotado pela distribuição de probabilidade  $(3/4, 1/4)$ , em que a ordem de apresentação das probabilidades é consistente com a ordem na qual as ações foram apresentadas na matriz (1): a primeira entrada do vetor  $(3/4, 1/4)$  denota a probabilidade de  $v_b$  e a segunda entrada a probabilidade de  $v_a$ . Como exemplo de comportamento probabilístico para o Fiscal, este poderia se localizar em  $l_0$  com probabilidade  $1/3$  e em  $l_1$  com probabilidade  $2/3$ , comportamento este que recebe a representação vetorial  $(1/3, 2/3)$ . Em conjunto, estas duas previsões sobre comportamentos individuais geram a seguinte previsão probabilística sobre o que acontecerá no jogo

$$(\sigma_0, \sigma_1) = [(1/3, 2/3), (3/4, 1/4)]. \quad (2)$$

Nesta previsão, o resultado  $(l_0, v_b)$  ocorre com probabilidade  $(1/3)(3/4) = 1/4$  e  $(l_1, v_b)$  ocorre com probabilidade  $(2/3)(3/4) = 1/2$ . Já  $(l_0, v_a)$  ocorre com probabilidade  $(1/3)(1/4) = 1/12$  e  $(l_1, v_a)$  com probabilidade  $(2/3)(1/4) = 2/12$ .

A medida usual para descrever o nível de satisfação dos jogadores quando algum deles adota o comportamento probabilístico é dada pelo *payoff esperado*, o qual é calculado segundo as distribuições de probabilidade que descrevem os comportamentos. Como ilustração desta medida, o payoff esperado do Condutor sob a previsão (2) é dado por

$$\begin{aligned} \sigma_0(l_0) \left[ \sigma_1(v_b)\pi_1(l_0, v_b) + \sigma_1(v_a)\pi_1(l_0, v_a) \right] + \sigma_0(l_1) \left[ \sigma_1(v_b)\pi_1(l_1, v_b) \right. \\ \left. + \sigma_1(v_a)\pi_1(l_1, v_a) \right] &= \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{3}{4}(0) + \frac{1}{4}(-1) \right) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{2}{12} = -\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

em que  $\pi_k(l_i, v_j)$  denota o payoff obtido pelo jogador  $k \in \{0, 1\}$  sob o resultado  $(l_i, v_j)$ , conforme apresentado na matriz (1). Para  $i \in \{0, 1\}$ , a probabilidade de o jogador 0 escolher  $l_i$  é denotada por  $\sigma_0(l_i)$ . Para  $j \in \{a, b\}$ , a probabilidade de o

<sup>8</sup>Para interpretações alternativas sobre previsão de comportamento em termos probabilísticos, ver o trabalho seminal de Harsanyi (1967, 1968a, 1968b) e o livro-texto Gibbons (1992).

jogador 1 escolher  $v_j$  é denotada por  $\sigma_1(v_j)$ . De forma mais geral, o payoff esperado do jogador  $k \in \{0, 1\}$  sob a previsão  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$  é dado por  $U_k(\sigma_0, \sigma_1)$  tal que

$$U_k(\sigma_0, \sigma_1) = \sum_{i=0}^1 \sigma_0(l_i) \left[ \sum_{j=a}^b \sigma_1(v_j) \pi_k(l_i, v_j) \right], \quad (3)$$

em que o operador  $\Sigma$  é usado para denotar o somatório

$$x_0 + x_1 = \sum_{j=0}^1 x_j$$

para uma dada sequência de números  $x_0$  e  $x_1$ . Analogamente,

$$y_a + y_b = \sum_{j=a}^b y_j$$

para uma dada sequência de números  $y_a$  e  $y_b$ .

Uma previsão probabilística  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$  é denominada uma *boa previsão* sobre o comportamento dos jogadores se nenhum dos jogadores possui interesse em se comportar (*probabilisticamente*) de maneira distinta daquela prevista por  $\sigma$ . Especificamente,  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$  é uma boa previsão se cada jogador  $i \in \{0, 1\}$  não é capaz de elevar seu nível esperado de satisfação  $U_i(\sigma_0, \sigma_1)$ , conforme definido em (3), modificando seu comportamento probabilístico  $\sigma_i$ . Como ilustração deste conceito, a previsão  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1) = [(1/3, 2/3), (3/4, 1/4)]$  não pode ser considerada uma boa previsão, pois o Condutor é capaz de elevar seu nível de satisfação  $U_1(\sigma)$  de  $-1/12$  para zero trocando seu comportamento  $\sigma_1 = (3/4, 1/4)$  por  $\sigma'_1 = (1, 0)$ .

Como todo jogador é capaz de modificar seu comportamento unilateralmente — ou seja, sem que os demais jogadores modifiquem seu comportamento —, então  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$  é uma boa previsão *somente se* cada jogador não é capaz de melhorar sua situação modificando unilateralmente seu comportamento. Tendo em vista que previsões que não possuem desvios unilaterais atrativos são usualmente denominadas como *Equilíbrio de Nash*,<sup>9</sup> esta propriedade estabelece que toda boa previsão é necessariamente um Equilíbrio de Nash.

A fim de tornar precisa a definição de Equilíbrio de Nash, alguma notação matemática adicional é necessária. Defina  $A_1 = \{v_b, v_a\}$  como o conjunto de ações possíveis para o jogador 1 (Condutor) e  $A_0 = \{l_0, l_1\}$  como o conjunto de ações possíveis do jogador 0 (Fiscal). Para cada  $i \in \{0, 1\}$ , seja

$$\Delta(A_i) = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y = 1\}$$

o conjunto de distribuições de probabilidade sobre  $A_i$ . Por exemplo,  $(x, y) \in \Delta(A_0)$  significa que o jogador 0 escolhe  $l_0$  com probabilidade  $x \geq 0$  e escolhe  $l_1$  com probabilidade  $y = 1 - x \geq 0$ .

<sup>9</sup>Ver o artigo seminal de Nash (1950) e o livro-texto Gibbons (1992).

Seja  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  tal que  $\sigma_i^* \in \Delta(A_i)$  e descreve o comportamento probabilístico previsto por  $\sigma^*$  para o jogador  $i \in \{0, 1\}$ . O jogador 0 não possui *desvio unilateral atrativo* a partir de  $\sigma^*$  se, e somente se,  $\sigma_0^*$  é *melhor resposta* do jogador 0 ao comportamento previsto por  $\sigma^*$  para os demais jogadores: neste caso,  $\sigma_1^*$ . Ou seja,

$$\sigma_0^* \in \arg \max_{\sigma_0 \in \Delta(A_0)} U_0(\sigma_0, \sigma_1^*), \quad (4)$$

em que o  $V = \max_{x \in X} f(x)$  denota o valor máximo que uma dada função  $f(\cdot)$  atinge no conjunto  $X$  e  $B = \arg \max_{x \in X} f(x)$  denota o conjunto de pontos de  $X$  nos quais  $f(\cdot)$  atinge o valor  $V$ . O conjunto apresentado em (4) é o conjunto de melhores respostas do jogador 0 ao comportamento  $\sigma_1^*$  do jogador 1. De forma análoga, o jogador 1 não possui desvio unilateral atrativo a partir de  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  se, e somente se,

$$\sigma_1^* \in \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(A_1)} U_1(\sigma_0^*, \sigma_1). \quad (5)$$

Conclui-se disto que  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  é Equilíbrio de Nash se, e somente se,  $\sigma^*$  satisfaz (4) e (5). Esta caracterização do Equilíbrio de Nash permite obter a *única* boa previsão para o comportamento dos jogadores no jogo (1), conforme estabelecido pelo Lema 2 a seguir.

**Lema 2.** *A única boa previsão (o único Equilíbrio de Nash)  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  para o jogo entre o Fiscal e o Condutor apresentado em (1) é dado por  $\sigma^* = [(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]$ .*

*Demonstração.* Por conveniência, denote  $B_0(\sigma_1) = \arg \max_{\sigma_0 \in \Delta(A_0)} U_0(\sigma_0, \sigma_1)$  e  $B_1(\sigma_0) = \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(A_1)} U_1(\sigma_0, \sigma_1)$ . Usando (3), observe que

$$\begin{aligned} U_0(\sigma_0, \sigma_1) &= \sigma_0(l_0) [\sigma_1(v_b)0 + \sigma_1(v_a)(-1)] + \sigma_0(l_1) [\sigma_1(v_b)(-1) + \sigma_1(v_a)0] \\ &= -\sigma_0(l_0)\sigma_1(v_a) - \sigma_0(l_1)\sigma_1(v_b) = -\sigma_1(v_a) + \sigma_0(l_1)[\sigma_1(v_a) - \sigma_1(v_b)] \\ &= \sigma_0(l_1) [2\sigma_1(v_a) - 1] - \sigma_1(v_a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_0, \sigma_1) &= \sigma_1(v_b) [\sigma_0(l_0)0 + \sigma_0(l_1)0] + \sigma_1(v_a) [\sigma_0(l_0)1 + \sigma_0(l_1)(-1)] \\ &= \sigma_1(v_a) [\sigma_0(l_0) - \sigma_0(l_1)] = \sigma_1(v_a) [1 - 2\sigma_0(l_1)], \end{aligned}$$

em que se usou os fatos  $\sigma_0(l_0) + \sigma_0(l_1) = 1$  e  $\sigma_1(v_b) + \sigma_1(v_a) = 1$ , decorrentes de  $\sigma_0 \in \Delta(A_0)$  e  $\sigma_1 \in \Delta(A_1)$ . Assim,  $U_0(\sigma_0, \sigma_1)$  pode ser escrita como uma função linear em  $\sigma_0(l_1)$  quando  $\sigma_1$  é mantida fixa. A monotonicidade desta função linear depende da magnitude de  $\sigma_1(v_a)$ : ela é estritamente decrescente quando  $\sigma_1(v_a) < 1/2$ ; estritamente crescente se  $\sigma_1(v_a) > 1/2$ ; e constante se  $\sigma_1(v_a) = 1/2$ . Com isso,  $U_0(\sigma_0, \sigma_1)$  atinge valor máximo quando  $\sigma_1(v_a) < 1/2$  somente se  $\sigma_0(l_1) = 0$ . Similarmente,  $U_0(\sigma_0, \sigma_1)$  atinge valor máximo quando  $\sigma_1(v_a) > 1/2$  somente se  $\sigma_0(l_1) = 1$ . Quando  $\sigma_1(v_a) = 1/2$ , todo valor  $\sigma_0(l_1) \in [0, 1]$  maximiza  $U_0(\sigma_0, \sigma_1)$ . Tal

argumento justifica o resultado (6) a seguir:

$$B_0(\sigma_1) = \arg \max_{\sigma_0 \in \Delta(A_0)} (\sigma_0(l_1) [2\sigma_1(v_a) - 1] - \sigma_1(v_a)) = \begin{cases} \{(1, 0)\}, & \text{se } \sigma_1(v_a) < 1/2, \\ \Delta(A_0), & \text{se } \sigma_1(v_a) = 1/2, \\ \{(0, 1)\}, & \text{se } \sigma_1(v_a) > 1/2; \end{cases} \quad (6)$$

$$B_1(\sigma_0) = \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(A_1)} (\sigma_1(v_a) [1 - 2\sigma_0(l_1)]) = \begin{cases} \{(0, 1)\}, & \text{se } \sigma_0(l_1) < 1/2, \\ \Delta(A_1), & \text{se } \sigma_0(l_1) = 1/2, \\ \{(1, 0)\}, & \text{se } \sigma_0(l_1) > 1/2. \end{cases} \quad (7)$$

Analogamente ao argumento acima,  $U_1(\sigma_0, \sigma_1)$  pode ser escrita como uma função linear em  $\sigma_1(v_a)$  quando  $\sigma_0$  é mantida fixa e sua maximização para cada valor de  $\sigma_0$  resulta em (7).

Note que  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(A_0)$  e  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(A_1)$  quando  $\sigma_0^*(l_1) = \sigma_1^*(v_a) = 1/2$ . Assim (4) e (5) são trivialmente satisfeitas por  $\sigma^* = [(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]$ . Para ver que somente  $[(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]$  é Equilíbrio de Nash, suponha que  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_1)$  é uma previsão probabilística para o jogo (1) que satisfaz (4) e (5) simultaneamente.

Observe que  $\sigma_0^*(l_1) < 1/2$  gera uma impossibilidade e, portanto, não pode ser verdadeira. De fato,  $\sigma_0^*(l_1) < 1/2$ , (5) e (7) implicam que  $\sigma_1^* = (0, 1)$  e, portanto, que  $\sigma_1^*(v_a) = 1 > 1/2$ . Usando (4), (6) e tal resultado, obtém-se  $\sigma_0^* = (0, 1)$  e, portanto, a impossibilidade  $\sigma_0^*(l_1) = 1 > 1/2 > \sigma_0^*(l_1)$ . Conclui-se desta contradição que  $\sigma_0^*(l_1) \geq 1/2$ . De maneira análoga,  $\sigma_0^*(l_1) > 1/2$  gera uma impossibilidade e, portanto, também não pode ser verdadeira. De fato,  $\sigma_0^*(l_1) > 1/2$ , (5) e (7) implicam que  $\sigma_1^* = (1, 0)$  e, portanto, que  $\sigma_1^*(v_a) = 0 < 1/2$ . Usando (4), (6) e tal resultado, obtém-se  $\sigma_0^* = (1, 0)$  e, portanto, a impossibilidade  $\sigma_0^*(l_1) = 0 < 1/2 < \sigma_0^*(l_1)$ . Conclui-se desta contradição que  $\sigma_0^*(l_1) \leq 1/2$ . Como  $\sigma_0^*(l_1) \geq 1/2$  e  $\sigma_0^*(l_1) \leq 1/2$ , então  $\sigma_0^*(l_1) = 1/2$  e  $\sigma_0^* = (1/2, 1/2)$ .

Tendo em vista que  $\sigma_0^* = (1/2, 1/2)$ , o único caso em (6) consistente com  $\sigma_0^* = (1/2, 1/2) \in B_0(\sigma_1^*)$  é o caso em que  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(A_0)$ . Logo,  $\sigma_1^*(v_a) = 1/2$  e  $\sigma_1^* = (1/2, 1/2)$ .  $\square$

O resultado de unicidade apresentado no Lema 2 não depende dos valores particulares atribuídos aos payoffs dos jogadores em (1). Basta que tais valores reflitam o padrão de atratividade (de cada resultado possível para cada jogador) descrito no início desta seção. A fim de verificar tal afirmação, considere a seguinte generalização do nível de satisfação dos jogadores.

Suponha que o Fiscal se posicionou em  $n \in \{0, 1\}$  localidades para verificar a velocidade do Condutor e que tal posicionamento resultou em  $m \in \{0, 1\}$  autuações (multas) ao Condutor. Se o Condutor excedeu a velocidade em  $e \in \{0, 1\}$  localidades,

então a satisfação do Fiscal e do Condutor são definidas, respectivamente, por

$$u_0(n, m, e) = (\alpha + \beta)m - \alpha n - \gamma e \tag{8}$$

$$u_1(m, e) = \mu e - (\mu + \eta)m \tag{9}$$

em que  $\beta > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $\mu > 0$  e  $\gamma > 0$ . A condição  $\gamma > 0$  estabelece que o Fiscal fica menos satisfeito quando o Condutor excede o limite de velocidade. A condição  $\alpha > 0$  reflete o fato de a fiscalização possuir um custo: cada fiscalização diminui a satisfação do Fiscal em  $\alpha$  unidades. Ou seja,  $\alpha$  é o custo de oportunidade de cada fiscalização. A hipótese  $\beta > 0$  estabelece que a satisfação do Fiscal em autuar o Condutor quando este excede  $\bar{v}$  é estritamente maior do que o custo de oportunidade da fiscalização requerida para tal autuação (ou seja,  $\alpha + \beta > \alpha$ ). A condição  $\mu > 0$  reflete o fato de que exceder  $\bar{v}$  aumenta a satisfação do Condutor, uma vez que permite chegar ao seu destino em menos tempo. A hipótese  $\eta > 0$  estabelece que a satisfação do Condutor em exceder  $\bar{v}$  para chegar ao destino mais cedo é estritamente menor do que a punição associada a autuação por limite de velocidade (ou seja,  $\mu < \mu + \eta$ ). A ausência de  $n$  em (9) estabelece que o Condutor não se importa com o posicionamento do Fiscal quando sua velocidade não excede  $\bar{v}$ .

O padrão de atratividade formalizado por (8) e (9) resulta na generalização do jogo entre o Fiscal e o Condutor apresentada em (10):

		Condutor (jogador 1)		
		$v_b$	$v_a$	
Fiscal (jogador 0)	$l_0$	$u_0(0, 0, 0), u_1(0, 0)$	$u_0(0, 0, 1), u_1(0, 1)$	(10)
	$l_1$	$u_0(1, 0, 0), u_1(0, 0)$	$u_0(1, 1, 1), u_1(1, 1)$	

Note que o Condutor obtém nenhum excesso de velocidade ( $e = 0$ ) e, portanto, nenhuma multa ( $m = 0$ ) ao escolher  $v_b$ . Logo, sua satisfação será  $u_1(0, 0)$  para cada posicionamento do Fiscal. Ao escolher  $v_a$ , por outro lado, ele obtém um excesso de velocidade ( $e = 1$ ) e fica exposto a multa por excesso de velocidade. Recebe nenhuma multa ( $m = 0$ ) se o Fiscal se posiciona em  $l_0$ , o que resulta em satisfação  $u_1(0, 1)$ , e recebe uma multa ( $m = 1$ ) se o Fiscal se posiciona em  $l_1$ , o que lhe confere satisfação  $u_1(1, 1)$ . Finalmente, ao escolher  $l_0$ , o Fiscal se posiciona em nenhuma localidade para verificar velocidade ( $n = 0$ ) e, portanto, não autua o Condutor ( $m = 0$ ). Obtém com isso satisfação  $u_0(0, 0, 0)$  se o Condutor escolhe  $v_b$  e  $u_0(0, 0, 1)$  se o Condutor escolhe  $v_a$ . Ao escolher  $l_1$ , no entanto, ele se posiciona em uma localidade para verificar velocidade ( $n = 1$ ) e autua o Condutor se, e somente se, este escolhe  $v_a$ .

Como consequência de (8) e (9), a matriz de payoffs em (10) é dada por (11). Esta representação permite visualizar que o jogo (1) é o caso particular de (11) quando  $\alpha = \beta = \gamma = \eta = \mu = 1$ :

		Condutor (jogador 1)		
		$v_b$	$v_a$	
	$l_0$	0, 0	$-\gamma, \mu$	(11)
Fiscal (jogador 0)	$l_1$	$-\alpha, 0$	$\beta - \gamma, -\eta$	

A Proposição 1 a seguir confirma a generalidade do resultado de unicidade do Lema 2 e estabelece ainda que, em todas as situações estratégicas entre o Condutor e o Fiscal que podem ser descritas por (11), o comportamento previsto é o Fiscal se posicionar em  $l_1$  para verificar a velocidade do Condutor segundo a probabilidade  $\delta \in (0, 1)$  e o Condutor exceder o limite  $\bar{v}$  segundo a probabilidade  $\theta \in (0, 1)$ .

**Proposição 1.** *A única boa previsão (o único Equilíbrio de Nash) para o jogo (11) é dada por*

$$\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*) = [(1 - \delta, \delta), (1 - \theta, \theta)],$$

em que  $\theta \equiv \alpha/(\alpha + \beta) \in (0, 1)$  e  $\delta \equiv \mu/(\eta + \mu) \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* A demonstração é uma extensão direta do argumento utilizado para provar o Lema 2. Ela é apresentada em detalhes no [Apêndice](#).  $\square$

Utilizando a Proposição 1 e a definição (3), cabe registrar que o payoff esperado dos jogadores no único equilíbrio de Nash de (11) é dado por

$$\begin{aligned} U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*) &= (1 - \delta)[0(1 - \theta) - \gamma\theta] + \delta[-\alpha(1 - \theta) + (\beta - \gamma)\theta] \\ &= -\gamma\theta + \delta[(\alpha + \beta)\theta - \alpha] = -\gamma\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) &= (1 - \theta)[0(1 - \delta) + 0\delta] + \theta[\mu(1 - \delta) - \eta\delta] \\ &= \theta[\mu - (\mu + \eta)\delta] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

em que a terceira igualdade utiliza a definição de  $\theta = \alpha/(\alpha + \beta)$  e a sexta igualdade utiliza a definição de  $\delta = \mu/(\eta + \mu)$ .

### 3. O modelo para radares móveis

No modelo estudado na seção 2, há somente um local na rodovia em que existe limite máximo para a velocidade dos veículos, denotado por  $l_1$ . A fim de estudar a decisão de posicionamento do radar entre mais de uma localidade, suponha agora a existência de uma segunda localidade na qual existe limite máximo para a velocidade dos veículos: denominada localidade 2 e denotada por  $l_2$ . O limite máximo de velocidade na localidade  $l_2$  também é dado por  $\bar{v}$ .

Por simplicidade, o veículo utilizado pelo condutor continua capaz de desenvolver somente dois níveis de velocidade:  $v_b$  e  $v_a$  tais que  $v_b < \bar{v} < v_a$ . No entanto, agora o condutor precisa decidir qual velocidade vai desenvolver em cada localidade:  $v_1$  denota a velocidade do veículo em  $l_1$  e  $v_2$  a velocidade em  $l_2$ .

Assim como na seção 2, há uma localidade na qual o Fiscal pode desempenhar uma atividade (produtiva ou de lazer) alternativa à fiscalização:  $l_0$ . Mas agora, diferentemente do suposto na seção 2, suponha que o Fiscal possui dois aparelhos para aferição de velocidade (radares) e precisa decidir onde posicioná-los. A fim de preservar a hipótese de que cada radar precisa ser operado pessoalmente, suponha agora que o jogador 0 (Fiscal) é a representação de um time de dois fiscais. Neste caso, a satisfação do Fiscal definida em (8) pode ser interpretada como o interesse da sociedade no cumprimento dos limites de velocidade.

O Fiscal possui quatro possíveis *posicionamentos* dos dois radares: fiscalizar nenhuma localidade,  $p_0 \equiv (l_0, l_0)$ , fiscalizar somente a localidade 1, denotado por  $p_1 \equiv (l_0, l_1)$ , fiscalizar somente  $l_2$ , denotado por  $p_2 \equiv (l_0, l_2)$  e fiscalizar todas as localidades,  $p_3 \equiv (l_1, l_2)$ . Logo, seu conjunto de escolhas (não probabilísticas) possíveis é agora dado por  $A_0 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ . O Condutor possui quatro possibilidades para a *agenda de velocidade*: exceder o limite  $\bar{v}$  em nenhuma localidade,  $a_0 \equiv (v_b, v_b)$ , exceder o limite apenas na localidade 1, denotada por  $a_1 \equiv (v_a, v_b)$ , exceder o limite somente em  $l_2$ , denotada por  $a_2 \equiv (v_b, v_a)$  e exceder o limite em todas as localidades,  $a_3 \equiv (v_a, v_a)$ . Logo, seu conjunto de escolhas (não probabilísticas) possíveis é  $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ . Portanto, o conjunto de resultados possíveis para o novo jogo possui 16 elementos e é dado por

$$A_0 \times A_1 = \{(p_i, a_j) : i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } j \in \{0, 1, 2, 3\}\}.$$

O nível de satisfação (payoff) de cada jogador em cada resultado possível é definido por (8), (9) e pela combinação  $(p_i, a_j)$ , conforme apresentado na tabela a seguir:

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$p_0$	$u_o(0, 0, 0), u_1(0, 0)$	$u_o(0, 0, 1), u_1(0, 1)$	$u_o(0, 0, 1), u_1(0, 1)$	$u_o(0, 0, 2), u_1(0, 2)$
$p_1$	$u_o(1, 0, 0), u_1(0, 0)$	$u_o(1, 1, 1), u_1(1, 1)$	$u_o(1, 0, 1), u_1(0, 1)$	$u_o(1, 1, 2), u_1(1, 2)$
$p_2$	$u_o(1, 0, 0), u_1(0, 0)$	$u_o(1, 0, 1), u_1(0, 1)$	$u_o(1, 1, 1), u_1(1, 1)$	$u_o(1, 1, 2), u_1(1, 2)$
$p_3$	$u_o(2, 0, 0), u_1(0, 0)$	$u_o(2, 1, 1), u_1(1, 1)$	$u_o(2, 1, 1), u_1(1, 1)$	$u_o(2, 2, 2), u_1(2, 2)$

Os valores atribuídos a  $(n, m, e)$  para cada resultado  $[(l_i, l_j), (v_k, v_s)]$  segue lógica similar àquela utilizada para descrever a matriz (10). Por exemplo, somente um radar é posicionado para aferição de velocidade quando o resultado do jogo é  $(p_2, a_1) = [(l_0, l_2), (v_a, v_b)]$ . Logo, o custo de oportunidade da fiscalização é incorrido somente uma vez ( $n = 1$ ). Como o único radar em operação foi posicionado em  $l_2$  e o Condutor não excedeu  $\bar{v}$  em  $l_2$ , então ocorre nenhuma autuação por excesso de velocidade ( $m = 0$ ). Tendo em vista que o Condutor excedeu  $\bar{v}$  em  $l_1$ , e somente em  $l_1$ , tem-se  $e = 1$ . Usando  $(n, m, e) = (1, 0, 1)$  e (8), tem-se que o payoff do Fiscal sob o resultado  $(p_2, a_1)$  é dado por  $\pi_0(p_2, a_1) = u_o(1, 0, 1)$ . Similarmente, o payoff do Condutor sob o resultado  $(p_2, a_1)$  implicado por (9) é  $\pi_1(p_2, a_1) = u_1(0, 1)$ .

A justificativa para cada uma das demais células da tabela acima é análoga. Portanto, a matriz de payoffs implicada por (8) e (9) é

		Conductor			
		$(v_b, v_b)$	$(v_a, v_b)$	$(v_b, v_a)$	$(v_a, v_a)$
Fiscal	$(l_0, l_0)$	0, 0	$-\gamma, \mu$	$-\gamma, \mu$	$-2\gamma, 2\mu$
	$(l_0, l_1)$	$-\alpha, 0$	$\beta - \gamma, -\eta$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	$(l_0, l_2)$	$-\alpha, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - \gamma, -\eta$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	$(l_1, l_2)$	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$

(14)

O padrão de atratividade neste novo jogo é consistente com o padrão estudado na seção 2. A atratividade de  $v_a$  para o Conductor decorre do fato desta velocidade permitir chegar ao destino em menos tempo. O nível  $v_b$ , por sua vez, é atrativo ao evitar exposição a multa por excesso de velocidade. A atividade de fiscalização é mais satisfatória para o Fiscal quando ela é efetiva: quando o Conductor excede o limite de velocidade na localidade em que o Fiscal está posicionado.

O payoff esperado do jogador  $k$  sob uma determinada previsão  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_1)$  passa a ser dado por

$$U_k(\sigma_0, \sigma_1) = \sum_{i=0}^3 \sigma_0(p_i) \left[ \sum_{j=0}^3 \sigma_1(a_j) \pi_k(p_i, a_j) \right], \tag{15}$$

em que o payoff obtido pelo jogador  $k$  sob o resultado  $(p_i, a_j)$  é denotado por  $\pi_k(p_i, a_j)$  e foi apresentado em (14). A previsão  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  para o jogo (14) é um Equilíbrio de Nash (e, portanto, é uma boa previsão de comportamento) se satisfaz (4) e (5) quando a função  $U_k(\cdot)$  é definida por (15).

### 3.1 Previsões de comportamento

O conjunto de comportamentos probabilísticos possíveis neste novo jogo para o Fiscal e para o Conductor precisam ser reformados para acomodar a maior quantidade de alternativas disponíveis em  $A_0$  e em  $A_1$ . Eles passam a ser dados por

$$\Delta(A_0) = \Delta(A_1) = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3) : x_i \geq 0 \text{ para cada } i \text{ e } \sum_{i=0}^3 x_i = 1 \right\},$$

mas o significado de cada conjunto é distinto. Se  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ , a expressão  $x \in \Delta(A_0)$  significa que  $x$  representa o comportamento do Fiscal no qual  $p_0$  é escolhido com probabilidade  $x_0 \geq 0$ ,  $p_1$  é escolhido com probabilidade  $x_1 \geq 0$ ,  $p_2$  é escolhido com probabilidade  $x_2 \geq 0$  e  $p_3$  com probabilidade  $x_3 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 \geq 0$ . A expressão  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \Delta(A_1)$  significa que o comportamento do Conductor é escolher  $a_0$  com probabilidade  $y_0 \geq 0$ , escolher  $a_1$  com probabilidade  $y_1 \geq 0$ , escolher  $a_2$  com probabilidade  $y_2 \geq 0$  e escolher  $a_3$  com probabilidade  $y_3 = 1 - y_0 - y_1 - y_2 \geq 0$ .

A notação definida a seguir, embora sofisticada, facilita a caracterização de Equilíbrios de Nash com comportamentos probabilísticos.

**Notação 1.** Para cada jogador  $i \in \{0, 1\}$  e cada  $X \subseteq A_i$ , denote por

$$\Delta(X) = \{\sigma_i \in \Delta(A_i) : \sigma_i(x) = 0 \text{ se } x \notin X\}$$

o conjunto de medidas de probabilidade sobre  $A_i$  que atribuem probabilidade nula para elementos de  $A_i$  que não estão presentes em  $X$ .

Por exemplo,  $\Delta(X) = \Delta(\{a_0\}) = \{(1, 0, 0, 0)\}$  quando  $X = \{a_0\} \subseteq A_1$ , pois neste caso  $a_1 \notin X$ ,  $a_2 \notin X$  e  $a_3 \notin X$ . Se, por outro lado,  $X = \{p_1, p_2\} \subseteq A_0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(X) = \Delta(\{p_1, p_2\}) &= \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Delta(A_0) : x_0 = x_3 = 0\} \\ &= \{(0, x_1, 1 - x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

O Lema 3 apresentado no Apêndice mostra que o payoff esperado dos jogadores satisfaz as equações (16) e (17) a seguir. A variável  $q_i(\sigma_0) = \sigma_0(p_i) + \sigma_0(p_3)$  denota a probabilidade com que a localidade  $i \in \{1, 2\}$  é fiscalizada quando os jogadores se comportam de acordo com  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$ . A variável  $q_i(\sigma_1) = \sigma_1(a_i) + \sigma_1(a_3)$  denota a probabilidade com que o limite  $\bar{v}$  é excedido na localidade  $i \in \{1, 2\}$  quando os jogadores se comportam de acordo com  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$ .

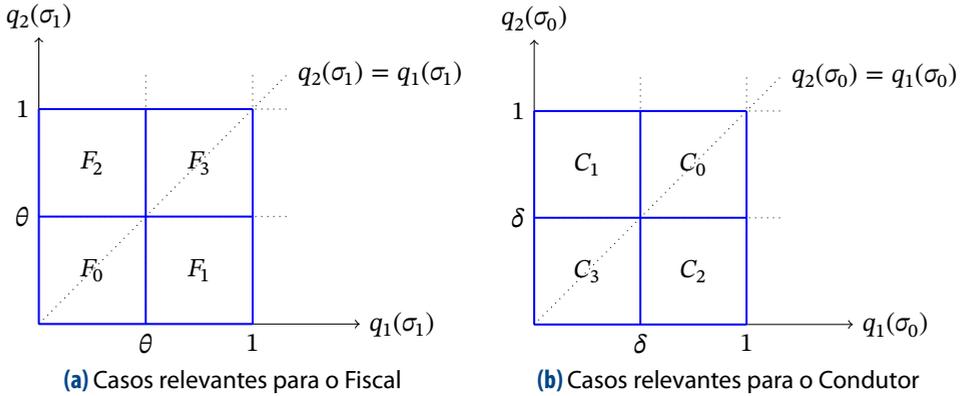
$$U_0(\sigma_0, \sigma_1) = \frac{\alpha}{\theta} \left( q_1(\sigma_0)[q_1(\sigma_1) - \theta] + q_2(\sigma_0)[q_2(\sigma_1) - \theta] \right) + U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1], \quad (16)$$

$$U_1(\sigma_0, \sigma_1) = \frac{\mu}{\delta} \left( q_1(\sigma_1)[\delta - q_1(\sigma_0)] + q_2(\sigma_1)[\delta - q_2(\sigma_0)] \right). \quad (17)$$

A equação (16) mostra que o payoff esperado do Fiscal é determinado por  $\sigma_0$  somente via  $q(\sigma_0) = (q_1(\sigma_0), q_2(\sigma_0))$  e por  $\sigma_1$  somente via  $q(\sigma_1) = (q_1(\sigma_1), q_2(\sigma_1))$ . Ainda,  $U_0(\sigma_0, \sigma_1)$  é uma função linear de  $\sigma_0$ , quando  $\sigma_1$  é mantido fixo. Similarmente, a equação (17) mostra que o payoff esperado do Condutor é determinado por  $\sigma_0$  somente via  $q(\sigma_0) = (q_1(\sigma_0), q_2(\sigma_0))$  e por  $\sigma_1$  somente via  $q(\sigma_1) = (q_1(\sigma_1), q_2(\sigma_1))$ . Adicionalmente,  $U_1(\sigma_0, \sigma_1)$  é uma função linear de  $\sigma_1$ , para  $\sigma_0$  fixo.

Da equação (16), a decisão ótima do Fiscal depende das magnitudes de  $q_1(\sigma_1)$  e  $q_2(\sigma_1)$  em relação a  $\theta$ . Assim como no argumento da demonstração do Lema 2, a linearidade e o padrão de monotonicidade de  $U_0(\cdot)$  podem ser usados para descrever a escolha ótima do Fiscal. Por exemplo, o Fiscal possui somente uma melhor resposta para o comportamento  $\sigma_1$  do Condutor se  $q_1(\sigma_1) < \theta$  e  $q_2(\sigma_1) < \theta$ . A única melhor resposta neste caso é escolher  $q_1(\sigma_0) = q_2(\sigma_0) = 0$  e, portanto,  $p_0$  com probabilidade 1. Ou seja,  $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0)$ . Para facilitar a visualização de todos os casos relevantes para o Fiscal, a Figura 1(a) apresenta o conjunto de possíveis valores para  $q(\sigma_1)$ , o quadrante  $[0, 1]^2$ , como a união de quatro conjuntos:  $[0, 1]^2 = F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$ , em que

$$F_0 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq \theta \text{ e } y \leq \theta\}, \quad F_1 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq \theta \text{ e } y \leq \theta\}, \\ F_2 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq \theta \text{ e } y \geq \theta\}, \quad F_3 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq \theta \text{ e } y \geq \theta\}.$$



**Figura 1.** Casos relevantes para o Fiscal e para o Condutor

Nesta linguagem, o caso exemplificado acima, com  $q_1(\sigma_1) < \theta$  e  $q_2(\sigma_1) < \theta$ , é descrito de forma compacta como  $q(\sigma_1) \in F_0 \setminus (F_1 \cup F_2) = \{(x, y) : (x, y) \in F_0 \text{ e } (x, y) \notin F_1 \cup F_2\}$ .

De forma similar, a decisão ótima do Condutor depende das magnitudes de  $q_1(\sigma_0)$  e  $q_2(\sigma_0)$  em relação a  $\delta$ . Como exemplo, segue de (17) que  $a_3$  é a única melhor resposta do Condutor para um comportamento  $\sigma_0$  do Fiscal tal que  $q_1(\sigma_0) < \delta$  e  $q_2(\sigma_0) < \delta$ , pois neste caso o ótimo é escolher  $q_1(\sigma_1) = q_2(\sigma_1) = 1$ . Ou seja, a única melhor resposta neste caso é  $\sigma_1 = (0, 0, 0, 1)$ . Para facilitar a visualização de todos os casos relevantes para o Condutor, a Figura 1(b) apresenta o conjunto de possíveis valores para  $q(\sigma_0)$ , o quadrante  $[0, 1]^2$ , como a união de quatro conjuntos:  $[0, 1]^2 = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , em que

$$C_0 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq \delta \text{ e } y \geq \delta\}, \quad C_1 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq \delta \text{ e } y \geq \delta\}, \\ C_2 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq \delta \text{ e } y \leq \delta\}, \quad C_3 \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq \delta \text{ e } y \leq \delta\}.$$

Nesta linguagem, o caso exemplificado, com  $q_1(\sigma_0) < \delta$  e  $q_2(\sigma_0) < \delta$ , é descrito de forma compacta como  $q(\sigma_0) \in C_3 \setminus (C_1 \cup C_2) = \{(x, y) : (x, y) \in C_3 \text{ e } (x, y) \notin C_1 \cup C_2\}$ .

A descrição de  $[0, 1]^2$  como a união de  $F_i$ 's e de  $C_j$ 's facilita a caracterização dos conjuntos de melhor resposta do Fiscal e do Condutor:  $B_0(\sigma_1)$  e  $B_1(\sigma_0)$ , respectivamente. A Tabela 1 apresenta todos os casos relevantes para o Fiscal na segunda coluna e o correspondente valor de  $B_0(\sigma_1)$  na primeira coluna. Especificamente, a segunda coluna indica o conjunto  $Q_1$  para o qual a condição  $q(\sigma_1) \in Q_1$  implica o (e é implicada pelo) valor correspondente de  $B_0(\sigma_1)$  na primeira coluna. O exemplo  $q(\sigma_1) \in F_0 \setminus (F_1 \cup F_2)$  discutido acima, no qual  $B_0(\sigma_1) = \Delta(\{p_0\})$  e  $Q_1 = F_0 \setminus (F_1 \cup F_2)$ , é apresentado na primeira linha das duas primeiras colunas. As colunas três e quatro da Tabela 1 apresentam todos os nove casos relevantes para a decisão do Condutor no mesmo formato. O exemplo  $q(\sigma_0) \in C_3 \setminus (C_2 \cup C_1)$  discutido acima, no qual

**Tabela 1.** Caracterização de  $B_0(\sigma_1)$  e de  $B_1(\sigma_0)$  para o jogo (14)

$B_0(\sigma_1)$	$Q_1$	$B_1(\sigma_0)$	$Q_0$
$\Delta(\{p_0\})$	$F_0 \setminus (F_1 \cup F_2)$	$\Delta(\{a_0\})$	$C_0 \setminus (C_1 \cup C_2)$
$\Delta(\{p_1\})$	$F_1 \setminus (F_0 \cup F_3)$	$\Delta(\{a_1\})$	$C_1 \setminus (C_0 \cup C_3)$
$\Delta(\{p_2\})$	$F_2 \setminus (F_0 \cup F_3)$	$\Delta(\{a_2\})$	$C_2 \setminus (C_0 \cup C_3)$
$\Delta(\{p_3\})$	$F_3 \setminus (F_1 \cup F_2)$	$\Delta(\{a_3\})$	$C_3 \setminus (C_1 \cup C_2)$
$\Delta(\{p_0, p_1\})$	$(F_0 \cap F_1) \setminus \{(\theta, \theta)\}$	$\Delta(\{a_0, a_1\})$	$(C_0 \cap C_1) \setminus \{(\delta, \delta)\}$
$\Delta(\{p_0, p_2\})$	$(F_0 \cap F_2) \setminus \{(\theta, \theta)\}$	$\Delta(\{a_0, a_2\})$	$(C_0 \cap C_2) \setminus \{(\delta, \delta)\}$
$\Delta(\{p_1, p_3\})$	$(F_1 \cap F_3) \setminus \{(\theta, \theta)\}$	$\Delta(\{a_1, a_3\})$	$(C_1 \cap C_3) \setminus \{(\delta, \delta)\}$
$\Delta(\{p_2, p_3\})$	$(F_2 \cap F_3) \setminus \{(\theta, \theta)\}$	$\Delta(\{a_2, a_3\})$	$(C_2 \cap C_3) \setminus \{(\delta, \delta)\}$
$\Delta(\{p_0, p_1, p_2, p_3\})$	$(F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3)$	$\Delta(\{a_0, a_1, a_2, a_3\})$	$(C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3)$

$B_1(\sigma_0) = \Delta(\{a_3\})$  e  $Q_0 = C_3 \setminus (C_2 \cup C_1)$ , é apresentado na quarta linha das duas últimas colunas.

A caracterização de  $B_0(\sigma_1)$  e  $B_1(\sigma_0)$  apresentada na Tabela 1 e a visualização dos respectivos conjuntos na Figura 1 são instrumentos bastante úteis para o entendimento da demonstração da Proposição 2 a seguir. Tal proposição revela que cada Equilíbrio de Nash é descrito completamente por um par  $(x, y)$  tal que  $0 \leq x \leq \min \{1 - \delta, \delta\}$  e  $0 \leq y \leq \min \{1 - \theta, \theta\}$ .

**Proposição 2.** A previsão  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  é uma boa previsão (Equilíbrio de Nash) para o jogo (14) se, e somente se,

$$q(\sigma_0^*) = (\delta, \delta) \quad e \quad q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta). \tag{18}$$

Assim,  $\sigma^*$  é um Equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\sigma_0^* = (1 - x - \delta, x, x, \delta - x) \quad e \quad \sigma_1^* = (1 - \theta - y, y, y, \theta - y) \tag{19}$$

para algum  $(x, y)$  tal que  $0 \leq x \leq \min \{\delta, 1 - \delta\}$  e  $0 \leq y \leq \min \{1 - \theta, \theta\}$ .

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Suponha que (18) é satisfeita por  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ . Quer-se demonstrar que  $\sigma^*$  é Equilíbrio de Nash. Como  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta) \in (F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ , então  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(\{p_0, p_1, p_2, p_3\})$ . Como  $q(\sigma_0^*) = (\delta, \delta) \in (C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3)$ , então  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(\{a_0, a_1, a_2, a_3\})$ . Conclui-se disto que  $\sigma_0^* \in B_0^*(\sigma_1^*)$  e  $\sigma_1^* \in B_1^*(\sigma_0^*)$  são trivialmente satisfeitas. Ou seja,  $\sigma^*$  é Equilíbrio de Nash.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\sigma^*$  é Equilíbrio de Nash, de forma que  $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*)$  e  $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*)$ . Vejamos que isto requer  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta)$ . Considere inicialmente o caso em que  $q_1(\sigma_0^*) < q_2(\sigma_0^*)$ , de forma que  $\sigma_0^*(p_1) < \sigma_0^*(p_2)$ . Então a Figura 1 revela que  $q(\sigma_0^*) \notin C_2$ . Usando a Tabela 1, tem-se  $B_1(\sigma_0^*) \subseteq \Delta(\{a_0, a_1, a_3\})$  e, portanto,  $\sigma_1^*(a_2) = 0$ . Logo,  $\sigma_1^*(a_2) = 0 \leq \sigma_1^*(a_1)$  e, com isso,  $q_1(\sigma_1^*) \geq q_2(\sigma_1^*)$ . Como  $\sigma_0^*(p_2) > \sigma_0^*(p_1) \geq 0$

exige que  $\Delta(\{p_2\}) \subseteq B_0(\sigma_1^*)$ , então a **Tabela 1** implica que  $q(\sigma_1^*) \in F_2$ . Em conjunto,  $q(\sigma_1^*) \in F_2$  e  $q_1(\sigma_1^*) \geq q_2(\sigma_1^*)$  implicam que  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta) \in F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3$ , conforme evidenciado pela **Figura 1**.

Para o caso em que  $q_1(\sigma_0^*) > q_2(\sigma_0^*)$ , tem-se  $\sigma_0^*(p_1) > \sigma_0^*(p_2)$  e a **Figura 1** revela que  $q(\sigma_0^*) \notin C_1$ . Usando a **Tabela 1**, tem-se  $B_1(\sigma_0^*) \subseteq \Delta(\{a_0, a_2, a_3\})$  e, portanto,  $\sigma_1^*(a_1) = 0$ . Logo,  $\sigma_1^*(a_2) \geq 0 = \sigma_1^*(a_1)$  e, com isso,  $q_1(\sigma_1^*) \leq q_2(\sigma_1^*)$ . Como  $\sigma_0^*(p_1) > \sigma_0^*(p_2) \geq 0$  exige que  $\Delta(\{p_1\}) \subseteq B_0(\sigma_1^*)$ , então a **Tabela 1** implica que  $q(\sigma_1^*) \in F_1$ . Em conjunto,  $q(\sigma_1^*) \in F_1$  e  $q_1(\sigma_1^*) \leq q_2(\sigma_1^*)$  implicam que  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta) \in F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3$ , conforme evidenciado pela **Figura 1**.

Por fim, considere o caso em que  $q_1(\sigma_0^*) = q_2(\sigma_0^*)$ , de forma que  $\sigma_0^*(p_1) = \sigma_0^*(p_2)$ . Se  $\sigma_0^*(p_2) = \sigma_0^*(p_1) > 0$ , então  $\Delta(\{p_1, p_2\}) \subseteq B_0(\sigma_1^*)$ . Logo, a **Tabela 1** exige para este caso que  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(A_0)$ , o que é possível somente se  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta)$ . Suponha alternativamente que  $\sigma_0^*(p_2) = \sigma_0^*(p_1) = 0$ . Se  $\sigma_0^*(p_0) > 0$  e  $\sigma_0^*(p_3) > 0$ , então  $\Delta(\{p_0, p_3\}) \subseteq B_0(\sigma_1^*)$ . A **Tabela 1** exige para este caso que  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(A_0)$ , o que é possível somente se  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta)$ .

O caso com  $\sigma_0^* = (1, 0, 0, 0)$  não constitui Equilíbrio de Nash, pois isto implica  $q(\sigma_0^*) = (0, 0) \in C_3 \setminus (C_1 \cup C_2)$  e, portanto,  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(\{a_3\})$ . Assim,  $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*)$  exige que  $\sigma_1^* = (0, 0, 0, 1)$  e, com isto,  $q(\sigma_1^*) = (1, 1) \in F_3 \setminus (F_1 \cup F_2)$ . Então,  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(\{p_3\})$  e  $\sigma_0^* = (1, 0, 0, 0) \notin B_0(\sigma_1^*)$ . O caso com  $\sigma_0^* = (0, 0, 0, 1)$  também não constitui Equilíbrio de Nash, pois isto implica  $q(\sigma_0^*) = (1, 1) \in C_0 \setminus (C_1 \cup C_2)$  e, portanto,  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(\{a_0\})$ . Assim,  $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*)$  exige que  $\sigma_1^* = (1, 0, 0, 0)$  e, com isto,  $q(\sigma_1^*) = (0, 0) \in F_0 \setminus (F_1 \cup F_2)$ . Então,  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(\{p_0\})$  e  $\sigma_0^* = (0, 0, 0, 1) \notin B_0(\sigma_1^*)$ .

Conclui-se do exposto acima que para  $\sigma^*$  ser Equilíbrio de Nash é necessário que  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta)$ . Segue de  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta)$  que somente  $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2)$  é consistente com  $\sigma^*$  ser Equilíbrio de Nash. Se  $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) > 0$ , então  $\Delta(\{a_1, a_2\}) \subseteq B_1(\sigma_0^*)$ . Logo, a **Tabela 1** exige para este caso que  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(A_1)$ , o que é possível somente se  $q(\sigma_0^*) = (\delta, \delta)$ . Suponha alternativamente que  $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = 0$ , de forma que  $\sigma_1^*(a_3) = q_1(\sigma_1^*) = \theta > 0$  e  $\sigma_1^*(a_0) = 1 - \sigma_1^*(a_3) = 1 - \theta > 0$ . Como  $\sigma_1^*(a_0) > 0$  e  $\sigma_1^*(a_3) > 0$ , então  $\Delta(\{a_0, a_3\}) \subseteq B_1(\sigma_0^*)$ . A **Tabela 1** exige para este caso que  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(A_1)$ , o que é possível somente se  $q(\sigma_0^*) = (\delta, \delta)$ .  $\square$

A fim de subsidiar a análise sobre os efeitos da proibição de radares móveis, o Corolário a seguir registra importantes características da situação prevista para a relação entre condutores e a fiscalização quando podem ser usados somente radares móveis.

**Corolário 1.** *Em cada Equilíbrio de Nash do jogo (14), os payoffs esperados do Condutor e do Fiscal são, respectivamente,*

$$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = 0 \quad e \quad U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = -2\gamma\theta = -2\gamma \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

*Em cada Equilíbrio de Nash  $(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ , o número esperado de fiscalizações é dado por  $E(n) = \sigma_0^* \cdot [0, 1, 1, 2] = q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2\delta$ , o número esperado de excessos de*

velocidade é  $E(e) = \sigma_1^* \cdot [0, 1, 1, 2] = q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*) = 2\theta$  e a quantidade esperada de autuações é  $E(m) = 2\theta\delta$ , pois

$$E(m) = \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\sigma_1^*)^T = \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 \\ q_1(\sigma_1^*) \\ q_2(\sigma_1^*) \\ q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*) \end{pmatrix} \\ = q_1(\sigma_0^*)q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_0^*)q_2(\sigma_1^*),$$

em que  $(\sigma_1^*)^T$  denota o vetor coluna obtido ao transpor o vetor linha  $\sigma_1^*$ .

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 2, em todo equilíbrio de Nash  $\sigma^*$  tem-se  $q(\sigma_1^*) = (\theta, \theta)$  e  $q(\sigma_0^*) = (\delta, \delta)$ . Segue de (16) e (17) que o payoff do Condutor em cada equilíbrio é  $U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = 0$  e o payoff esperado do Fiscal em cada equilíbrio é  $U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1^*] = U_0[(1, 0, 0, 0), (1 - \theta - y, y, y, \theta - y)]$ . Ou seja,  $U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = 0(1 - \theta - y) - \gamma y - \gamma y - 2\gamma(\theta - y) = -2\gamma\theta = -2\gamma \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ .  $\square$

Note que o payoff de equilíbrio esperado pelo Condutor é igual ao payoff que seria obtido ao não exceder o limite  $\bar{v}$  em todas as localidades. Como  $\gamma > 0$  e  $\theta \in (0, 1)$ , o payoff de equilíbrio esperado pelo Fiscal é estritamente negativo e estritamente maior do que  $-2\gamma$ . Portanto, ele é estritamente menor do que o payoff que seria obtido ao não fiscalizar o Condutor quando este não excede  $\bar{v}$  (ou seja, no resultado  $[(l_0, l_0), (v_b, v_b)]$ ) e estritamente maior do que o payoff obtido ao não fiscalizar o Condutor quando ele sempre excede  $\bar{v}$  (ou seja, no resultado  $[(l_0, l_0), (v_a, v_a)]$ ). Conclui-se disto que a possibilidade de violação de  $\bar{v}$  piora (em equilíbrio) a situação do Fiscal, sem benefício de satisfação para o Condutor quando somente radares móveis podem ser usados na fiscalização. A possibilidade deste tipo de fiscalização, no entanto, evita (em equilíbrio) que a satisfação do Fiscal seja reduzida até  $-2\gamma$ .

## 4. O modelo para radares fixos

Considere novamente o modelo estudado na seção 3, mas agora suponha que o Fiscal é obrigado a informar antecipadamente ao Condutor a localização dos dois radares. Tal situação pode ser vista como um modelo para a relação estratégica implicada pela proibição de utilização de radares móveis. Somente radares fixos são usados nesta situação e o posicionamento deles é previamente informado ao condutor ou descoberto por este em período anterior. A árvore de decisão na Figura 2 ilustra de maneira bastante conveniente (na forma extensiva) a nova situação estratégica na qual estão envolvidos o Fiscal (jogador 0) e o Condutor (jogador 1).

A Figura 2 indica que o Fiscal é o primeiro jogador a se mover no jogo. As mesmas quatro opções de posicionamento continuam disponíveis:  $p_0, p_1, p_2$  e  $p_3$ .

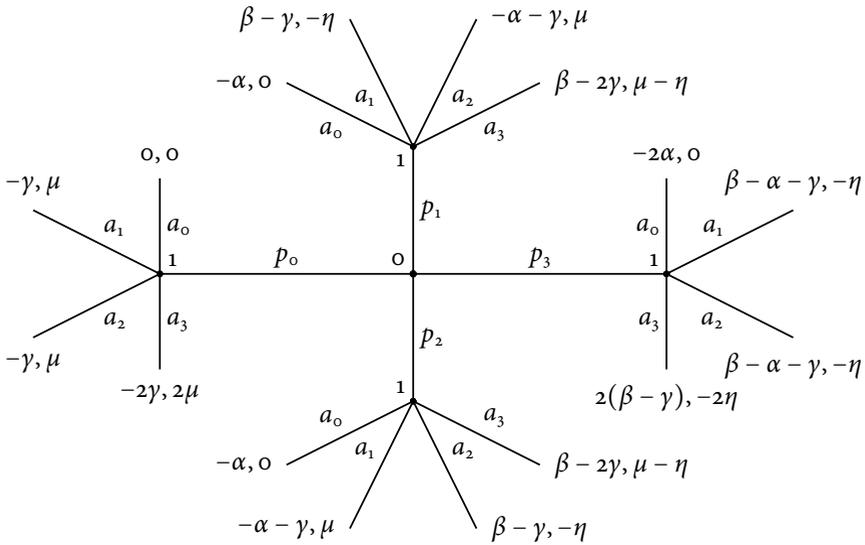


Figura 2. Fiscalização via radares fixos

Não há novas opções de posicionamento e, portanto, o conjunto de ações possíveis é ainda dado por  $A_0 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ . O Condutor joga em seguida, logo após observar a escolha de posicionamento do Fiscal. As mesmas quatro opções de agenda de velocidade continuam disponíveis:  $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$ . Não há novas opções de agenda e, portanto, o conjunto de ações possíveis é ainda dado por  $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ . Mas agora é necessário escolher uma agenda para cada uma das quatro situações nas quais o Condutor pode ser convocado a jogar: (i) após a escolha de  $p_0$ ; (ii) após a escolha de  $p_1$ ; (iii) após a escolha de  $p_2$ ; e (iv) após a escolha de  $p_3$ .

Em situações nas quais o jogador é convocado a jogar em mais de uma contingência, como a situação do Condutor aqui considerada, o conceito de *ação* é insuficiente para descrever seu comportamento. Nestes casos, o comportamento é descrito por uma função, a qual é frequentemente denominada *estratégia*. Por exemplo, uma possível estratégia para o Condutor no jogo apresentado na Figura 2 é a função  $s$  tal que  $s(p_0) = a_0$ ,  $s(p_1) = a_3$  e  $s(p_2) = s(p_3) = a_2$ . Esta estratégia (função) é mais compactamente representada por  $s = (a_0, a_3, a_2, a_2)$  e descreve a escolha da ação  $a_0$  após o Condutor observar o Fiscal escolher  $p_0$ , ação  $a_3$  após observar escolha  $p_1$  e ação  $a_2$  após observar  $p_2$  ou  $p_3$ . Como o Fiscal é convocado a jogar somente uma vez, seu comportamento (sua estratégia) pode ser descrito com ações. Ou seja, no caso do Fiscal (assim como de ambos os jogadores nos jogos das seções 2 e 3), estratégia e ação são conceitos equivalentes.

A necessidade de o Condutor escolher uma dentre quatro agendas ( $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$ ) para cada um dos quatro possíveis posicionamentos do Fiscal ( $p_0, p_1, p_2$  e  $p_3$ ) faz com que o número de comportamentos não probabilísticos (denominados *estratégias puras*) do Condutor seja dado por  $4^4 = 256$ . Ou seja, o conjunto de estratégias puras

disponíveis para o Condutor,

$$S_1 \equiv \{(s_0, s_1, s_2, s_3) : s_i \in \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \text{ para cada } i \in \{0, 1, 2, 3\}\},$$

possui 256 elementos. Como o Fiscal ainda possui quatro possíveis comportamentos não probabilísticos (4 estratégias puras:  $S_0 \equiv A_0 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ ), então há 1.024 possíveis previsões de comportamento não probabilístico. Tal nível de complexidade diminui a utilidade da representação do jogo na *Forma Normal*, a qual foi utilizada nas seções 2 e 3.

Tendo em vista que a escolha do Condutor pode não ser independente da escolha do Fiscal na formulação dinâmica do jogo de fiscalização, o payoff esperado neste caso não pode ser calculado segundo (15). A definição de payoff esperado em (15) utiliza a hipótese de independência entre as distribuições de probabilidade  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ , a qual é aceitável quando as escolhas são simultâneas. Quando a hipótese de independência não necessariamente é satisfeita, a definição (15) para cada  $\sigma \in \Delta(A_0 \times A_1)$  precisa ser generalizada para

$$U_k(\sigma) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sigma(p_i, a_j) \pi_k(p_i, a_j) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sigma_0(p_i) \sigma_1(a_j | p_i) \pi_k(p_i, a_j), \quad (20)$$

em que a probabilidade condicional  $\sigma_1(a_j | p_i)$  denota a probabilidade com que o Condutor escolhe a ação  $a_j$ , condicional a ter observado a escolha do Fiscal  $p_i$ .

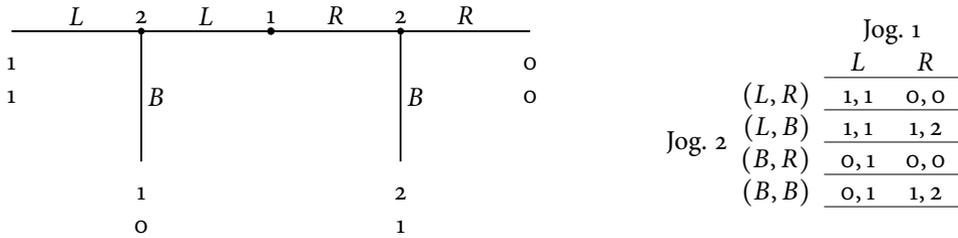
#### 4.1 Previsões de comportamento

O conceito de Equilíbrio de Nash foi utilizado nas seções 2 e 3 como um bom critério para avaliar a razoabilidade de uma dada previsão de comportamento para os jogos estudados nestas seções. Especificamente, a previsão  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$  foi considerada boa se, e somente se,  $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*)$  e  $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*)$ . Ou seja, se e somente se  $\sigma_0^*$  é uma melhor resposta do Fiscal para a *conjectura*  $\sigma_1^*$  que este faz sobre o comportamento do Condutor e  $\sigma_1^*$  é uma melhor resposta do Condutor para a *conjectura*  $\sigma_0^*$  que este faz sobre o comportamento do Fiscal.

Em contextos dinâmicos, no entanto, o conceito de Equilíbrio de Nash é frequentemente considerado insuficiente para qualificar uma previsão como boa. *Nem toda conjectura utilizada pelos jogadores em um Equilíbrio de Nash de um jogo dinâmico é considerada razoável*, no sentido de que não é razoável esperar que os jogadores as considerariam relevantes ao decidir seu comportamento. O jogo dinâmico apresentado a seguir é um exemplo simples que ilustra tal ponto.

**Exemplo 2.** Considere o jogo descrito na Figura 3. A representação na forma extensiva é apresentada no lado esquerdo e a representação na forma normal está no lado direito.

Conforme indicado na representação extensiva do jogo, o jogador 1 é o primeiro a jogar e escolhe entre as opções *L* e *R*. O jogador 2 joga em seguida, após observar a



**Figura 3.** Ilustração simplificada de Perfeição em Subjogos

escolha do jogador 1. Se observar a escolha *L*, o jogador 2 precisa decidir entre as opções *L* e *B*. Se observar a escolha *R*, precisa decidir entre as opções *R* e *B*. Assim, o jogador 1 possui duas estratégias possíveis (*L* e *R*) e o jogador 2 possui quatro estratégias possíveis: (i) jogar *L* após observar *L* e jogar *R* após observar *R*, denotada por (*L, R*); (ii) jogar *L* após *L* e jogar *B* após *R*, denotada por (*L, B*); (iii) *B* após *L* e *R* após *R*, com notação (*B, R*); e (iv) sempre jogar *B*, denotada por (*B, B*).

Há três equilíbrios de Nash em estratégias puras neste jogo:  $s^* = (s_1^*, s_2^*) = [L, (L, R)]$ ;  $s^* = [R, (L, B)]$ ; e  $s^* = [R, (B, B)]$ . No entanto, observe que somente o equilíbrio  $[R, (L, B)]$  é construído usando conjecturas razoáveis. A conjectura (*L, R*) utilizada pelo jogador 1 na construção do equilíbrio  $[L, (L, R)]$  não é defensável, pois o jogador 1 antecipa que o jogador 2 sempre escolherá *B* após observar *R*: neste caso, ele recebe payoff 1 jogando *B* e payoff 0 jogando *R*. Similarmente, a conjectura (*B, B*) utilizada pelo jogador 1 na construção do equilíbrio  $[R, (B, B)]$  não é defensável, pois o jogador 1 antecipa que o jogador 2 sempre escolherá *L* após observar *L*: neste caso, ele recebe payoff 1 jogando *L* e payoff 0 jogando *B*.

O critério utilizado para descartar os Equilíbrios de Nash  $[L, (L, R)]$  e  $[R, (B, B)]$  no jogo do Exemplo 2 é usualmente denominado *Perfeição em Subjogos*. Mais geralmente, uma dada previsão para um jogo dinâmico é considerada uma boa previsão (um *Equilíbrio Perfeito em Subjogos*) se ela é um Equilíbrio de Nash do jogo e se ela define Equilíbrios de Nash em cada um dos subjogos. Um *subjogo* é um jogo dentro do jogo principal. No jogo ilustrado no Exemplo 2 há dois subjogos, cada um deles começando quando o jogador 2 é chamado a jogar. Somente o jogador 2 participa destes subjogos e, portanto, os Equilíbrios de Nash do subjogo são dados pelas melhores respostas deste jogador neste subjogo. Como, por definição, todo Equilíbrio Perfeito em Subjogos é um Equilíbrio de Nash, equilíbrios com perfeição em subjogos são usualmente denominados *Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos*.

A definição de boa previsão de comportamento para jogos dinâmicos descrita acima pode ser usada para estudar a situação estratégica apresentada na Figura 2. No subjogo que se inicia após o Fiscal se posicionar em  $p_0 = (l_0, l_0)$ , o Condutor possui somente uma melhor resposta:  $a_3 = (v_a, v_a)$ . No subjogo que se inicia após o Fiscal se posicionar em  $p_1 = (l_0, l_1)$ , visto que  $\mu > 0$ , o Condutor possui somente uma

melhor resposta:  $a_2 = (v_b, v_a)$ . No subjogo que se inicia após o Fiscal se posicionar em  $p_2 = (l_0, l_2)$ , o Condutor possui somente uma melhor resposta:  $a_1 = (v_a, v_b)$ . No subjogo que se inicia após o Fiscal se posicionar em  $p_3 = (l_1, l_2)$ , o Condutor possui somente uma melhor resposta:  $a_0 = (v_b, v_b)$ . Portanto, a única conjectura relevante para o Fiscal sobre o comportamento do Condutor é  $s_1^* = (a_3, a_2, a_1, a_0)$ . Sob tal conjectura, o conjunto de melhores respostas do Fiscal é dado por

$$B_0(s_1^*) = B_0[(a_3, a_2, a_1, a_0)] = \begin{cases} \Delta(\{(l_1, l_2)\}), & \text{se } \alpha < \gamma; \\ \Delta(\{(l_0, l_0)\}), & \text{se } \alpha > \gamma; \\ \Delta(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) & \text{se } \alpha = \gamma. \end{cases} \quad (21)$$

Segue disto que as boas previsões sobre o comportamento dos jogadores (os Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos) do jogo apresentado na [Figura 2](#) dependem da magnitude de  $\alpha$  e de  $\gamma$ . Se o custo de oportunidade da fiscalização ( $\alpha$ ) é menor do que o custo imposto ao Fiscal pelo excesso de velocidade ( $\gamma$ ), então  $s_0^* \in B_0(s_1^*)$  implica que o Fiscal fiscalizará as duas localidades:  $s_0^* = (l_1, l_2)$ . Por outro lado, se o custo de oportunidade da fiscalização ( $\alpha$ ) é maior do que o custo imposto ao Fiscal pelo excesso de velocidade ( $\gamma$ ), então  $s_0^* \in B_0(s_1^*)$  implica que o Fiscal fiscalizará nenhuma das duas localidades:  $s_0^* = (l_0, l_0)$ . Quando o custo de oportunidade  $\alpha$  é exatamente igual ao custo  $\gamma$ , o Fiscal está indiferente entre todos os posicionamentos:  $B_0(s_1^*) = \Delta(A_0)$ . Neste caso todo posicionamento (seja ele probabilístico ou não) é uma boa previsão para o comportamento do Fiscal. A Proposição 3 a seguir formaliza o resultado assim obtido.

**Proposição 3.** *Suponha que  $\gamma < \alpha$ . Então,  $s^* = (s_0^*, s_1^*)$  é uma boa previsão (Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos) para o jogo dinâmico apresentado na [Figura 2](#) se, e somente se,*

$$(s_0^*, s_1^*) = [(l_0, l_0), [(v_a, v_a), (v_b, v_a), (v_a, v_b), (v_b, v_b)]].$$

*Suponha que  $\gamma > \alpha$ . Então,  $s^*$  é um Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos para o jogo apresentado na [Figura 2](#) se, e somente se,*

$$(s_0^*, s_1^*) = [(l_1, l_2), [(v_a, v_a), (v_b, v_a), (v_a, v_b), (v_b, v_b)]].$$

*Por fim, suponha  $\gamma = \alpha$ . Então,  $s^*$  é uma boa previsão para o jogo apresentado na [Figura 2](#) se, e somente se,*

$$(s_0^*, s_1^*) = [(x, y, z, 1 - x - y - z), [(v_a, v_a), (v_b, v_a), (v_a, v_b), (v_b, v_b)]]],$$

*para alguma tripla  $(x, y, z)$  tal que  $x + y + z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ .*

A previsão de *resultado* para o jogo dinâmico quando  $\alpha < \gamma$  é o Fiscal verificar a velocidade nas duas localidades e o Condutor respeitar o limite  $\bar{v}$  nas duas

localidades: ou seja, o resultado  $o = [(l_1, l_2), (v_b, v_b)]$ . Quando  $\alpha > \gamma$ , a previsão de resultado é o Fiscal verificar a velocidade em nenhuma das localidades e o Condutor desrespeitar  $\bar{v}$  em todas as localidades: ou seja,  $o = [(l_0, l_0), (v_a, v_a)]$ . Se  $\alpha = \gamma$ , o Fiscal se comporta de acordo com  $\sigma_0^* = (x, y, z, 1 - x - y - z)$  e, portanto, a previsão de resultado é  $[(l_0, l_0), (v_a, v_a)]$  acontecer com probabilidade  $x$ , do resultado  $[(l_0, l_1), (v_b, v_a)]$  acontecer com probabilidade  $y$ ,  $[(l_0, l_2), (v_a, v_b)]$  com probabilidade  $z$  e  $[(l_1, l_2), (v_b, v_b)]$  com probabilidade  $(1 - x - y - z)$ .

O payoff esperado previsto para os jogadores também depende das magnitudes de  $\alpha$  e  $\gamma$ . Quando  $\alpha < \gamma$ , é previsto acontecer o resultado  $o = [(l_1, l_2), (v_b, v_b)]$  com probabilidade 1 e, portanto, a Figura 2 implica que o payoff previsto é  $-2\alpha$  para o Fiscal e 0 para o Condutor. Caso  $\alpha > \gamma$ , é previsto acontecer o resultado  $o = [(l_0, l_0), (v_a, v_a)]$  com probabilidade 1 e, portanto, o payoff previsto é  $-2\gamma$  para o Fiscal e  $2\mu$  para o Condutor. No caso de  $\alpha = \gamma$ , em que o Fiscal se comporta de acordo com  $\sigma_0^* = (x, y, z, 1 - x - y - z)$ , o payoff previsto para o Fiscal é  $-2\alpha = -(\alpha + \gamma) = -2\gamma$  e o payoff esperado previsto para o Condutor é

$$\begin{aligned} x\pi_1(p_0, a_3) + y\pi_1(p_1, a_2) + z\pi_1(p_2, a_1) + (1 - x - y - z)\pi_1(p_3, a_0) \\ = 2\mu x + \mu y + \mu z + 0(1 - x - y - z) = \mu(2x + y + z). \end{aligned}$$

um valor não negativo e não maior do que  $2\mu$ .

O número esperado de fiscalizações é igual a 2 se  $\alpha < \gamma$  e é dado por zero se  $\alpha > \gamma$ . Tal número é incerto quando  $\alpha = \gamma$ , pois ele se iguala  $2(1 - x) - y - z$  quando o comportamento do Fiscal é  $\sigma_1^* = (x, y, z, 1 - x - y - z)$ . Pode tanto chegar ao valor de 2, quando  $x = y = z = 0$ , quanto se igualar a zero, quando  $x = 1$ . Em todos os casos, não há arrecadação de multas, pois os condutores nunca são multados.

## 5. A escolha entre radares fixos e móveis

Considere agora a situação na qual o Fiscal possui a capacidade de fiscalizar cada uma das duas localidades ( $l_1$  e  $l_2$ ) tanto com radares móveis quanto com radares fixos. Para cada localidade, a fiscalização por meio de um radar móvel (portátil) é representada por  $r_p$ , a fiscalização por radar fixo é representado por  $r_f$  e o posicionamento de nenhum radar é denotado por  $r_n$ . Como há duas localidades, a escolha do Fiscal pode ser representada por um par  $r = (r_1, r_2) \in R$ , em que

$$\begin{aligned} R &= \{r_n, r_p, r_f\} \times \{r_n, r_p, r_f\} \\ &= \{(r_n, r_n), (r_n, r_p), (r_n, r_f), (r_p, r_n), (r_p, r_p), (r_p, r_f), (r_f, r_n), (r_f, r_p), (r_f, r_f)\}. \end{aligned}$$

é o conjunto de ações possíveis para o Fiscal. Por exemplo,  $r = (r_p, r_f)$  denota a situação na qual o Fiscal posicionou um radar portátil em  $l_1$  e um radar fixo em  $l_2$ .

Assim como no modelo da seção 4, a utilização ou não de radares fixos e o posicionamento destes na rodovia são informados previamente ao Condutor. No

modelo desta seção, no entanto, esta informação prévia não é suficiente para o Condutor concluir que não há fiscalização nas localidades em que não há radar fixo. Formalmente, o Condutor é capaz de observar previamente quatro diferentes tipos de informação:  $i_0, i_1, i_2, i_3$ . Ao observar  $i_0$ , o Condutor é informado de que o Fiscal escolheu não utilizar radares fixos (ou seja, de que  $r \in \{(r_n, r_n), (r_n, r_p), (r_p, r_n), (r_p, r_p)\}$ ). Após observar  $i_1$ , o Condutor sabe que o Fiscal escolheu usar radar fixo somente em  $l_1$  (ou seja, que  $r \in \{(r_f, r_n), (r_f, r_p)\}$ ). A informação  $i_2$  diz que o Fiscal escolheu usar radar fixo somente em  $l_2$  (ou seja, que  $r \in \{(r_n, r_f), (r_p, r_f)\}$ ). Por fim, ao observar  $i_3$ , o Condutor descobre que o Fiscal escolheu usar radar fixo em todas as localidades (ou seja, que  $r = (r_f, r_f)$ ).

A árvore de decisão apresentada na [Figura 4](#) ilustra de maneira bastante conveniente (na *forma extensiva*) a nova situação estratégica na qual estão envolvidos o Fiscal (jogador 0) e o Condutor (jogador 1). O jogador 0 (Fiscal) inicia o jogo escolhendo o padrão de fiscalização com radares fixos: usar nenhum radar fixo ( $i_0$ ), fiscalizar com radar fixo somente em  $l_1$  (padrão denotado por  $i_1$ ), fiscalizar com radar fixo somente em  $l_2$  (padrão denotado por  $i_2$ ) e fiscalizar com radar fixo em todas as localidades ( $i_3$ ). Quando o padrão escolhido para a fiscalização com radares fixos é  $i_3$ , o Condutor observa a presença de radares fixos em todas as localidades e, em seguida, escolhe sua agenda de velocidade:  $a_0, a_1, a_2$  ou  $a_3$ . Sob os demais padrões de fiscalização com radares fixos ( $i_0, i_1$  e  $i_2$ ), o Fiscal joga novamente escolhendo o padrão de fiscalização com radares móveis (portáteis) para as localidades sem radar fixo. Como o Condutor não é informado previamente sobre o posicionamento dos eventuais radares portáteis, sua escolha de agenda de velocidade nestes demais casos é feita de maneira simultânea com a escolha de posicionamento dos radares portáteis.

A simultaneidade da escolha de agenda de velocidade com a escolha de posicionamento de radares móveis é representada na [Figura 4](#) pelas linhas pontilhadas conectando nós de decisão da árvore. Por exemplo, para indicar que o Condutor não sabe a escolha que o Fiscal fez entre  $(r_f, r_n)$  e  $(r_f, r_p)$  após escolher  $i_1$ , os dois nós de decisão do Condutor que são consequência de  $(r_f, r_n)$  e  $(r_f, r_p)$  estão conectados por linhas pontilhadas.

Os conjuntos de nós de decisão conectados por linhas pontilhadas na representação do jogo na Forma Extensiva são usualmente denominados como *conjunto de informação*. Nesta linguagem, o conjunto de informação do Condutor após  $i_1$  indica que, quando o Condutor é convocado a jogar após observar  $i_1$ , ele não sabe se ele foi convocado a jogar no nó de decisão consequente a escolha  $(r_f, r_n)$  ou no nó de decisão implicado pela escolha  $(r_f, r_p)$ .

Analogamente, o conjunto de informação do Condutor após  $i_2$  indica que, quando o Condutor é convocado a jogar após observar  $i_2$ , ele não sabe se foi convocado a jogar no nó de decisão consequente de  $(r_n, r_f)$  ou no nó de decisão implicado por  $(r_p, r_f)$ . Já o conjunto de informação do Condutor após observar  $i_0$

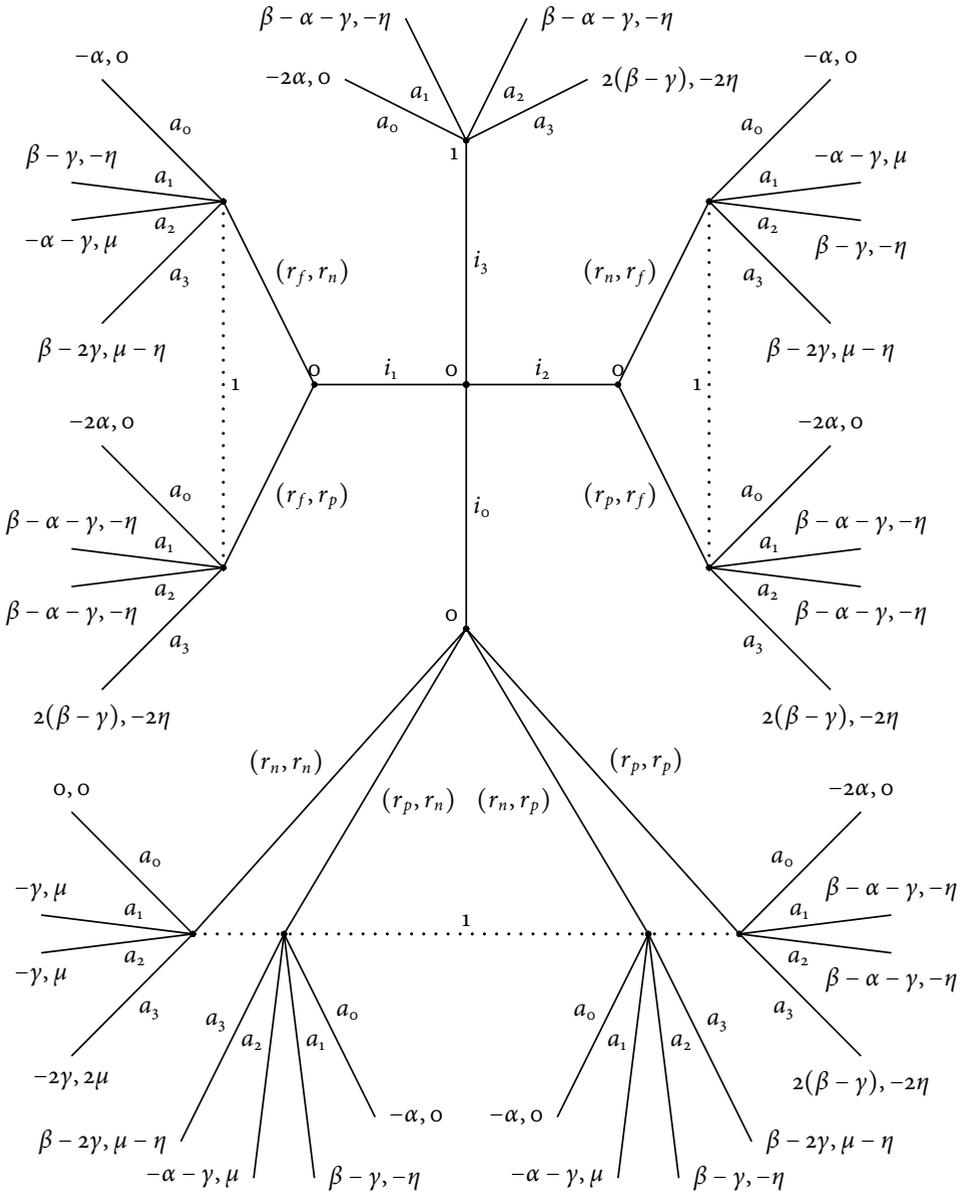


Figura 4. Fiscalização via radares fixos e portáteis

é mais complexo, pois envolve quatro nós de decisão. Tal conjunto de informação indica que, quando o Condutor é convocado a jogar após observar  $i_0$ , ele não sabe em qual nó de decisão foi convocado a jogar: naquele consequente a  $(r_n, r_n)$ , naquele implicado por  $(r_p, r_n)$ , naquele após  $(r_n, r_p)$  ou no nó de decisão implicado por  $(r_p, r_p)$ .

O jogo apresentado na Figura 4 é um jogo dinâmico de dois estágios e possui quatro subjogos. Há um subjogo trivial após  $i_3$ , no qual somente o Condutor joga. Os demais três subjogos são jogos simultâneos entre o Fiscal e o Condutor. Por conveniência, todos os subjogos são apresentados na Figura 5 representados na Forma Normal.

O Equilíbrio de Nash no subjogo após  $i_3$  é trivialmente dado por  $[(r_f, r_f), (v_b, v_b)]$  e confere ao Fiscal o nível de payoff  $-2\alpha$  e ao Condutor payoff nulo. Os equilíbrios de Nash do subjogo após  $i_0$  podem ser obtidos utilizando a Proposição 2, ao notar que a matriz de payoffs da Figura 5(d) coincide com (14). A Proposição 2 estabelece que em todo equilíbrio de Nash de (14) o Fiscal escolhe fiscalizar cada localidade com probabilidade  $\delta$  e o Condutor escolhe exceder  $\bar{v}$  em cada localidade com probabilidade  $\theta$ . Então, a coincidência dos payoffs da Figura 5(d) com aqueles em (14) permite concluir que, em todo equilíbrio de Nash do subjogo após  $i_0$ , o Fiscal posiciona um radar portátil em cada localidade com probabilidade  $\delta$  e o Condutor excede  $\bar{v}$  em cada localidade com probabilidade  $\theta$ . Como consequência, o subjogo após  $i_0$  possui como equilíbrio de Nash somente as previsões  $\sigma^0 = (\sigma_0^0, \sigma_1^0)$  tais que

$$\begin{aligned}\sigma_0^0 &= [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - \delta, x, x, \delta - x) \\ \sigma_1^0 &= [\sigma_1^0(a_0), \sigma_1^0(a_1), \sigma_1^0(a_2), \sigma_1^0(a_3)] = (1 - \theta - y, y, y, \theta - y).\end{aligned}$$

para algum  $(x, y)$  tal que  $0 \leq x \leq \min\{\delta, 1 - \delta\}$  e  $0 \leq y \leq \min\{1 - \theta, \theta\}$ . Conforme documentado no Corolário 1, o payoff esperado do Fiscal em cada um destes equilíbrios é dado por  $-2\gamma\theta$ . Já o payoff esperado do Condutor em todo equilíbrio deste subjogo é nulo.

Para o cálculo do(s) equilíbrio(s) de Nash no subjogo após  $i_2$ , observe que o payoff que o Condutor obtém escolhendo  $a_0$  é estritamente maior do que aquele obtido escolhendo  $a_2$ , independentemente da escolha do Fiscal. Neste caso, a estratégia “jogar  $a_2$  com probabilidade 1” é dita *estratégia estritamente dominada* pela estratégia “jogar  $a_0$  com probabilidade 1”. Com base neste fato e na propriedade destacada na Observação 1,<sup>10</sup> a estratégia “jogar  $a_2$  com probabilidade 1” pode ser ignorada no cálculo do(s) equilíbrio(s) de Nash no subjogo após  $i_2$ . Na verdade, toda estratégia do Condutor que atribui probabilidade estritamente positiva para  $a_2$  pode ser ignorada neste cálculo, pois cada uma de tais estratégias é estritamente dominada pela estratégia obtida ao transferir para a ação  $a_0$  a probabilidade atribuída a  $a_2$ . Na prática, esta última observação estabelece que a terceira coluna da Figura 5(b) pode ser ignorada pelo cálculo do(s) equilíbrio(s) de Nash no subjogo após  $i_2$ .

<sup>10</sup>Para mais detalhes sobre tal propriedade, ver Gibbons (1992).

(a) Subjogo após  $i_3$

Conductor

		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Fiscal	$(r_f, r_f)$	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$

(b) Subjogo após  $i_2$

Conductor

		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Fiscal	$(r_n, r_f)$	$-\alpha, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - \gamma, -\eta$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	$(r_p, r_f)$	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$

(c) Subjogo após  $i_1$

Conductor

		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Fiscal	$(r_f, r_n)$	$-\alpha, 0$	$\beta - \gamma, -\eta$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	$(r_f, r_p)$	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$

(d) Subjogo após  $i_0$

Conductor

		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Fiscal	$(r_n, r_n)$	$0, 0$	$-\gamma, \mu$	$-\gamma, \mu$	$-2\gamma, 2\mu$
	$(r_p, r_n)$	$-\alpha, 0$	$\beta - \gamma, -\eta$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	$(r_n, r_p)$	$-\alpha, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - \gamma, -\eta$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	$(r_p, r_p)$	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$

**Figura 5.** Representação na Forma Normal de cada subjogo da Figura 4

*Observação 1.* Como toda estratégia componente de Equilíbrio de Nash precisa ser melhor resposta para a estratégia dos demais jogadores e estratégias estritamente dominadas nunca são melhor resposta, então nenhuma estratégia estritamente dominada pode compor equilíbrios de Nash.

Por razão similar, a quarta coluna da Figura 5(b) pode ser ignorada pelo cálculo do(s) equilíbrio(s) de Nash no subjogo após  $i_2$ , pois o payoff que o Conductor obtém escolhendo  $a_1$  é estritamente maior do que aquele obtido escolhendo  $a_3$ , independentemente da escolha do Fiscal. A matriz de payoffs obtida ao ignorar as colunas três e quatro da Figura 5(b) é apresentada a seguir.

		Condutor		
		$a_0$	$a_1$	
Fiscal	$(r_n, r_f)$	$-\alpha, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu$	(22)
	$(r_p, r_f)$	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	

Agora observe que o custo de oportunidade do radar fixo pode ser ignorado no cálculo de equilíbrios de Nash de (22), uma vez que ele não afeta o diferencial de payoff entre as escolhas  $(r_n, r_f)$  e  $(r_p, r_f)$ . Tal propriedade permite somar  $\alpha$  no payoff do Fiscal em cada resultado possível de (22) sem alterar o conjunto de equilíbrios de Nash. Esta modificação da matriz (22), no entanto, resulta nos mesmos pares de payoffs apresentados em (11). Como a Proposição 1 estabelece que no único Equilíbrio de Nash de (11) o Condutor escolhe a segunda coluna com probabilidade  $\theta$  e o Fiscal escolhe a segunda linha com probabilidade  $\delta$ , então pode-se concluir que (22) possui um único Equilíbrio de Nash e que neste equilíbrio o Fiscal escolhe  $(r_p, r_f)$  com probabilidade  $\delta$  e o Condutor escolhe  $a_1 = (v_a, v_b)$  com probabilidade  $\theta$ . Como consequência, o subjogo após  $i_2$  possui como equilíbrio de Nash somente  $\sigma^2 = (\sigma_0^2, \sigma_1^2)$  tal que  $\sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta)$  e  $\sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0)$ . O payoff esperado do Fiscal neste equilíbrio pode ser obtido subtraindo o custo de oportunidade do radar fixo ( $\alpha$ ) de (12): ele é dado por  $-\gamma\theta - \alpha = -\theta(\gamma + \alpha + \beta)$ . Já o payoff esperado do Condutor neste equilíbrio é novamente nulo, pois ele coincide com (13).

O cálculo do(s) equilíbrio(s) de Nash no subjogo após  $i_1$  utiliza argumentação análoga. As colunas segunda e quarta podem ser ignoradas pelo cálculo, pois a estratégia pura  $a_1$  é estritamente dominada por  $a_0$  e a estratégia pura  $a_3$  é estritamente dominada por  $a_2$ . A matriz resultante da Figura 5(c) após ignorar as colunas dois e quatro e somar  $\alpha$  no payoff do Fiscal nas colunas um e três coincide com a matriz de payoffs (11). Assim, o subjogo após  $i_1$  possui como equilíbrio de Nash somente  $\sigma^1 = (\sigma_0^1, \sigma_1^1)$  tal que  $\sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta)$  e  $\sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0)$ . Novamente, o payoff esperado do Fiscal neste equilíbrio pode ser obtido subtraindo  $\alpha$  de (12) para obter  $-\gamma\theta - \alpha = -\theta(\gamma + \alpha + \beta)$  e o payoff esperado do Condutor é nulo, pois coincide com (13).

A discussão acima mostra que em todo equilíbrio de Nash de todos os subjogos, o payoff esperado do Condutor é nulo. O payoff esperado do Fiscal é  $-2\alpha$  no equilíbrio de Nash do subjogo após  $i_3$  e se iguala a  $-\theta(\gamma + \alpha + \beta)$  em todos os equilíbrios de Nash dos subjogos implicados por  $i_1$  e  $i_2$ . Nos equilíbrios de Nash do subjogo após  $i_0$ , o payoff esperado do Fiscal é dado por  $-2\theta\gamma$ . Antecipando tais níveis de satisfação em cada subjogo, o Fiscal escolhe o padrão de fiscalização com radares fixos  $s_0 \in \{i_0, i_1, i_2, i_3\}$  para maximizar seu payoff esperado. Por exemplo, ele escolhe  $i_0$  quando  $\gamma < \alpha + \beta$ , pois neste caso  $-2\theta\gamma > -2\alpha$  e  $-2\theta\gamma > -\theta(\gamma + \alpha + \beta)$ . Por outro lado, o Fiscal escolhe  $i_3$  se  $\gamma > \alpha + \beta$ , pois neste caso  $-2\alpha > -2\theta\gamma$  e  $-2\alpha > -\theta(\gamma + \alpha + \beta)$ . No caso em que  $\gamma = \alpha + \beta$ , o Fiscal está indiferente entre todos

os padrões de fiscalização com radares fixos. A Proposição 4 reúne os resultados obtidos até aqui.

**Proposição 4.** *A previsão  $\sigma = [(s_0, \sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2), (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)]$  para o jogo apresentado na Figura 4 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se, e somente se,  $s_0$  satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\}, & \text{se } \gamma < \alpha + \beta, \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\}, & \text{se } \gamma = \alpha + \beta, \\ \{i_3\}, & \text{se } \gamma > \alpha + \beta, \end{cases}$$

ao mesmo tempo em que  $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$  e  $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$  satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_1^3 = [\sigma_1^3(a_0), \sigma_1^3(a_1), \sigma_1^3(a_2), \sigma_1^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0); \\ \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta), \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0); \\ \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta), \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0); \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - \delta, x, x, \delta - x), \\ \sigma_1^0 = [\sigma_1^0(a_0), \sigma_1^0(a_1), \sigma_1^0(a_2), \sigma_1^0(a_3)] = (1 - \theta - y, y, y, \theta - y); \end{cases}$$

para algum  $(x, y)$  tal que  $0 \leq x \leq \min \{\delta, 1 - \delta\}$  e  $0 \leq y \leq \min \{1 - \theta, \theta\}$ .

O resultado de equilíbrio com perfeição em subjogos quando  $\gamma > \alpha + \beta$  é o Fiscal escolher usar radares fixos em todas as localidades ( $s_0 = i_3$ ) e o Condutor respeitar o limite  $\bar{v}$  em todas as localidades ( $\sigma_1^3 = (1, 0, 0, 0)$ ). O resultado de equilíbrio com perfeição em subjogos quando  $\gamma < \alpha + \beta$  é o Fiscal escolher não usar radares fixos ( $s_0 = i_0$ ) e fiscalizar cada localidade usando radares portáteis com probabilidade  $\delta$  (pois  $\sigma_0^0 = (1 - x - \delta, x, x, \delta - x)$  para algum  $x$  tal que  $0 \leq x \leq \min \{\delta, 1 - \delta\}$ ), enquanto o Condutor excede o limite  $\bar{v}$  em cada localidade com probabilidade  $\theta$  (pois,  $\sigma_1^0 = (1 - \theta - y, y, y, \theta - y)$  para algum  $y$  tal que  $0 \leq y \leq \min \{1 - \theta, \theta\}$ ).

O payoff esperado do Fiscal é igual a  $\max \{-2\alpha, -2\gamma\theta\}$ : ele é dado por  $-2\alpha$  quando  $\gamma > \alpha + \beta$  e por  $-2\gamma\theta = -2\gamma\alpha/(\alpha + \beta)$  quando  $\gamma \leq \alpha + \beta$ . Já o payoff esperado do Condutor é sempre nulo. O número esperado de fiscalizações é igual a 2 quando  $\gamma > \alpha + \beta$ , todas elas utilizando radar fixo, e se iguala a  $2\delta$  quando  $\gamma < \alpha + \beta$ , todas elas usando radar móvel. Quando  $\gamma = \alpha + \beta$ , são indeterminados a quantidade esperada de fiscalizações (podendo assumir qualquer valor entre  $2\delta$  e 2) e o formato de fiscalização (qualquer combinação de radares fixos e móveis é possível). O conceito de boa previsão aqui utilizado não é capaz de determinar estas variáveis neste caso. Não há excessos de velocidade quando  $\gamma > \alpha + \beta$ , mas

a quantidade esperada de excessos de velocidade é dada por  $2\theta$  quando  $\gamma < \alpha + \beta$ . Não há autuações (multas) quando  $\gamma > \alpha + \beta$ , mas a quantidade esperada de multas é dada por  $2\theta\delta$  quando  $\gamma < \alpha + \beta$ . Estas informações são apresentadas de forma mais conveniente na [Tabela 2](#) para os três principais casos analisados.

### 5.1 Os efeitos da proibição

Na linguagem estabelecida pelo modelo aqui desenvolvido, a proibição do uso de radares móveis — com a manutenção da opção de fiscalização com radares fixos — determina que a situação estratégica entre a fiscalização e os condutores é dada pelo jogo dinâmico apresentado na [seção 4](#). A situação estratégica inicial, na qual existe a possibilidade de utilização concomitante de radares fixos e radares móveis, é dada pelo jogo dinâmico da [seção 5](#). Portanto, a comparação entre as previsões de equilíbrio para os modelos destas seções evidencia os efeitos previstos para tal proibição. A [Tabela 2](#) a seguir apresenta uma seleção de variáveis de interesse.

**Tabela 2.** Efeitos da proibição de radares móveis sobre a previsão  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*)$

Conjunto de possíveis valores para $\gamma$		$(0, \alpha)$		$(\alpha, \alpha + \beta)$		$(\alpha + \beta, \infty)$	
		sim	não	sim	não	sim	não
Permitido radar móvel							
Fiscalizações esperadas	$E(n)$	$2\delta$	0	$2\delta$	2	2	2
Autuações esperadas	$E(m)$	$2\theta\delta$	0	$2\theta\delta$	0	0	0
Excessos esperados	$E(e)$	$2\theta$	2	$2\theta$	0	0	0
Payoff do Fiscal	$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$	$-2\gamma\theta$	$-2\gamma$	$-2\gamma\theta$	$-2\alpha$	$-2\alpha$	$-2\alpha$
Payoff do Condutor	$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$	0	$2\mu$	0	0	0	0

A [Tabela 2](#) apresenta o valor previsto (de equilíbrio) para cinco variáveis: o payoff de cada jogador, a quantidade de fiscalizações esperadas, o número de multas esperado e o número esperado de violações do limite  $\bar{v}$ . Tais valores são apresentados para três casos distintos, definidos de acordo com a relevância relativa dos excessos de velocidade na satisfação da sociedade ( $\gamma$ ): o primeiro caso é definido por  $\gamma \in (0, \alpha)$ , o segundo por  $\gamma \in (\alpha, \alpha + \beta)$  e o terceiro por  $\gamma \in (\alpha + \beta, \infty)$ .

Observe que a proibição possui nenhum efeito sobre o equilíbrio no terceiro caso, quando o  $\gamma$  é suficientemente alto. Neste caso, o elevado impacto dos excessos de velocidade na satisfação da sociedade motiva o uso de somente radares fixos como forma de eliminar qualquer violação de  $\bar{v}$ , independentemente da disponibilidade ou não de radares móveis para a fiscalização. Assim, a proibição não afeta os dois jogadores.

Para valores intermediários de  $\gamma$ , a proibição não afeta a satisfação esperada do Condutor, mas reduz o payoff esperado do Fiscal. Antes da proibição, o Fiscal prefere utilizar somente radares móveis e, desta forma, impede o Condutor de auferir satisfação esperada positiva. Em resposta, o melhor que o Condutor pode

fazer nesta situação lhe confere payoff esperado nulo.<sup>11</sup> Logo, a proibição neste caso impede o Fiscal de adotar sua estratégia preferida. Como segunda melhor opção, o Fiscal opta por intensificar a fiscalização ao instalar radares fixos em todas as localidades: o número esperado de fiscalizações se eleva de  $2\delta$  para 2, o que motiva a interrupção de excessos de velocidade e, portanto, de autuações. Observe que a atratividade em manter a fiscalização após a proibição se deve ao ainda relevante custo de satisfação imposto pelos excessos de velocidade — quando comparado ao custo de fiscalização  $\alpha$ .

Quando o custo  $\gamma$  é suficientemente baixo, por outro lado, a proibição do uso de radares móveis elimina por completo a fiscalização de velocidade. O número esperado de fiscalizações cai de  $2\delta$  para zero, o que motiva a elevação dos excessos de velocidade de  $2\theta$  para 2. Como não ocorre fiscalização, este aumento de excessos não se reflete em aumento de autuações: o número esperado de autuações se reduz de  $2\theta\delta$  para zero. Assim como no caso de custo  $\gamma$  intermediário, a satisfação esperada do Fiscal é novamente reduzida pela proibição e pelo mesmo motivo: ela impede o Fiscal de utilizar seu instrumento de fiscalização preferido. A segunda melhor opção para o Fiscal quando  $\gamma$  é baixo, no entanto, é arrefecer a fiscalização. A atratividade em interromper a fiscalização após a proibição se deve a baixa relevância do custo de satisfação imposto pelos excessos de velocidade — quando comparado ao agora relevante custo de fiscalização  $\alpha$ .

A interrupção de fiscalização prevista para o caso com  $\gamma$  baixo, e consequentes aumento de excessos e redução de multas, confere ao Condutor um aumento de satisfação esperada de  $2\mu$  unidades. Como esta é a única situação para a qual o modelo prevê elevação na satisfação dos condutores e a proibição foi interpretada neste trabalho como motivada em atender o interesse de uma parte dos condutores-eleitores, as previsões apresentadas pela [Tabela 2](#) para o caso  $\gamma \in (0, \alpha)$  podem ser vistas como a previsão do atual modelo para a política pública adotada no Brasil a partir de agosto de 2019.

A previsão de *completa* eliminação de fiscalização após a proibição é consequência da hipótese simplificadora de que todas as localidades são idênticas. Com isto, não é útil interpretá-la de forma literal. Presumivelmente, uma extensão deste modelo para o caso com heterogeneidade entre as localidades geraria previsões menos extremas. Por exemplo, poder-se-ia reconhecer no modelo que o excesso de velocidade afeta a probabilidade e severidade de acidentes de maneira distinta em localidades distintas. Esta heterogeneidade poderia ser modelada admitindo que o excesso de velocidade afeta a sociedade de maneira distinta a depender da localidade na qual  $\bar{v}$  foi violado. Ou seja, poderia ser modelada atribuindo  $\gamma$ 's distintos para localidades distintas. Com base nos dois primeiros casos da [Tabela 2](#), espera-se

---

<sup>11</sup>Note que o Condutor é sempre capaz de assegurar payoff nulo escolhendo não exceder  $\bar{v}$  nas duas localidades. Ainda, o Fiscal é sempre capaz de impedir satisfação positiva para o Condutor por meio da utilização de radares fixos em todas as localidades.

que a coexistência de localidades pouco perigosas ( $\gamma$  baixo) com localidades muito perigosas ( $\gamma$  alto) motive o Fiscal a responder a proibição intensificando a fiscalização nas localidades mais perigosas e arrefecendo-a nas localidades mais seguras.

Assim, a previsão do modelo desenvolvido neste trabalho para os efeitos da proibição de radares móveis pode ser interpretada como *uma previsão de intensificação no uso de radares fixos nas localidades mais perigosas e abandono de fiscalização naquelas mais seguras*.

## 6. Considerações Finais

O ferramental usual de Teoria dos Jogos se mostrou bastante versátil para analisar a proibição de radares móveis que vigorou no Brasil em 2019 entre meados de agosto e meados de dezembro. A consideração nesta análise da dimensão *estratégica* entre o Fiscal e os condutores se inspira na argumentação de Bjørnskau e Elvik (1992). Uma interessante contribuição seria analisar os efeitos da proibição utilizando um modelo no qual os condutores não reconhecem o efeito de suas decisões sobre as decisões do Fiscal. Somente o Fiscal reconheceria que seu comportamento afetaria o comportamento dos demais agentes. Este exercício seria uma forma transparente de analisar a provocação de Bjørnskau e Elvik (1992) à abordagem de Palmer (1977), sob a qual os potenciais infratores não reconhecem seu efeito sobre o padrão de fiscalização.

Conforme discutido na subseção 5.1, a heterogeneidade entre localidades é um ingrediente interessante a ser incluído no atual modelo por pesquisa futura. A tratabilidade do modelo aqui obtida sugere que tal extensão é direta e que confirmaria em definitivo o cabimento da interpretação dada ao resultado da Tabela 2. Outra extensão natural do modelo seria aumentar o número de localidades nas quais há limite de velocidade. Esta generalização poderia ser usada para analisar a importância do alcance geográfico limitado dos radares, conforme identificado pelos trabalhos empíricos citados na seção 1.

Uma generalização do modelo aparentemente não trivial seria relaxar a hipótese de linearidade das utilidades utilizada em (8) e (9). A princípio, a possibilidade de não linearidade de  $u_1(\cdot)$  em  $e$  poderia ser explorada para estudar o fenômeno identificado por Yamada (2005), no qual os condutores aceleram após os radares para (supostamente) compensar o tempo perdido ao respeitar o limite no radar.<sup>12</sup> Ainda mais crucial, a possibilidade de não linearidade de  $u_0(\cdot)$  em  $e$  poderia ser explorada a fim de refletir na satisfação da sociedade a presença de externalidades na decisão de excesso de velocidade. É natural imaginar que os condutores não levam

---

<sup>12</sup>Se o condutor possui uma meta de tempo de viagem que demanda velocidade média acima de  $\bar{v}$ , então a presença de radares em uma parte da rodovia reduz sua velocidade média para abaixo de  $\bar{v}$  e, assim, aumenta a atratividade de excessos de velocidade nos demais trechos da rodovia. A linearidade de  $u_1(\cdot)$  em  $e$  parece ser inadequada para estudar fenômenos deste tipo.

em conta *todo* o efeito de sua decisão na probabilidade de acidentes dos demais condutores.<sup>13</sup>

Como contribuição central, este trabalho evidencia a principal consequência teórica prevista para a proibição de radares móveis. Além disso, as possibilidades de adaptação do presente modelo para analisar diferentes questões ilustram a importância do avanço teórico obtido com este trabalho para o tema em questão.

De um ponto de vista abstrato, o presente modelo de interação estratégica para a fiscalização de trânsito se insere em uma discussão mais geral sobre a intervenção do Estado na decisão privada de alocação de risco. Proponentes de legislação contra o consumo de drogas ou pela redução do açúcar em refrigerantes, por exemplo, acreditam que é dever do Estado proteger os cidadãos deles mesmos. A visão mais evidente do debate seria o Estado protegendo crianças desinformadas, mas é provável que muitos acreditam que mesmo os adultos precisam de ajuda para não se colocarem em risco. Assim, a alocação de risco, em um contexto de dificuldade de comprometimento para com boas práticas, poderia ser um elemento para pesquisa futura baseando-se no ferramental do modelo atual.

## Referências bibliográficas

- Aarts, L., & Van Schagen, I. (2006). Driving speed and the risk of road crashes: A review. *Accident Analysis & Prevention*, 38(2), 215–224. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aap.2005.07.004>
- Andrade, S. S. C. d. A., & Jorge, M. H. P. d. M. (2017). Internações hospitalares por lesões decorrentes de acidente de transporte terrestre no Brasil, 2013: Permanência e gastos. *Epidemiologia e Serviços de Saúde*, 26(1), 31–38. <http://dx.doi.org/10.5123/s1679-49742017000100004>
- Bacchieri, G., & Barros, A. J. D. (2011). Acidentes de trânsito no Brasil de 1998 a 2010: Muitas mudanças e poucos resultados. *Revista de Saúde Pública*, 45(5), 949–963. <http://dx.doi.org/10.1590/S0034-89102011005000069>
- Bem Paraná. (2019, 06 de novembro). Deputados seguem Bolsonaro e querem proibir radares móveis em rodovias estaduais. *Bem Paraná*. <https://www.bemparana.com.br/noticia/deputados-seguem-bolsonaro-e-querem-proibir-radares-moveis-em-rodovias-estaduais>
- Bjørnskau, T., & Elvik, R. (1992). Can road traffic law enforcement permanently reduce the number of accidents? *Accident Analysis & Prevention*, 24(5), 507–520. [http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575\(92\)90059-R](http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575(92)90059-R)
- Connolly, T., & Åberg, L. (1993). Some contagion models of speeding. *Accident Analysis & Prevention*, 25(1), 57–66. [http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575\(93\)90096-F](http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575(93)90096-F)

---

<sup>13</sup>Segundo Bjørnskau e Elvik (1992), se referindo aos resultados de Nääänen e Summala (1976) e de Summala (1988), os condutores sequer levam em conta o efeito de suas ações na probabilidade de se envolverem em acidentes.

- DOU.** (2019). Despachos do Presidente da República. *Diário Oficial da União*(157).  
<https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/despachos-do-presidente-da-republica-210740855>
- Elvik, R.** (2014). A review of game-theoretic models of road user behaviour. *Accident Analysis & Prevention*, 62, 388–396. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aap.2013.06.016>
- Estadão Conteúdo.** (2019). Tarcísio de Freitas afirmou que renegociação dos contratos para instalação nas rodovias teve uma redução de dois terços no valor. *Exame*.  
<https://exame.abril.com.br/brasil/nao-vai-ter-mais-radar-escondido-diz-ministro-da-infraestrutura>
- Fowles, R., & Loeb, P. D.** (1989). Speeding, coordination, and the 55-mph limit: Comment. *The American Economic Review*, 79(4), 916–921.  
<https://www.jstor.org/stable/1827947>
- Gibbons, R.** (1992). *Game theory for applied economists*. Princeton University Press.
- Harsanyi, J. C.** (1967). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III, Part I: The basic model. *Management science*, 14(3), 159–182.  
<https://www.jstor.org/stable/2628393>
- Harsanyi, J. C.** (1968a). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, Part II: Bayesian equilibrium points. *Management Science*, 14(5), 320–334.  
<https://www.jstor.org/stable/2628673>
- Harsanyi, J. C.** (1968b). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, Part III: The basic probability distribution of the game. *Management Science*, 14(7), 486–502. <https://www.jstor.org/stable/2628894>
- Lave, C. A.** (1985). Speeding, coordination, and the 55 mph limit. *The American Economic Review*, 75(5), 1159–1164. <https://www.jstor.org/stable/1818655>
- Lobel, F., & Santos, B.** (2018). Descontrole com motos é entrave para Bolsonaro reduzir matança no trânsito. *Folha de São Paulo*.  
<https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2018/12/descontrole-com-motos-e-entrave-para-bolsonaro-reduzir-matanca-no-transito.shtml>
- Moreira, M. R., Ribeiro, J. M., Motta, C. T., & Motta, J. I. J.** (2018). Mortalidade por acidentes de transporte de trânsito em adolescentes e jovens, Brasil, 1996–2015: Cumpriremos o ODS 3.6? *Ciência & Saúde Coletiva*, 23, 2785–2796.  
<http://dx.doi.org/10.1590/1413-81232018239.17082018>
- Näätänen, R., & Summala, H.** (1976). *Road-user behaviour and traffic accidents*. North-Holland.
- Nash, J. F.** (1950). Equilibrium points in  $n$ -person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), 48–49. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.36.1.48>
- Palmer, J.** (1977). Economic analyses of the deterrent effect of punishment: A review. *Journal of Research in Crime and Delinquency*, 14(1), 4–21.  
<http://dx.doi.org/10.1177/002242787701400102>
- Richter, A.** (2019). Justiça determina que PRF volte a usar radares móveis em rodovias. *Agência Brasil de Notícias*. <http://agenciabrasil.etc.com.br/justica/noticia/2019-12/justica-determina-que-prf-volte-usar-radares-moveis-em-rodovias>

- Ryeng, E. O.** (2012). The effect of sanctions and police enforcement on drivers' choice of speed. *Accident Analysis & Prevention*, 45, 446–454.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.aap.2011.08.010>
- Sorano, V., & Néri, F.** (2019). Bolsonaro determina suspensão de uso de radares móveis em rodovias federais. *G1*. <https://g1.globo.com/carros/noticia/2019/08/15/bolsonaro-determina-suspensao-de-uso-de-radares-moveis-em-rodovias-federais.ghtml>
- Summala, H.** (1988). Risk control is not risk adjustment: The zero-risk theory of driver behaviour and its implications. *Ergonomics*, 31(4), 491–506.  
<http://dx.doi.org/10.1080/00140138808966694>
- Teed, N., Lund, A. K., & Knoblauch, R.** (1993). The duration of speed reductions attributable to radar detectors. *Accident Analysis & Prevention*, 25(2), 131–137.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575\(93\)90052-X](http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575(93)90052-X)
- Theofilatos, A., & Yannis, G.** (2014). A review of the effect of traffic and weather characteristics on road safety. *Accident Analysis & Prevention*, 72, 244–256.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.aap.2014.06.017>
- Vaa, T.** (1997). Increased police enforcement: Effects on speed. *Accident Analysis & Prevention*, 29(3), 373–385. [http://dx.doi.org/10.1016/S0001-4575\(97\)00003-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0001-4575(97)00003-1)
- Wilson, C., Willis, C., Hendrikz, J. K., Le Brocque, R., & Bellamy, N.** (2010). Speed cameras for the prevention of road traffic injuries and deaths. *Cochrane Database of Systematic Reviews*, 11(CD004607).  
<http://dx.doi.org/10.1002/14651858.CD004607.pub4>
- Yamada, M. G.** (2005). *Impacto dos radares fixos na velocidade e na acidentalidade em trecho da rodovia Washington Luís* (Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP).  
<http://dx.doi.org/10.11606/D.18.2005.tde-15022006-204946>
- Zlatoper, T. J.** (1991). Determinants of motor vehicle deaths in the United States: A cross-sectional analysis. *Accident Analysis & Prevention*, 23(5), 431–436.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575\(91\)90062-A](http://dx.doi.org/10.1016/0001-4575(91)90062-A)

## Apêndice. Demonstrações

**Proposição 1.** *A única boa previsão (o único Equilíbrio de Nash) para o jogo (11) é dada por*

$$\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*) = [(1 - \delta), \delta], (1 - \theta, \theta),$$

em que  $\theta \equiv \alpha/(\alpha + \beta) \in (0, 1)$  e  $\delta \equiv \mu/(\eta + \mu) \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* Note que  $0 < \theta < 1$  e  $0 < \delta < 1$  são consequência direta de  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\mu > 0$  e  $\eta > 0$ . Por conveniência, denote  $B_0(\sigma_1) = \arg \max_{\sigma_0 \in \Delta(A_0)} U_0(\sigma_0, \sigma_1)$

e  $B_1(\sigma_0) = \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(A_1)} U_1(\sigma_0, \sigma_1)$ . Usando (3) e (11), note que

$$\begin{aligned}
 U_0(\sigma_0, \sigma_1) &= \sum_{j=0}^1 \sigma_0(l_j) [\sigma_1(v_b)\pi_0(l_j, v_b) + \sigma_1(v_a)\pi_0(l_j, v_a)] \\
 &= \sigma_0(l_0) [0\sigma_1(v_b) - \gamma\sigma_1(v_a)] + \sigma_0(l_1) [-\alpha\sigma_1(v_b) + (\beta - \gamma)\sigma_1(v_a)] \\
 &= -\gamma[1 - \sigma_0(l_1)]\sigma_1(v_a) + \sigma_0(l_1) [-\alpha + (\beta - \gamma + \alpha)\sigma_1(v_a)] \\
 &= -\gamma\sigma_1(v_a) + \sigma_0(l_1) [(\beta + \alpha)\sigma_1(v_a) - \alpha] \\
 &= \sigma_0(l_1) [\sigma_1(v_a) - \theta] (\beta + \alpha) - \gamma\sigma_1(v_a), \\
 U_1(\sigma_0, \sigma_1) &= \sum_{k=a}^b \sigma_1(v_k) [\sigma_0(l_0)\pi_1(l_0, v_k) + \sigma_0(l_1)\pi_1(l_1, v_k)] \\
 &= \sigma_1(v_b) [0\sigma_0(l_0) + 0\sigma_0(l_1)] + \sigma_1(v_a) [\mu\sigma_0(l_0) - \eta\sigma_0(l_1)] \\
 &= \sigma_1(v_a) [\mu - (\eta + \mu)\sigma_0(l_1)] = \sigma_1(v_a) [\delta - \sigma_0(l_1)] (\eta + \mu),
 \end{aligned}$$

em que se usou  $\theta = \alpha/(\alpha + \beta)$ ,  $\delta = \mu/(\eta + \mu)$  e os fatos  $\sigma_0(l_0) + \sigma_0(l_1) = \sigma_0(l_0) + \sigma_0(l_1) = 1$ , os quais decorrem de  $\sigma_0 \in \Delta(A_0)$  e  $\sigma_0 \in \Delta(A_0)$ . Usando a linearidade de  $U_0(\sigma_0, \sigma_1)$  e de  $U_1(\sigma_0, \sigma_1)$ , de forma similar ao executado na prova do Lema 2, obtém-se

$$B_0(\sigma_1) = \arg \max_{\sigma_0 \in \Delta(A_0)} (\sigma_0(l_1) [\sigma_1(v_a) - \theta] (\beta + \alpha)) = \begin{cases} \{(1, 0)\}, & \text{se } \sigma_1(v_a) < \theta, \\ \Delta(A_0), & \text{se } \sigma_1(v_a) = \theta, \\ \{(0, 1)\}, & \text{se } \sigma_1(v_a) > \theta; \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

$$B_1(\sigma_0) = \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(A_1)} (\sigma_1(v_a) [\delta - \sigma_0(l_1)] (\eta + \mu)) = \begin{cases} \{(0, 1)\}, & \text{se } \sigma_0(l_1) < \delta, \\ \Delta(A_1), & \text{se } \sigma_0(l_1) = \delta, \\ \{(1, 0)\}, & \text{se } \sigma_0(l_1) > \delta. \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

Suponha que  $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_1)$  é uma previsão probabilística para o jogo (11) que satisfaz (4) e (5) simultaneamente. Ou seja,  $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*)$  e  $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*)$ . A seguir, será demonstrado que  $\sigma_0^*(l_1) \neq \delta$  gera uma contradição (impossibilidade) e, portanto, não pode ser verdadeira.

- (i) Se  $\sigma_0^*(l_1) < \delta$ , então (A-2) implica que  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(\{v_a\}) = \{(0, 1)\}$ . Logo,  $\sigma_1^* = (0, 1)$  decorre de (5) e, portanto,  $\sigma_1^*(v_a) = 1 > \theta$ . Usando (A-1) e tal resultado, obtém-se  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(\{l_1\}) = \{(0, 1)\}$ . Logo,  $\sigma_0^* = (0, 1)$  decorre de (4) e, portanto, obtém-se a impossibilidade  $\sigma_0^*(l_1) = 1 > \delta > \sigma_0^*(l_1)$ .
- (ii) Se  $\sigma_0^*(l_1) > \delta$ , então (A-2) implica que  $B_1(\sigma_0^*) = \Delta(\{v_b\})$ . Logo,  $\sigma_1^* = (1, 0)$  decorre de (5) e, portanto,  $\sigma_1^*(v_a) = 0 < \theta$ . Usando tal resultado e (A-1), obtém-se  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(\{l_0\})$ . Logo,  $\sigma_0^* = (1, 0)$  decorre de (4) e, portanto, obtém-se a impossibilidade  $\sigma_0^*(l_1) = 0 < \delta < \sigma_0^*(l_1)$ .

Como os casos (i) e (ii) são exaustivos quando  $\sigma_0^*(l_1) \neq \delta$ , então  $\sigma_0^*(l_1) \neq \delta$  gera uma impossibilidade em todos os casos possíveis e, portanto, não pode ser verdadeira.

Conclui-se então que  $\sigma_0^*(l_1) = \delta$ . Tendo em vista que  $\sigma_0^* = (\delta, \delta)$ , o único caso em (A-1) consistente com  $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*)$  é o caso em que  $B_0(\sigma_1^*) = \Delta(A_0)$ . Logo,  $\sigma_1^*(v_a) = \theta$  e  $\sigma_1^* = (\theta, \theta)$ .  $\square$

**Lema 3.** *Considere uma situação do jogo (14) na qual o Fiscal se comporta de acordo com  $\sigma_0$  e o Condutor se comporta de acordo com  $\sigma_1$ . Então,*

$$U_0(\sigma_0, \sigma_1) \frac{\theta}{\alpha} = U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1](\theta/\alpha) + \sigma_0(p_1)[q_1(\sigma_1) - \theta] + \sigma_0(p_2)[q_2(\sigma_1) - \theta] + \sigma_0(p_3)[q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1) - 2\theta],$$

$$U_1(\sigma_0, \sigma_1) \frac{\delta}{\mu} = \sigma_1(a_1)[\delta - q_1(\sigma_0)] + \sigma_1(a_2)[\delta - q_2(\sigma_0)] + \sigma_1(a_3)[2\delta - q_1(\sigma_0) - q_2(\sigma_0)],$$

em que novamente  $\theta = \alpha/(\alpha + \beta) \in (0, 1)$  e  $\delta = \mu/(\mu + \eta) \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* A partir de (14) e (15) note que,

$$\begin{aligned} U_0(\sigma_0, \sigma_1) &= \sum_{i=0}^3 \sigma_0(p_i) \left[ \sum_{j=0}^3 \sigma_1(a_j) \pi_0(p_i, a_j) \right] \\ &= \sigma_0(p_0)[0\sigma_1(a_0) - \gamma[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2)] - 2\gamma\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_1)[- \alpha\sigma_1(a_0) + (\beta - \gamma)\sigma_1(a_1) - (\alpha + \gamma)\sigma_1(a_2) + (\beta - 2\gamma)\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_2)[- \alpha\sigma_1(a_0) - (\alpha + \gamma)\sigma_1(a_1) + (\beta - \gamma)\sigma_1(a_2) + (\beta - 2\gamma)\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_3)[-2\alpha\sigma_1(a_0) + (\beta - \alpha - \gamma)[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2)] + 2(\beta - \gamma)\sigma_1(a_3)]. \end{aligned}$$

Usando  $\sigma_0(p_0) = 1 - \sigma_0(p_1) - \sigma_0(p_2) - \sigma_0(p_3)$  e  $\sigma_1(a_0) = 1 - \sigma_1(a_1) - \sigma_1(a_2) - \sigma_1(a_3)$ , tem-se

$$\begin{aligned} U_0(\sigma_0, \sigma_1) &= -\gamma[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2) + 2\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_1)[- \alpha\sigma_1(a_0) + \beta\sigma_1(a_1) - \alpha\sigma_1(a_2) + \beta\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_2)[- \alpha\sigma_1(a_0) - \alpha\sigma_1(a_1) + \beta\sigma_1(a_2) + \beta\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_3)[-2\alpha\sigma_1(a_0) + (\beta - \alpha)[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2)] + 2\beta\sigma_1(a_3)] \\ &= -\gamma[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2) + 2\sigma_1(a_3)] \\ &\quad + \sigma_0(p_1) \left[ q_1(\sigma_1) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] (\alpha + \beta) + \sigma_0(p_2) \left[ q_2(\sigma_1) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] (\alpha + \beta) \\ &\quad + \sigma_0(p_3) \left[ q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1) - 2\frac{\alpha}{\beta + \alpha} \right] (\alpha + \beta). \end{aligned} \tag{A-3}$$

O primeiro resultado do Lema é equivalente a (A-3), pois  $\theta = \alpha/(\alpha + \beta)$ . Agora observe que a partir de (14) e (15) se obtém

$$\begin{aligned}
 & U_1(\sigma_0, \sigma_1) \\
 &= \sum_{j=0}^3 \sigma_1(a_j) \left[ \sum_{i=0}^3 \sigma_0(p_i) \pi_1(p_i, a_j) \right] \\
 &= \sigma_1(a_0) [0\sigma_0(p_0) + 0\sigma_0(p_1) + 0\sigma_0(p_2) + 0\sigma_0(p_3)] \\
 &\quad + \sigma_1(a_1) [\mu\sigma_0(p_0) - \eta\sigma_0(p_1) + \mu\sigma_0(p_2) - \eta\sigma_0(p_3)] \\
 &\quad + \sigma_1(a_2) [\mu\sigma_0(p_0) + \mu\sigma_0(p_1) - \eta\sigma_0(p_2) - \eta\sigma_0(p_3)] \\
 &\quad + \sigma_1(a_3) [2\mu\sigma_0(p_0) + (\mu - \eta) [\sigma_0(p_1) + \sigma_0(p_2)] - 2\eta\sigma_0(p_3)] \\
 &= \sigma_1(a_2) \left[ \frac{\mu}{\eta + \mu} - q_2(\sigma_0) \right] (\eta + \mu) + \sigma_1(a_1) \left[ \frac{\mu}{\eta + \mu} - q_1(\sigma_0) \right] (\eta + \mu) \\
 &\quad + \sigma_1(a_3) \left[ 2\frac{\mu}{\eta + \mu} - q_1(\sigma_0) - q_2(\sigma_0) \right] (\eta + \mu), \tag{A-4}
 \end{aligned}$$

em que a última igualdade usa  $\sigma_0(p_0) = 1 - \sigma_0(p_1) - \sigma_0(p_2) - \sigma_0(p_3)$ . O segundo resultado do Lema é equivalente a (A-4), pois  $\delta = \mu/(\mu + \eta)$ .  $\square$