Rev. Saúde públ., S. Paulo
6: 263-7, 1972.

SOBRE A FORÇA DE MORTALIDADE NA CONSTRUÇÃO DE TÁBUAS DE SOBREVIVÊNCIA *

Jair L. F. SANTOS **

RSPSP-139

SANTOS, J. L. F. — *Sobre a força de mortalidade na construção de tábuas de sobrevivência.* **Rev. Saúde públ.**, *S. Paulo*, 6: *263-7, 1972.*

RESUMO: *A construção das tábuas de sobrevivência vem sendo, recentemente, simplificada através da pressuposição de constância da força de mortalidade para cada grupo etário. Neste trabalho, mostram-se vantagens adicionais de tal suposição, tanto de caráter conceitual como de cálculos.*

UNITERMOS: *Mortalidade (Força)*; Tábuas de sobrevivência *.*

INTRODUÇÃO

FERGANY [1] (1971) demonstrou que a pressuposição de que a força de mortalidade seja constante para cada grupo de idades, ou seja, que

$$\frac{d(1(s))}{1(s)\,ds} = k_x \quad \text{para} \quad x \leqslant s \leqslant x+n \qquad (1)$$

leva a um cálculo extremamente simplificado da tábua de sobrevivência, sendo os elementos 1_x obtidos por

$$1_{x+n} = 1_x\, e^{-({}_nM_x \cdot n)} \qquad (2)$$

onde ${}_nM_x$ é o coeficiente de mortalidade do grupo etário x a x+n, na população real.

SANTOS [5] (1972) mostra ainda que a pressuposição expressa por (1) leva também à avaliação exata (na medida em que integrais seriam apenas aproximadas) de ${}_nL_x$, obtendo-se:

$${}_nL_x = n.1_x \; \frac{{}_nq_x}{-\mathrm{Ln}({}_np_x)} \qquad (3)$$

onde Ln expressa o logarítimo neperiano e que pode ser bastante aproximado pela expressão mais simples:

$${}_nL_x = n.1_x \cdot {}_np_x^{1/2} \qquad (4)$$

Mostra ainda o autor que ${}_nL_x$ assim definido, quando considerado como variável aleatória, possui propriedades estatísticas que outras definições não têm, sobretudo as de que

$$E\left(\frac{{}_nL_y}{{}_nL_x}\right) = p_{x,y}(p_y/p_x)^{1/2} \quad \text{com } y \geq x \qquad (5)$$

e que

---

* Apresentado na XXIV reunião anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), São Paulo, 1972.

** Do Centro de Estudos de Dinâmica Populacional da Faculdade de Saúde Pública da USP — Av. Dr. Arnaldo, 715 — São Paulo, S.P., Brasil.

$$\sigma\left(\frac{{}_nL_y\,.\,{}_nL_w}{{}_nL_x\;{}_nL_z}\right) = 0 \qquad \text{onde } z \geq w \geq y \leq x \qquad (6)$$

Tal como para qualquer outra pressuposição para a força de mortalidade u(s) (definida em (1) no presente caso) poderia restar apenas uma crítica a fazer. A suposição que $u(s) = k_x$ implica numa certa distribuição de sobreviventes e óbitos em cada grupo de idade e, conseqüentemente, num coeficiente de mortalidade para a população da tábua de vida, ${}_nm_x$.

KEYFITZ[2] (1968) considera que ${}_nm_x$ não deve, obrigatoriamente ser igual à ${}_nM_x$, uma vez que a população observada pode não ser (como em geral, não o é) estacionária. Restaria, assim, verificar quais as implicações da pressuposição(1) quando se toma em consideração o fato de que a população real seja não estacionária.

2 — TABUAS DE VIDA QUE CONCORDAM COM OS DADOS

KEYFITZ[2] (1968) recomenda um processo iterativo para o cálculo de l_x, de tal maneira que a tábua reproduza (levando em consideração que a população real tem uma taxa de crescimento $r \neq O$) coeficientes de mortalidade ${}_nM_x^{(j)}$ onde j está indicando o ciclo do processo iterativo. Estes coeficientes são então comparados com os da população real e o processo estará terminado (e a tábua construída quando ambos forem iguais).

A relação encontrada pelo autor entre ${}_nM_x^{(j)}$ e os elementos $l_x^{(j)}$ é:

$${}_nM_x^{(j)} = \frac{e^{-rx}\,l_x^{(j)} - e^{-r(x+n)}\,l_{x+n}^{(j)}}{\int_0^n e^{-r(x+t)}\,l(x+t)\,dt} - r \qquad (7)$$

em cada ciclo j os valores de $l_x^{(j)}$ (com $l_x^{(1)}$ arbitrários) são alterados de maneira a reproduzir, no final, coeficientes ${}_nM'_x = {}_nM_x$.

As tábuas de vida assim construídas são denominadas "Tábuas de vida que concordam com os dados". Lembre-se aqui que na construção de tábuas de vida duas opções devem sempre ser feitas:

a) como passar de ${}_nM_x$ para ${}_nq_x$

b) como calcular a integral

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)\,dt$$

As tábuas que concordam com os dados, conceitualmente mais corretas (por tomarem em conta as diferentes distribuições de óbitos e sobreviventes na população real e na população da tábua) evitam uma decisão sobre (a) e podem diferir entre si não por opções sobre(b) mas sobre como se calcula a integral

$$\int_0^n e^{-r(x+t)}\,l(x+t)\,dt$$

No caso específico em que a força de mortalidade é do tipo

$$u(s) = \frac{1}{s-a_1} + \frac{1}{s-a_2} + \frac{1}{s-a_3}$$

(onde os a_i são raízes de um polinomio de 3.º grau que é ajustado aos valores de l_{x-5}, l_x, l_{x+5} e l_{x+10}) foram construídas subrotinas em linguagem Fortran-IV para a construção de tábuas que concordam com os dados (SANTOS[4], 1968)

3 — CONSEQÜÊNCIAS DA PRESSUPOSIÇÃO DE CONSTÂNCIA DA FORÇA DE MORTALIDADE

Supondo, como em (1) que $u(s) = k_x$ para $x \leq s \leq x + n$, o processo iterativo anteriormente mencionado requereria que se usasse em cada ciclo um $k_x^{(j)}$, sendo $k_x^{(1)}$ arbitrário e de tal maneira que ao final do processo se tivesse $_nM'_x = {}_nM_x$.

No entanto, sendo $k_x^{(j)}$ constante (para cada idade, e não para cada ciclo) ter-se-á:

$$l_{x+n}^{(j)} = l_x^{(j)}\, e^{-n k_x^{(j)}}$$

$$l_{x+t}^{(j)} = l_x \,.\, e^{-t k_x^{(j)}}$$

e a expressão (7) se torna simplesmente em:

$$_nM_x^{(j)} = k_x^{(j)}$$

e o processo terminaria quando $_nM_x^{(j)} = {}_nM_x$. Isto, em outras palavras significa simplesmente que escolhendo $k_x = {}_nM_x$ nenhuma iteração é necessária!

A tábua de vida calculada através de

$$l_{x+n} = l_x e^{-n.{}_nM_x} \qquad (8)$$

é uma tábua que concorda com os dados, não requerendo nenhuma iteração para seu cálculo.

4 — VANTAGENS ADICIONAIS

Além da extrema simplicidade de cálculos e do fato de que a tábua calculada por (8) concorda com os dados — o que já recomenda sob todos os aspectos a construção de tábuas por este processo — além das vantagens referidas por(4), (5) e (6) também advém pelo menos uma vantagem a mais da pressuposição inicial.

A população projetada para n anos a partir da idade x é exatamente definida por

$$P_{x+n} = \int_0^n P(x+t)\frac{l(x+n+t)}{l(x+t)}dt \qquad (9)$$

da qual a conhecida relação

$$P_{x+n} = P_x \frac{L_{x+n}}{L_x} \qquad (10)$$

é u'a mera aproximação, que se iguala a (9) quando a taxa de crescimento r seja igual a zero.

Supondo estabilidade pelo menos "local", no sentido mencionado por KEYFITZ[2] (1968), isto é, supondo

$$P(x+t) = Ae^{-r(x+t)}\, l(x+t)$$

a relação (9) torna-se

$$P_{x+n} = P_x \frac{\int_0^n e^{-r(x+t)}\, l(x+n+t)\,dt}{\int_0^n e^{-r(x+t)}\, l(x+t)\, dt} \qquad (11)$$

Novamente, as integrais são calculadas apenas aproximadamente, a não ser que se suponham constantes as forças de mortalidade em cada grupo de idades, obtendo-se após as adequadas simplificações:

$$p_{x+n} = p_x \frac{(r + {}_nM_x)\;(1 - e^{-nr} p_{x+n})}{(r + {}_nM_{x+n})\;(1 - e^{-nr} p_x)} \tag{12}$$

onde

$$p_x = l_{x+n} / l_x$$

Caso se esteja disposto a admitir r = O, como em geral se faz na aproximação (10), então:

$$p_{x+n} = p_x \frac{{}_nM_x \cdot q_{x+n}}{{}_nM_{x+n} \cdot q_x} \tag{13}$$

Note-se que (13) envolve a aproximação r = O, mas não envolve aproximação alguma para as integrais de (11).

5 — COMPARAÇÕES

A título ilustrativo, são comparados, na Tabela, elementos de uma tábua de sobrevivência calculados pelo método aqui sugerido com elementos calculados por KEYFITZ & FLIEGER[3] (1968).

O método ora sugerido é denominado na Tabela de "Exponencial", e os resultados advém da aplicação das fórmulas (8) e (3). O método utilizado pelos autores acima citados é o de processos iterativos, com uma cúbica ajustada aos valores consecutivos de l_x para o cálculo de L_x. Este segundo método é designado, na Tabela, de K & F.

TABELA

Hungria — 1965 — Sexo Feminino

Número de sobreviventes e esperança de vida na idade X, segundo dois métodos

Idade	Número Sobreviventes: l_x		Esperança de Vida : $\overset{o}{e}_x$	
	Exponencial	K & F	Exponencial	K & F
0	100 000	100 000	71,52	71,56
1	96 519	96 552	73,08	73,11
5	96 051	96 084	69,43	69,46
10	95 890	95 924	64,54	64,57
15	95 757	95 791	59.63	59,66
20	95 505	95 538	54,78	54,81
25	95 242	95 275	49,92	49,96
30	94 887	94 920	45,10	45,13
35	94 435	94 467	40,30	40,34
40	93 717	93 749	35,59	35,62
45	92 628	92 652	30,98	31,01
50	91 001	91 022	26,49	26,52
55	88 656	88 673	22,13	22,15
60	84 879	84 878	18,00	18,02
65	79 041	78 990	14,15	14,17
70	69 609	69 460	10,73	10,74
75	55 426	55 101	7,86	7,85
80	36 788	38 215	5,67	5,62
85 e +	18 117	17 373	4,23	4,09

Fonte: KEYFITZ & FLIEGER[3] (1968).

Foram comparados apenas os elementos l_x, número de sobreviventes no início da idade x, e $\overset{o}{e}_x$, esperança de vida na idade x, pois todos os demais advêm dos primeiros e a esperança de vida é, reconhecidamente, a coluna mais importante da tábua de vida.

Como se observa na Tabela as diferenças entre os métodos são diminutas. Mesmo para a última idade — a que sempre envolve mais erros, qualquer que seja a tábua construída — as esperanças de vida não diferem por mais do que 4%, e ao nascer não atingem sequer 1%.

6 — CONCLUSÕES

A tábua de sobrevivência construída supondo $u(s) = {}_nM_x$ para $x \leq s \leq x+n$ tem as seguintes propriedades, além das referidas por (4), (5) e (6):

a. é extremamente simples de ser construída. Evita a passagem de ${}_nM_x$ para ${}_nq_x$ e a pressuposição de fatores de separação para efetuar esta passagem;

b. é uma tábua que concorda com os dados, no sentido de Keyfitz. Isto é, na sua construção está implícita a consideração de que a população da tábua de vida é estacionária e as populações reais não o são;

c. além da vantagem mencionada em (b), a construção da tábua não requer nem os processos iterativos antes mencionados, nem o conhecimento da taxa de crescimento ("local" ou geral) da população;

d. leva à avaliação exata dos fatores de sobrevivência, dada a taxa de crescimento populacional. Supondo a taxa igual a zero, ou no desconhecimento desta, a única aproximação a ser feita não é uma aproximação em integrais (aproximação da equação (12) pela equação (13).

RSPSP-139

Santos, J. L. F. — [*On the force of mortality and life tables construction*]. **Rev. Saúde públ.**, *S. Paulo,* 6: *263-7, 1972.*

Summary: *Life tables construction has been simplified through the assumption of a constant force of mortality in each age group. In this paper further advantages are shown, concerning both the conceptual nature and simpler calculations derived from that assumption.*

Uniterms: *Mortality, force*; Life tables**

7 — REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FERGANY, N. — On the human survivorship function and life table construction. *Demography,* 8: 331-34, 1971.

2. KEYFITZ, N. — Introduction to the mathematics of population. Reading, Mass., Addison Wesley Pub. Co., 1968.

3. KEYFITZ, N. & FLIEGER, W. — *World population: an analysis of the vital data,* Chicago, University of Chicago Press, 1968.

4. SANTOS, J. L. F. — *The construction of life tables that agree with the data,* Chicago, 1969. [Tese de Mestrado — Universidade de Chicago].

5. SANTOS, J. L. F. — *Contribuição para o tratamento estocástico da tábua de sobrevivência e suas aplicações.* São Paulo, 1972. [Tese de doutoramento — Faculdade de Saúde Pública da USP].

Recebido para publicação em 13-7-1972

Aprovado para publicação em 26-7-1972.