

# A DURATION E UM MODELO ALTERNATIVO: um teste empírico

**Luiz Francisco Rogé Ferreira**

Economista pela USP, Mestrando em Finanças Públicas na EAESP/FGV e Consultor Financeiro.  
E-mail: lroge@uol.com.br

**Ricardo Soares de Andrade**

Economista pela UFMG, Mestrando em Finanças na EAESP/FGV e Consultor de Empresas.  
E-mail: r.andrade@spi.com.br

**RESUMO:** Estratégias de *hedge* para portfólios de renda fixa são comumente baseadas na *duration*. Esse conceito foi desenvolvido tendo como pressuposto que alterações nas taxas de juros serão constantes para toda a estrutura a termo da *yield curve*, ou seja, que os deslocamentos na *yield curve* serão paralelos. Este artigo pretende testar esse pressuposto para o mercado futuro de DI1 da BM&F, tendo como base o ano de 1996. Além disso, o artigo compara estratégias de *hedge* baseadas na *duration* com estratégias cujo balanceamento é dado por um modelo alternativo que incorpora os efeitos de deslocamentos não-paralelos na *yield curve*.

**ABSTRACT:** Hedging strategies for bond portfolios are usually based on the concept of duration. This concept considers that shifts in the yield curve are the same for all the term structure of interest rates, which means that shifts in the yield curve are parallel. This article intends to test this assumption using the BM&F's interest rate future market in 1996. It also compares hedging strategies based on duration to hedging strategies based on an alternative model, which considers the effects of non-parallel shifts in the yield curve.

**PALAVRAS-CHAVE:** *duration*, portfólio de renda fixa, *hedge*, *yield curve*, balanceamento.

**KEY WORDS:** *duration*, bond portfolio, *hedge*, *yield curve*, balance.

## INTRODUÇÃO

Em um artigo publicado em 1938, F. R. Macaulay (1938) definiu pela primeira vez o conceito de *duration*. Hoje, quase 60 anos depois, esse conceito ainda continua sendo muito utilizado na administração de portfólios de títulos de renda fixa.

O retorno de um título de renda fixa é proporcionado pelos juros pagos por esse título e por mudanças no seu preço. Os juros pagos são definidos previamente e não constituem fonte de incerteza para o investidor. Já as mudanças de preços podem ser provocadas por:

- passagem do tempo: nesse caso, a mudança no preço também não constitui fonte de incerteza para o investidor, visto que tal alteração pode perfeitamente ser calculada e antecipada.
- alterações nas taxas de juros: deslocamentos na *yield curve* implicam alterações na taxa de desconto dos retornos futuros do título, alterando seu valor presente. Como na grande maioria das vezes modificações nas taxas de juros não podem ser antecipadas pelos agentes econômicos, é exatamente nesse fator que reside a maior parte do risco relacionado aos títulos de renda fixa.

O conceito de *duration* é derivado da relação entre o valor presente de um título e diferentes níveis de taxa de juros e representa a sensibilidade do valor presente do título a variações nessas taxas. Em um título do tipo *zero coupon bond*, essa sensibilidade é dada pelo prazo de maturidade do título. No caso de títulos do tipo *coupon paying bond*, a *duration* é determinada pela média ponderada dos prazos dos fluxos de caixa futuros, sendo a ponderação dada pela relação entre o valor presente do fluxo e o valor presente total do título (inferior, portanto, ao prazo de maturação do título):

$$DURATION = \frac{\sum t \cdot C(t)}{\sum (1+i)^t P_0}$$

- em que:  $C(t)$  = pagamento no período  $t$   
 $i$  = taxa de juros  
 $P_0$  = valor presente do título  
 $t$  = prazo

A *duration*, sendo uma medida de elasticidade do valor presente do título de renda fixa, é muito utilizada em estratégias de *hedge*, em que o administrador deseja eliminar o risco causado pela incerteza quanto às flutuações futuras nas taxas de juros. A proteção contra tais flutuações é feita por meio da teoria da imunização, que consiste em igualar a *duration* do ativo à *duration* do passivo de modo que as oscilações nos valores presentes sejam perfeitamente compensadas.

Evidentemente, para que essa compensação seja perfeita, é necessário que se faça o balanceamento entre a *duration* e o valor do ativo e a *duration* e o valor do passivo, ou seja:

$$PV_{ATIVO} \cdot DURATION_{ATIVO} = PV_{PASSIVO} \cdot DURATION_{PASSIVO}$$

Essa é a relação utilizada pelos administradores de portfólios de renda fixa para determinar a quantidade de contratos futuros de taxa de juros necessária para “hedgear” uma carteira por imunização.

$$NÚMERO DE CONTRATOS = \frac{PV_{CARTEIRA} \cdot DURATION_{CARTEIRA}}{PV_{CONTRATO FUTURO} \cdot DURATION_{CONTRATO FUTURO}}$$

As relações acima têm como base a seguinte equação:

$$\frac{\Delta PV}{PV} = -D \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \Delta i$$

- em que:  $PV$  = valor presente do título  
 $i$  = taxa de juros  
 $D$  = *duration* do título

Várias críticas são feitas à *duration*. A mais comum está relacionada com o erro no cálculo da variação do valor presente ( $\Delta PV$ ) quando houver a ocorrência de mudanças significativas nas taxas de juros. Por ser desenvolvido a partir da derivada da curva entre valor presente e taxa de juros, o conceito de *duration* como sensibilidade do valor presente somente é válido para pequenas alterações nos juros. A convexidade da curva impõe ao modelo erros de previsão quando as alterações são significativas. Para contornar esse problema, muitos analistas introduzem na equação acima uma variável adicional para tentar captar o efeito da convexidade.

Entender a convexidade da curva “PV x Taxa de juros” é importante para estimar não apenas os efeitos de variações não-infinitesimais na taxa de juros mas também os efeitos causados em uma estratégia de *hedge* quando a convexidade da curva do ativo for diferente da convexidade da curva do passivo. O ideal é que a convexidade da curva do ativo seja superior à do passivo, de modo que, para um dado aumento da taxa de juros, a queda no valor presente do ativo seja inferior à queda no valor presente do passivo e, para uma dada redução na taxa de juros, o aumento no valor presente do ativo seja superior ao do passivo. Se essa situação ideal for conseguida, qualquer alteração não-infinitesimal na taxa de juros trará lucros à posição.

Outra limitação do modelo da *duration* está relacionada com a pressuposição de que os deslocamentos na *yield curve* são paralelos, ou seja, que as alterações são idênticas para toda a estrutura a termo das taxas de juros. Se as alterações nas taxas de juros não forem as mesmas para toda a *yield curve*, a variação do valor presente de um título será diferente da determinada pela sua *duration*. Isso porque os fluxos futuros que compõem esse título serão afetados de maneira diversa (por diferentes “ $\Delta i$ ”).

Deslocamentos não-paralelos na *yield curve* podem implicar, numa estratégia de *hedge*, que a variação dos juros ( $\Delta i$ ) que afeta o valor presente dos títulos que compõem o ativo seja diferente da variação que afeta os contratos futuros (geralmente utilizados em estratégias de *hedge*) que compõem o passivo, impedindo o perfeito funcionamento da imunização e expondo o investidor novamente ao risco de taxa de juros.

A Figura 1 ilustra a situação. Considerando-se “Y1” como uma *yield curve* original hipotética, o modelo de *duration* pressupõe que, dado um aumento na taxa de juros, este será constante para toda a estrutura a termo, deslocando a curva para “Y2”. Se a variação na taxa de juros não for a mesma para toda a estrutura a termo, a *yield curve* apresentará um formato diferente do original, como, por exemplo, “Y3”.

O fato de a estrutura a termo da taxa de juros não apresentar um comportamento homogêneo indica a necessidade de se buscar uma adaptação ao cálculo da *duration* para que seja possível “*hedgear*” uma carteira de renda fixa de maneira eficaz.

Rogé Ferreira (1997) sugeriu em um artigo um modelo alternativo de *duration* no qual as variações das taxas de juro a termo para os dois períodos no mercado futuro de DI1 na BM&F possuiriam uma relação dada pela seguinte fórmula:

$$\Delta i_n = \beta \cdot \Delta i_{n-1}$$

Na realidade, essa relação está inserida no modelo tradicional de *duration*, com uma particularidade: no modelo tradicional, o coeficiente angular ( $\beta$ ) é sempre igual a 1, o que torna a equação, que é a condição necessária para deslocamentos paralelos na *yield curve*, equivalente a:

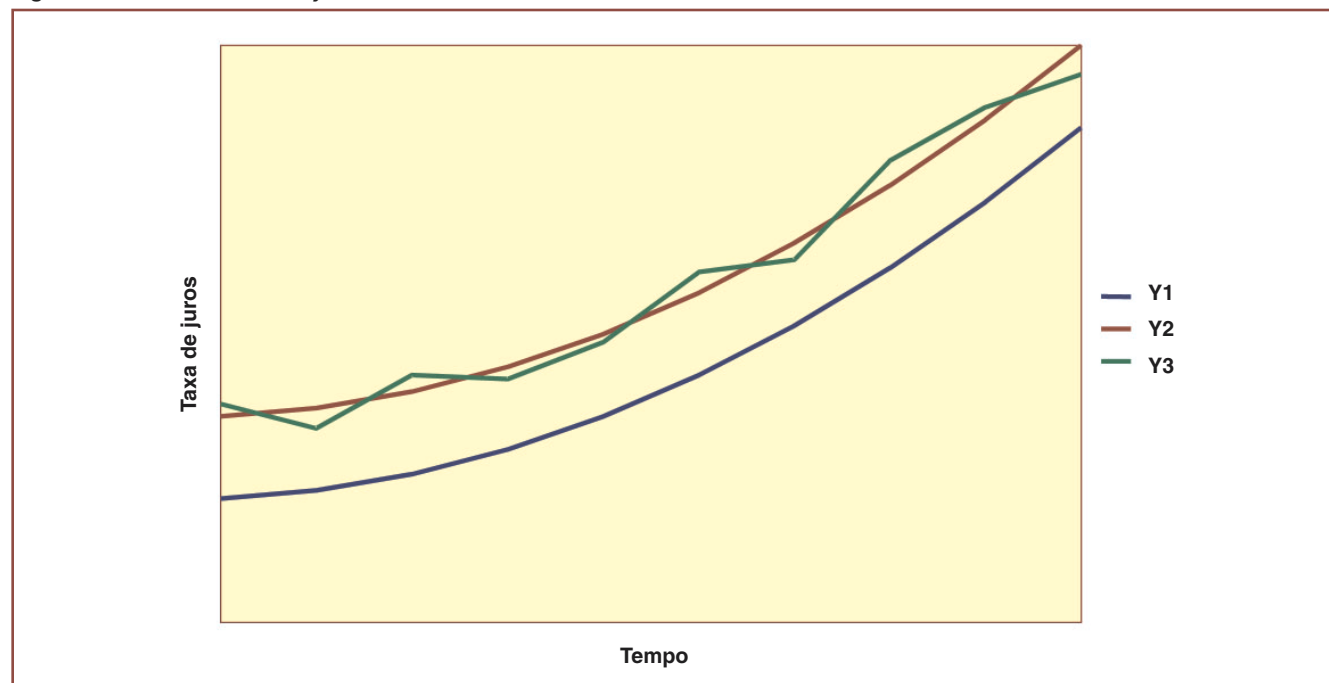
$$\Delta i_n = \Delta i_{n-1} = \Delta i_{n-2} = \dots = \Delta i_1$$

O modelo alternativo incorpora a possibilidade de  $\beta$  ser diferente de 1. A variação de cada taxa da estrutura a termo da *yield curve* possuiria, então, seu próprio  $\beta$ , permitindo um melhor entendimento dos deslocamentos não-paralelos da *yield curve*. Para tanto, o modelo sugere a determinação de um período a ser utilizado como *benchmark* para os demais. Todas as variações dos demais períodos seriam, então, função da variação no período de *benchmark*, sendo que essa relação seria dada pelos  $\beta_n$  calculados.

Sendo  $\Delta i_{\text{bmk}}$  a variação no mês de *benchmark*, tem-se:

$$\Delta i_n = \beta_n \cdot \Delta i_{\text{bmk}}$$

Figura 1 – Deslocamentos na *yield curve*



em que:  $\Delta i_n$  = variação na taxa a termo para o  $n$ -ésimo mês

Se as variações para as taxas a termo não são iguais, a variação na taxa de juros ( $\Delta i$ ) utilizada na equação de *duration* deve levar em consideração tais diferenças.

Logo,

$$\frac{\Delta PV}{PV} = -D \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \Delta i_{\text{FÓRMULA}}$$

em que:

$$\Delta i_{\text{FÓRMULA}} = [(1+i_1+\beta_1 \cdot \Delta i_{\text{bmk}})^{t_1} \times (1+i_2+\beta_2 \cdot \Delta i_{\text{bmk}})^{t_2} \times \dots \times (1+i_n+\beta_n \cdot \Delta i_{\text{bmk}})^{t_n - t_{(n-1)}}]^{1/t_n} - 1 - i_n$$

Utilizando-se de capitalização contínua:

$$\Delta i_{\text{FÓRMULA}} = \{e^{i_n [(1+i_1+\beta_1 \cdot \Delta i_{\text{bmk}})^{t_1} \times (1+i_2+\beta_2 \cdot \Delta i_{\text{bmk}})^{t_2} \times \dots \times (1+i_n+\beta_n \cdot \Delta i_{\text{bmk}})^{t_n - t_{(n-1)}}] / t_n} - 1\} - i_n$$

Quando as diferenças entre os comportamentos das taxas da estrutura a termo dos juros for levada em consideração, a equação do número ótimo de contratos a serem vendidos para “hedgear” uma carteira fica alterada para:

$$N^{\circ} \text{ DE CONTRATOS} = \frac{PV_{\text{CARTEIRA}} \cdot DURATION_{\text{CARTEIRA}} \cdot \Delta i_{\text{FÓRM. ATIVO}}}{PV_{\text{CONT. FUT.}} \cdot DURATION_{\text{CONTRATO FUTURO}} \cdot \Delta i_{\text{FÓRM. PASSIVO}}}$$

Isso evidencia a importância de tais diferenças para uma estratégia de *hedge*.

O objetivo do presente artigo é testar esse modelo alternativo de *duration* no mercado futuro de DI1 da BM&F. O que se pretende é verificar se esse modelo é capaz de captar os deslocamentos não-paralelos da *yield curve*, permitindo uma melhor aproximação da realidade e fornecendo estratégias de *hedge* mais eficazes que o modelo tradicional. A escolha do mercado futuro de DI1 da BM&F deve-se ao fato de ser esse mercado uma das principais fontes de *hedge* para administradores de carteiras de renda fixa no Brasil.

Este trabalho está dividido em três seções. Na primeira seção, serão realizados testes para verificar se os valores dos  $\beta$  das diversas taxas a termo são iguais a 1, como pressupõe o modelo tradicional de *duration*. Na segunda seção, será desenvolvida uma simulação de uma estratégia de *hedge* no mercado de DI1 futuro da BM&F no ano de 1996, utilizando-se tanto o modelo tradicional quanto o alternativo. Ainda na segunda

seção, serão efetuados testes para se inferir se a estratégia de *hedge* oferecida pelo modelo alternativo foi – ou não – mais eficaz que a estratégia fornecida pelo modelo tradicional no período analisado. Na última seção, será exposta a conclusão do artigo no que diz respeito à validade do modelo e à sua eficácia.

## TESTE DO MODELO DE DURATION TRADICIONAL

Como exposto acima, o modelo alternativo proposto procura aprimorar o cálculo da variação da taxa de juros que afeta o valor presente do título, tentando captar as especificidades da estrutura a termo de juros. O principal desenvolvimento do modelo é a flexibilização do  $\beta$ , que o modelo tradicional de *duration* pressupõe ser igual a 1 para todos os vencimentos.

Tomando-se como base o ano de 1996, foram realizados testes para se aferir a possibilidade de esse coeficiente ser realmente unitário, utilizando-se as taxas a termo do mercado futuro de DI1 para os quatro primeiros vencimentos. O primeiro passo foi realizar regressões lineares entre as alterações diárias nas taxas (retornos) para os quatro primeiros vencimentos, como, por exemplo:

$$\Delta i_{3^{\circ} \text{ MÊS}} = \alpha + \beta \Delta i_{2^{\circ} \text{ MÊS}}$$

em que:

$\Delta i_{3^{\circ} \text{ MÊS}}$  = diferença entre a taxa a termo para o terceiro mês em um determinado dia e essa mesma taxa no dia anterior (retorno do contrato futuro do terceiro vencimento)

$\Delta i_{2^{\circ} \text{ MÊS}}$  = diferença entre a taxa a termo para o segundo mês em um determinado dia e essa mesma taxa no dia anterior (retorno do contrato futuro do segundo vencimento)

Ao propor o modelo alternativo, Rogé Ferreira sugere, a partir de uma série de regressões, que as variações nas taxas para o segundo mês sejam utilizadas como *benchmark* para os demais meses. Desse modo, as variações nas taxas a termo do terceiro e quarto meses seriam funções das variações nas taxas a termo do segundo mês (a taxa do primeiro mês é tomada como constante, ou seja, com um  $\beta$  igual a zero).

Desse modo, foram realizadas regressões para o ano de 1996 (Tabelas 1 e 2).

Como pode ser visto nas referidas tabelas, a regressão entre as flutuações nas taxas a termo para o terceiro e o quarto mês em relação ao segundo sugere um coeficiente angular diferente de 1. Ao se realizar o teste *t* de

*student* para a hipótese nula de um  $\beta = 1$ , percebe-se que, em ambos os casos, os *P-values* obtidos são virtualmente nulos, ou seja, não há possibilidade de o  $\beta$  ser unitário para o período analisado. Com efeito, os intervalos de confiança a 99% não incorporam o número 1.

Vale ressaltar que, para as regressões consideradas, o teste de Durbin-Watson indicou a ausência de resíduos autocorrelacionados, o que permite a realização do teste *t* de *student* e a aceitação dos parâmetros calculados pelo método de mínimos quadrados.

Outro teste realizado com os coeficientes estimados foi o teste de Wald, que também trata de hipóteses envolvendo restrições nos coeficientes, porém com a utilização das estatísticas F e  $\chi^2$ . Nesse caso, é importante notar que o modelo tradicional da *duration* não pressupõe apenas que o coeficiente angular  $\beta$  seja igual a 1, mas também que o intercepto  $\alpha$  seja igual a zero.

Por esse motivo, o teste de Wald foi realizado sob duas restrições:

$$H_0 : \alpha = 0 \text{ e } \beta = 1$$

cujos resultados estão na Tabela 3.

A Tabela 3 mostra que as estatísticas F e  $\chi^2$  calculadas são elevadas para ambas as regressões, indicando novamente que a probabilidade de que os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  sejam, respectivamente, iguais a 0 e 1 é virtualmente nula.

Os testes realizados mostram claramente que, para o ano de 1996, no mercado futuro de DI1, as estratégias de *hedge* baseadas na *duration* tradicional estavam expostas não apenas ao risco relativo à

Tabela 1 – Regressão 3º mês x 2º mês

Estatística da regressão	Valores
Coefficiente $\beta$	0,7701
Estatística t ( $H_0 : \beta = 1$ )	5,64
<i>P-value</i>	0,000
Intervalo de confiança para $\beta$	99%
Limite superior	0,6641
Limite inferior	0,8760
Durbin-Watson	2,15

Tabela 2 – Regressão 4º mês x 2º mês

Estatística da regressão	Valores
Coefficiente $\beta$	0,6523
Estatística t ( $H_0 : \beta = 1$ )	6,23
<i>P-value</i>	0,000
Intervalo de confiança para $\beta$	99%
Limite superior	0,5074
Limite inferior	0,7973
Durbin-Watson	2,37

Tabela 3 – Teste de Wald ( $H_0 : \alpha = 0 \text{ e } \beta = 1$ )

Estatística do teste				
Regressão	Estatística F		$\chi^2$	
	Valor	Prob.	Valor	Prob.
3º mês x 2º mês	15,78451	0,00000	31,56902	0,00000
4º mês x 2º mês	19,57893	0,00000	39,15786	0,00000

convexidade mas também ao risco relacionado aos deslocamentos não-paralelos da *yield curve*.

## SIMULAÇÃO DE UMA ESTRATÉGIA DE HEDGE

Para comparar o modelo tradicional de *duration* com o modelo alternativo, foi realizada uma simulação de estratégia de *hedge* para o ano de 1996 no mercado futuro de DI1 da BM&F.

A simulação consistiu na montagem de 12 operações de *hedge*, com rolagem mensal, de compra do segundo vencimento contra venda do terceiro vencimento. A mesma estratégia foi repetida com compra do terceiro vencimento contra venda do quarto vencimento.

Dessa forma, o que se pretendeu julgar foi se o modelo alternativo baseado nos  $\beta_n$  trazia vantagens sobre o modelo tradicional. Para tanto, aproximou-se ao máximo da realidade o cálculo das volatilidades/mês para cada um dos vencimentos futuros. Usou-se então “*ex-post*” esses valores como *input* para o modelo alternativo. Uma vez que o modelo não objetiva a previsão dessas volatilidades, seria possível então compará-lo (numa situação ótima) com o modelo de *duration* tradicional e avaliar sua aderência.

Usou-se para o cálculo dessas volatilidades o logaritmo natural dos retornos das taxas de juro em todos os meses, dia a dia, dos vários vencimentos futuros. Foram obtidas dessa forma 12 medidas de volatilidade, que foram utilizadas para cálculo dos  $\beta$  correspondentes a cada vencimento de DI1.

Como resultado, foram obtidas as volatilidades diárias em cada mês, conforme mostrado na Tabela 4.

Com isso, foi possível evitar qualquer erro oriundo da estimação da volatilidade e conseguiu-se um cálculo bastante próximo da realidade para os  $\beta_n$ . É importante frisar que o valor dos  $\beta_n$  é mutável ao longo do tempo, oscilando, portanto, ao longo de cada operação. Devido a isso, ainda existe erro residual no modelo alternativo. Utilizou-se para todas as operações um valor arbitrário de zero para o  $\beta$  do primeiro vencimento.

Na Tabela 5, são mostrados os valores obtidos por cada modelo nas 12 estratégias levadas a efeito.

O resultado assinalado por cada modelo está em unida-

de de pontos (de PU) recebidos ou perdidos na operação.

Em seguida, foi comparado o resultado obtido mês a mês e calculado um teste de hipótese sobre a diferença das médias de cada modelo, conforme a Tabela 6.

No teste de hipótese foi calculado o módulo dos desvios de cada modelo em relação a zero, para então comparar suas médias. Isso porque ambos os modelos tinham como objetivo um resultado equilibrado (igual a zero), de modo que o que importa são os desvios em relação a

esse objetivo (sejam eles positivos ou negativos). O teste foi realizado sob as seguintes hipóteses:

- a)  $H_0$ : a diferença das médias entre o modelo tradicional e o alternativo é menor ou igual a zero;
- b)  $H_1$ : a diferença das médias entre o modelo tradicional e o alternativo é maior que zero.

Não foi possível afirmar que o modelo alternativo fos-

Tabela 4 – Tabela de volatilidades diárias

Mês	Vol. 1º vcto.	Vol. 2º vcto.	Vol. 3º vcto.	Vol. 4º vcto.
Jan.	0,008974	0,007008	0,008977	0,012213
Fev.	0,022953	0,006589	0,007841	0,011094
Mar.	0,004964	0,005517	0,008616	0,013152
Abr.	0,011386	0,004717	0,005293	0,005946
Maio	0,009936	0,003302	0,004228	0,004263
Jun.	0,010090	0,002454	0,002774	0,004292
Jul.	0,010791	0,005560	0,005672	0,008174
Ago.	0,004512	0,005065	0,005465	0,008135
Set.	0,008413	0,003196	0,004152	0,005407
Out.	0,004525	0,002394	0,006084	0,007291
Nov.	0,005776	0,002490	0,003633	0,006183
Dez.	0,005553	0,003187	0,004164	0,005265

Tabela 5 – 1ª estratégia de hedge

Estratégia: Compra 2º vencimento e vende 3º vencimento						
Mês	Modelo	Qtd. de contratos		Resultado (R\$)		
		2º vcto.	3º vcto.	2º vcto.	3º vcto.	Líquido
Jan.	Trad.	146,616	100,000	12.573,21	-18.432,00	-5.858,79
	Altern.	179,163	100,000	15.364,29	-18.432,00	-3.067,71
Fev.	Trad.	146,841	100,000	6.655,69	-9.668,80	-3.013,11
	Altern.	186,292	100,000	8.443,84	-9.668,80	-1.224,96
Mar.	Trad.	146,976	100,000	18.031,13	-19.549,94	-1.518,82
	Altern.	236,093	100,000	28.964,00	-19.549,94	-9.414,06
Abr.	Trad.	147,212	100,000	-238,28	1.337,89	1.099,61
	Altern.	161,164	100,000	-260,87	1.337,89	1.077,02
Maio	Trad.	147,175	100,000	1.247,26	-1.967,55	-720,29
	Altern.	204,167	100,000	1.730,25	-1.967,55	-237,31
Jun.	Trad.	147,211	100,000	-1.300,04	-1.674,49	-2.974,53
	Altern.	131,408	100,000	-1.160,48	-1.674,49	-2.834,97
Jul.	Trad.	147,333	100,000	-6.575,17	8.946,23	2.371,06
	Altern.	186,620	100,000	-8.328,50	8.946,23	617,73
Ago.	Trad.	147,307	100,000	-3.937,92	5.157,98	1.220,07
	Altern.	161,103	100,000	-4.306,72	5.157,98	851,26
Set.	Trad.	147,301	100,000	2.415,24	-6.737,26	-4.322,02
	Altern.	167,395	100,000	2.744,72	-6.737,26	-3.992,54
Out.	Trad.	147,448	100,000	-2.486,53	5.364,13	2.877,60
	Altern.	257,357	100,000	-4.340,01	5.364,13	1.024,12
Nov.	Trad.	147,379	100,000	2.735,82	-2.499,58	236,24
	Altern.	157,320	100,000	2.920,37	-2.499,58	420,79
Dez.	Trad.	147,474	100,000	3.113,51	-4.541,20	-1.427,69
	Altern.	134,301	100,000	2.835,40	-4.541,20	-1.705,80

se melhor que o tradicional no nível de 2,5% de significância, como mostra a Tabela 6, a seguir. Foi percebida, no entanto, a presença de um *outlier* na amostra da estratégia com o modelo alternativo (Figura 2), representado pelo dado referente ao mês de março. O *outlier* foi detectado com o auxílio do *box-plot*, a partir da seguinte regra:

- Fatores superiores a:  $3^{\circ}$  quartil +  $1,5 \cdot (3^{\circ}$  quartil -  $1^{\circ}$  quartil)
- Fatores inferiores a:  $1^{\circ}$  quartil -  $1,5 \cdot (3^{\circ}$  quartil -  $1^{\circ}$  quartil)

Desconsiderando-se o *outlier*, pode-se rejeitar a hipótese de que o modelo tradicional levaria a um desvio menor (em relação a zero) do que o modelo alternativo, baseado nos  $\beta_n$ , conforme mostram os dados da Tabela 7.

Em seguida, foram feitos os mesmos testes para a segunda estratégia (Tabela 8).

Neste teste de hipótese também foi calculado o módulo dos desvios de cada modelo em relação ao zero, para então comparar suas médias. Desse modo:

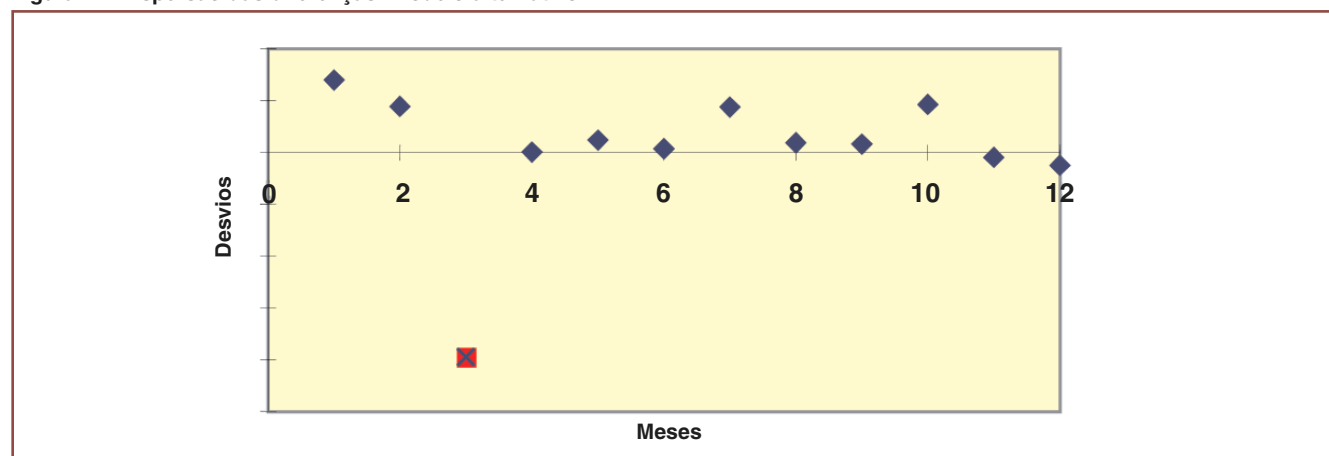
- $H_0$ : a diferença das médias entre o modelo tradicional e o alternativo é menor ou igual a zero;
- $H_1$ : a diferença das médias entre o modelo tradicional e o alternativo é maior que zero.

Também não foi possível afirmar que o modelo alternativo é melhor que o tradicional nessa simulação, no nível de 2,5% de significância, como mostra a Tabela 9. Novamente percebeu-se a presença de um *outlier* na amostra (Figura 3), representado pelo dado referente ao mês de março.

Tabela 6 – Módulo dos resultados da 1ª estratégia de *hedge* – modelo tradicional x alternativo (R\$)

Mês	Trad.	Altern.	Mod. trad.	Mod. alt.	Diferença
Jan.	(5.858,79)	(3.067,71)	5.858,79	3.067,71	2.791,08
Fev.	(3.013,11)	(1.224,96)	3.013,11	1.224,96	1.788,15
Mar.	(1.518,82)	9.414,06	1.518,82	9.414,06	(7.895,24)
Abr.	1.099,61	1.077,02	1.099,61	1.077,02	22,58
Mai	(720,29)	(237,31)	720,29	237,31	482,99
Jun.	(2.974,53)	(2.834,97)	2.974,53	2.834,97	139,56
Jul.	2.371,06	617,73	2.371,06	617,73	1.753,33
Ago.	1.220,07	851,26	1.220,07	851,26	368,80
Set.	(4.322,02)	(3.992,54)	4.322,02	3.992,54	329,48
Out.	2.877,60	1.024,12	2.877,60	1.024,12	1.853,48
Nov.	236,24	420,79	236,24	420,79	(184,55)
Dez.	(1.427,69)	(1.705,80)	1.427,69	1.705,80	(278,11)
Média	(1.002,56)	28,47	2.303,32	2.205,69	97,63
D.-Pad.	2.703,37	3.437,25	-	-	2.702,30
Estat. t.	-	-	-	-	0,125
P-Value	-	-	-	-	0,903

Figura 2 – Dispersão das diferenças: modelo alternativo



Realizando-se novo teste sem a inserção do *outlier*, rejeita-se a hipótese nula de que o modelo tradicional de *duration* levaria a um resultado médio superior ao do modelo alternativo. Podem-se observar na Tabela 10, a seguir, os resultados referentes a esse teste.

Dessa forma, pode-se sugerir que o modelo alternativo, que utiliza os  $\beta_n$ , é superior ao modelo de *duration* tradicional. O modelo alternativo levou a um resultado médio mais próximo de zero ao longo de um ano de operação, o que foi corroborado pelos testes estatísticos.

Tabela 7 – 1ª estratégia de *hedge* – sem a inclusão do *outlier* – mês de março (R\$)

Mês	Trad.	Altern.	Mod. trad.	Mod. alt.	Diferença
Jan.	(5.858,79)	(3.067,71)	5.858,79	3.067,71	2.791,08
Fev.	(3.013,11)	(1.224,96)	3.013,11	1.224,96	1.788,15
Abr.	1.099,61	1.077,02	1.099,61	1.077,02	22,58
Mai	(720,29)	(237,31)	720,29	237,31	482,99
Jun.	(2.974,53)	(2.834,97)	2.974,53	2.834,97	139,56
Jul.	2.371,06	617,73	2.371,06	617,73	1.753,33
Ago.	1.220,07	851,26	1.220,07	851,26	368,80
Set.	(4.322,02)	(3.992,54)	4.322,02	3.992,54	329,48
Out.	2.877,60	1.024,12	2.877,60	1.024,12	1.853,48
Nov.	236,24	420,79	236,24	420,79	(184,55)
Dez.	(1.427,69)	(1.705,80)	1.427,69	1.705,80	(278,11)
Média	(955,62)	(824,76)	2.374,64	1.550,38	824,26
D.-Pad.	-	-	-	-	1.031,17
Estat. t.	-	-	-	-	2,651
P-Value	-	-	-	-	0,023

Tabela 8 – 2ª estratégia de *hedge*

Estratégia: Compra 2º vencimento e vende 4º vencimento						
Mês	Modelo	Qtd. de contratos		Resultado (R\$)		
		2º vcto.	4º vcto.	2º vcto.	4º vcto.	Líquido
Jan.	Trad.	191,138	100,000	16.391,26	-29.296,00	-12.904,74
	Altern.	227,612	100,000	19.519,12	-29.296,00	-9.776,88
Fev.	Trad.	191,688	100,000	8.688,39	-16.342,60	-7.654,21
	Altern.	303,917	100,000	13.775,28	-16.342,60	-2.567,32
Mar.	Trad.	192,109	100,000	23.568,05	-29.407,86	-5.839,82
	Altern.	441,285	100,000	54.137,01	-29.407,86	24.729,15
Abr.	Trad.	192,584	100,000	-311,73	1.180,83	869,10
	Altern.	216,512	100,000	-350,46	1.180,83	830,37
Maio	Trad.	192,567	100,000	1.631,93	-3.152,90	-1.520,97
	Altern.	277,469	100,000	2.351,45	-3.152,90	-801,45
Jun.	Trad.	192,688	100,000	-1.701,66	-5.673,05	-7.374,71
	Altern.	182,490	100,000	-1.611,59	-5.673,05	-7.284,64
Jul.	Trad.	193,052	100,000	-8.615,56	14.975,81	6.360,25
	Altern.	301,360	100,000	-13.449,10	14.975,81	1.526,71
Ago.	Trad.	192,917	100,000	-5.157,22	6.846,94	1.689,73
	Altern.	194,370	100,000	-5.196,05	6.846,94	1.650,89
Set.	Trad.	192,907	100,000	3.163,03	-13.013,18	-9.850,15
	Altern.	237,003	100,000	3.886,06	-13.013,18	-9.127,12
Out.	Trad.	193,332	100,000	-3.260,32	12.101,16	8.840,84
	Altern.	458,194	100,000	-7.726,88	12.101,16	4.374,28
Nov.	Trad.	193,172	100,000	3.585,89	-3.308,42	277,47
	Altern.	244,888	100,000	4.545,91	-3.308,42	1.237,49
Dez.	Trad.	193,364	100,000	4.082,36	-5.896,75	-1.814,39
	Altern.	220,580	100,000	4.656,95	-5.896,75	-1.239,80



## CONCLUSÃO

Segundo Elton e Gruber (1995), o retorno de títulos de renda fixa pode ser dividido em retorno antecipado, relacionado à passagem do tempo e aos *coupons*, e retorno não-antecipado, proporcionado por mudanças na *yield curve*.

O retorno não-antecipado, por sua vez, é proveniente de dois tipos de deslocamentos na *yield curve*: os deslocamentos utilizados para derivar o conceito de *duration* tradicional (ou seja, os deslocamentos para-

lelos) e os demais tipos de deslocamentos na estrutura da taxa de juros (ou seja, os deslocamentos não-paralelos). Os autores partem do pressuposto de que esses “demais tipos” de deslocamentos na *yield curve* são aleatórios, de modo que o retorno total de um título seria dado pela equação a seguir.

Pela equação, percebe-se que os autores somente consideram retorno não esperado o somatório de deslocamentos paralelos na *yield curve* (dado pelo produto da *duration* tradicional pelo *shift* na curva) e resí-

$$\text{Retorno total} = \text{Retorno esperado} + \text{Retorno relacionado a deslocamentos não-antecipados na } yield \text{ curve} + \text{Influência aleatória no retorno}$$

$$R_i = \bar{R}_i - D \cdot \Delta i + \varepsilon_i$$

Tabela 9 – Módulo dos resultados da 2ª estratégia de *hedge* – modelo tradicional x alternativo (R\$)

Mês	Trad.	Altern.	Mod. trad.	Mod. alt.	Diferença
Jan.	(12.904,74)	(9.776,88)	12.904,74	9.776,88	3.127,86
Fev.	(7.654,21)	(2.567,32)	7.654,21	2.567,32	5.086,89
Mar.	(5.839,82)	24.729,15	5.839,82	24.729,15	(18.889,33)
Abr.	869,10	830,37	869,10	830,37	38,73
Mai	(1.520,97)	(801,45)	1.520,97	801,45	719,51
Jun.	(7.374,71)	(7.284,64)	7.374,71	7.284,64	90,07
Jul.	6.360,25	1.526,71	6.360,25	1.526,71	4.833,54
Ago.	1.689,73	1.650,89	1.689,73	1.650,89	38,84
Set.	(9.850,15)	(9.127,12)	9.850,15	9.127,12	723,03
Out.	8.840,84	4.374,28	8.840,84	4.374,28	4.466,56
Nov.	277,47	1.237,49	277,47	1.237,49	(960,02)
Dez.	(1.814,39)	(1.239,80)	1.814,39	1.239,80	574,59
Média	(2.410,13)	(295,97)	5.416,36	5.428,84	(12,48)
D.-Pad.	-	-	-	-	6.310,75
Estat. t.	-	-	-	-	-0,007
P-Value	-	-	-	-	0,995

Figura 3 – Dispersão das diferenças: modelo alternativo

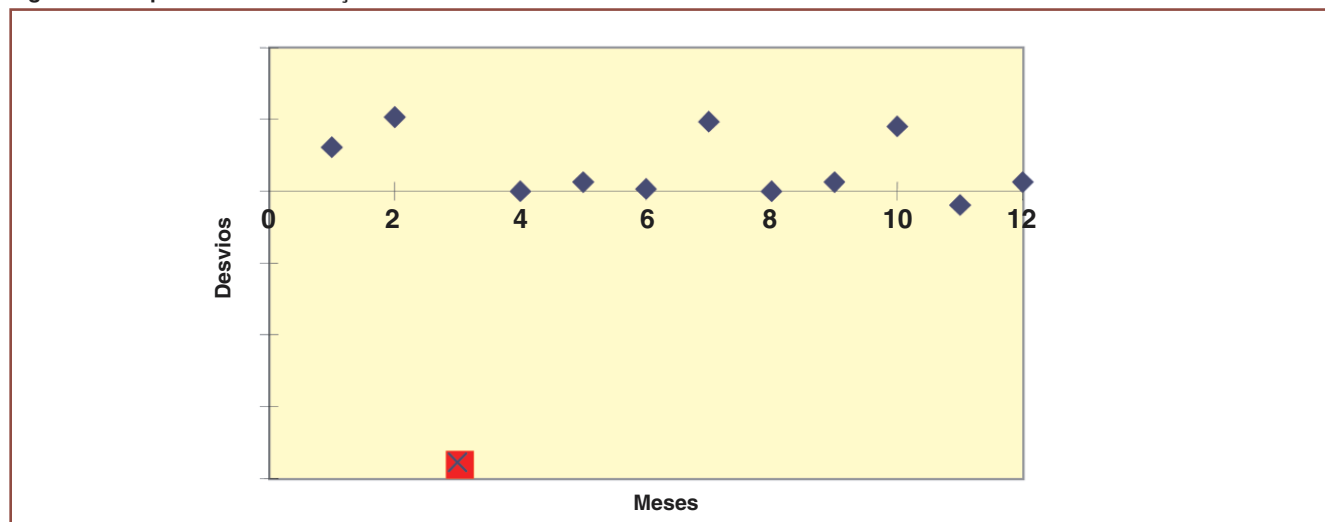


Tabela 10 – 2ª estratégia de *hedge* – sem a inclusão do *outlier* – mês de março (R\$)

Mês	Trad.	Altern.	Mod. trad.	Mod. alt.	Diferença
Jan.	(12.904,74)	(9.776,88)	12.904,74	9.776,88	3.127,86
Fev.	(7.654,21)	(2.567,32)	7.654,21	2.567,32	5.086,89
Abr.	869,10	830,37	869,10	830,37	38,73
Mai	(1.520,97)	(801,45)	1.520,97	801,45	719,51
Jun.	(7.374,71)	(7.284,64)	7.374,71	7.284,64	90,07
Jul.	6.360,25	1.526,71	6.360,25	1.526,71	4.833,54
Ago.	1.689,73	1.650,89	1.689,73	1.650,89	38,84
Set.	(9.850,15)	(9.127,12)	9.850,15	9.127,12	723,03
Out.	8.840,84	4.374,28	8.840,84	4.374,28	4.466,56
Nov.	277,47	1.237,49	277,47	1.237,49	(960,02)
Dez.	(1.814,39)	(1.239,80)	1.814,39	1.239,80	574,59
Média	(2.098,34)	(1.925,23)	5.377,87	3.674,27	1.703,60
D.-Pad.	-	-	-	-	2.221,53
Estat. t.	-	-	-	-	2,543
P-Value	-	-	-	-	0,027

duos aleatórios ( $\varepsilon_t$ , com valor esperado igual a zero e variância  $\sigma^2_{\varepsilon_t}$ ), em que estariam inseridos os deslocamentos não-paralelos (*twist*).

O que este artigo pretendeu demonstrar é que, para o mercado futuro de DI1 da BM&F, tais deslocamentos não-paralelos não são aleatórios, mas, pelo contrário, seguem um padrão. Em outras palavras, o resíduo da equação anterior não segue um processo do tipo *white-noise* e pode ser modelado por meio da utilização dos diversos  $\beta_n$ . Se levarmos em consideração a modelagem dos resíduos, a equação ficaria alterada para:

$$R_i = \bar{R}_i - D \cdot \Delta i_{\text{FÓRMULA}} + \varepsilon_i$$

Os testes realizados provaram que, para o ano de 1996, esse modelo alternativo teve uma melhor aderência à realidade. Administradores de portfólios de renda fixa que utilizassem essa equação modificada para “hedgear” sua posição teriam em média resultados mais próximos de zero do que os conseguidos por meio do modelo de *duration* tradicional.

É importante ressaltar que alguns pontos deste artigo

podem ser objeto de estudos futuros. O cálculo do  $\beta$ , por exemplo, foi realizado por meio dos métodos de mínimos quadrados, mas pode ser questionado se tais métodos seriam realmente o melhor para a estimação dos parâmetros.

Além disso, a estratégia de *hedge* montada para comparar os dois modelos poderia ser mais eficiente (para ambos os modelos) se fosse mais dinâmica. No teste, a posição foi montada no início de cada mês e mantida inalterada até seu encerramento no final do mês. Somente a passagem do tempo já seria suficiente para que ocorressem rebalanceamentos ao longo do mês para aprimorar o *hedge*. No caso do modelo alternativo, além do rebalanceamento devido à passagem do tempo, seria aconselhável rebalancear a carteira toda vez que os  $\beta_n$  apresentassem alterações (lembrando que o ideal é que o  $\beta$  de cada vencimento fosse calculado ininterruptamente). Isso, certamente, melhoraria ainda mais a *performance* do modelo alternativo.

Outra sugestão seria realizar os testes da segunda seção deste artigo (teste de  $\beta = 1$ ) para outros períodos ou para períodos menores, já que o tamanho relativamente grande da amostra utilizada (um ano) pode ter tornado os testes de hipóteses excessivamente rigorosos. ○

## BIBLIOGRAFIA

BESSADA, Octavio. *O mercado futuro e de opções*. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

BREALEY, Richard, MYERS, Stewart C. *Princípios de finanças empresariais*. 3. ed. S. Carlos, Portugal: McGraw-Hill, 1992.

ELTON, Edwin J., GRUBER, Martin J. *Modern portfolio theory*. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.

GRANGER, Clive W. J. *Forecasting in business and economics*. 2. ed. Boston: Academic Press, 1989.

HANKE, John E., REITSCH, Arthur G. *Business forecasting*. 5. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.

HULL, John C. *Options, futures and other derivatives*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.

MAKRIDAKIS, Spyros G. *Forecasting methods and applications*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1983.

MACAULAY, F. R. *Some theoretical problems suggested by movements of interest rates, bond yields, and stock prices in the United States since 1856*. New York, 1938.

NEWBOLD, Paul. *Statistics for business & economics*. 4. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1995.

ROGÉ FERREIRA, Luiz Francisco. *Uma alternativa aos modelos de duration*. Resenha BM&F, nº 115, 1997.

VAN HORNE, James C. *Financial markets rates & flows*. 4. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1994.