ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS DE MÁXIMO OU DE MÍNIMO DE EQUAÇÕES DE REGRESSÃO DE SEGUNDO GRAU

MARLI DE BEM GOMES D'AULÍSIO **
F. PIMENTEL GOMES **
IZAIAS RANGEL NOGUEIRA **

RESUMO

Sabe-se que é comum usar-se a regressão quadrática ($Y = \hat{a}x^2 + \hat{b}X + \hat{c}$) para determinar a dose econômica de adubação. O ponto de máximo ou de mínimo será $X = -\frac{\hat{b}}{2\hat{c}}$, onde $\hat{b}$ e $\hat{c}$ possuem distribuição normal. Neste trabalho cogita-se de estudar a distribuição gerada pelo quociente de duas variáveis pertencentes a uma distribuição normal. Calcularam-se as estatísticas γ_1 e γ_2 de Fisher, e a elas se aplicou a prova de t. Também se obtiveram os momentos 3.º e 4.º.

Os resultados obtidos mostram que na maioria dos casos a distribuição de X se afasta muito da normal.

INTRODUÇÃO

Considere-se uma equação de regressão quadrática

$$Y_i = a + bX_i + cX_i^2$$

para a qual o modelo matemático será:

$$Y_i = a + bX_i + cX_i^2 + e_i$$

onde se supõe $e_i \cap N(0,\sigma^2)$, isto é, com distribuição normal de média 0 e variância σ^2.

* Entregue para publicação em 18/10/1976.
** Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, USP, Piracicaba, SP, Brasil.

Em geral, porém, dispõe-se apenas das estimativas dos parâmetros *a, b* e *c,* isto é, da equação estimada

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X + \hat{c}X^2.$$

Convém, pois, determinar o ponto de máximo ou de mínimo desta função. Sua derivada primeira

$$\hat{Y} = \hat{b} + 2\,\hat{c}\,X,$$

deve anular-se, logo:

$$\hat{b} + 2\,\hat{c}\,X = 0,$$

donde,

$$X = -\frac{\hat{b}}{2\,\hat{c}}, \qquad (1)$$

valor que é o ponto de máximo ou de mínimo da função.

Vê-se em (1), que X é função das estimativas $\hat{b}$ e $\hat{c}$, sujeitas a erros experimentais e possui, portanto, uma distribuição probabilística que se vai estudar.

Sabe-se, porém, que se os valores observados de Y tiverem distribuição normal, as estimativas $\hat{b}$ e $\hat{c}$, funções lineares dessas observações, serão também normalmente distribuídas. No entanto $\hat{b}$ e $\hat{c}$ geralmente não serão independentes, se adotada essa forma para a equação de regressão e isso complica desnecessariamente o problema.

Pode-se, porém, tomar a equação de regressão da seguinte forma:

$$Y = a + b\,P_1(X) + c\,P_2(X),$$

onde $P_1(X)$ e $P_2(X)$ são os polinômios ortogonais convenientes, de primeiro e de segundo grau, respectivamente. Neste caso b e c têm distribuição normal e são independentes, de sorte que seu coeficiente de correlação é nulo.

Pode-se tomar

$$P_1(x) = x = X - \bar{X},$$
$$P_2(x) = x^2 - K,$$

onde $\bar{X}$ é a média dos valores de X, e *K* é um número real conveniente.

Tem-se, neste caso, o ponto de máximo ou de mínimo

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{b}}{\hat{c}},$$

onde, agora, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são variáveis normais independentes. Pode-se assim proceder ao estudo desta distribuição probabilística.

MATERIAL E MÉTODOS

Material

Neste trabalho simularam-se 16.000 dados, sendo 8.000 para valores de $\hat{b}$ e 8.000 para valores de $\hat{c}$, pela sub-rotina RANDU para geração de números aleatórios no Computador IBM 1130. Esta sub-rotina se baseia na fórmula:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}},$$

onde X_i é um número casual de distribuição retangular,

$$0 < X < 1,$$

k é o número de valores X_i que tomamos dentro da distribuição retangular. Neste caso considerou-se $k = 60$. A variável assim gerada terá aproximadamente distribuição normal reduzida, isto é, de média zero e variância um (KENDALL e STUART, 1963).

Obtiveram-se assim 160 séries de 100 erros. Através de fatores apropriados foram eles multiplicados de modo a obter 20 séries de 100 erros relativos a cada uma das variâncias seguintes:

$\sigma^2 = 0{,}015625$	$\sigma^2 = 2{,}0000$
$\sigma^2 = 0{,}0625$	$\sigma^2 = 4{,}0000$
$\sigma^2 = 0{,}2500$	$\sigma^2 = 6{,}2500$
$\sigma^2 = 1{,}0000$	$\sigma^2 = 9{,}0000$

Para $\sigma^2 = 0{,}015625$ ($\sigma = 0{,}125$), por exemplo, tínhamos duas séries de 1.000 erros (e_1 e e_2) com distribuição aproximadamente normal de média zero e com essa variância. Os valores de e_2 foram multiplicados por $\sqrt{3}$, assim obtendo-se, pois, 1.000 erros $e_3 = \sqrt{3}\, e_2$, de variância $3\,\sigma^2 = 3 \times 0{,}015625$.

A seguir consideraram-se os valores exatos $b = 3$ e $c = -1$ e se tomaram as estimativas $\hat{b} = b + e_3$, $\hat{c} = c + e_1$.

Obtiveram-se assim 1.000 pares de valores de $\hat{b}$ e $\hat{c}$, em 10 grupos de 100, com as médias verdadeiras $b = 3$ e $|c| = 1$, e as variâncias,

$$V(\hat{b}) = 3\,\sigma^2, \qquad V(\hat{c}) = \sigma^2.$$

Através desses valores de $\hat{b}$ e $\hat{c}$ calcularam-se valores para x, portanto, para cada variância de geração conseguiram-se 1.000 valores de x. Desses valores tiraram-se as médias $\bar{c}$, $\bar{b}$ e $\bar{x}$. Com esses dados obtidos da maneira exposta estudou-se a distribuição de x.

Métodos

1) Estimou-se V(x), pela fórmula usual,

$$V_1(x) = \frac{\Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{N}}{N - 1},$$

onde sempre N = 100.

2) Estimou-se $V_2(x)$ pela fórmula deduzida por D'AULÍSIO (1970, 1976) a partir da diferenciação de $x = -\dfrac{\hat{b}}{2\,\hat{c}}$

$$V_2(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\bar{c}^2}\,V(b) + \frac{\bar{b}}{\bar{c}^4}\,V(c)\right]$$

onde se obtiveram $V(\hat{b})$ e $V(\hat{c})$ pelo método usual de estimativa da variância.

3) Estimaram-se o terceiro ($\hat{\mu}_3$) e o quarto ($\hat{\mu}_4$) momentos de x,

$$\hat{\mu}_3 = \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^3}{N - 1}, \qquad \hat{\mu}_4 = \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^4}{N - 1}.$$

4) Obteve-se μ_4 (esperado), que é o quarto momento que teria a distribuição de x se fosse normal.

$$\mu_4 \text{ (esperado)} = 3\,\sigma^4 .$$

5) Estimaram-se γ_1 e γ_2 (FISHER, 1930) para x;

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Sabe-se que na distribuição normal temos

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

6) Obtiveram-se $V(\hat{\gamma}_1)$ e $V(\hat{\gamma}_2)$ (FISHER, 1930), para aplicar a prova de *t*.

Com o auxílio de

$$V(\hat{\gamma}_1) = \frac{6N\,(N-1)}{(N-2)\,(N+1)\,(N+3)},$$

$$V(\hat{\gamma}_2) = \frac{24\,N\,(N-1)^2}{(N-3)\,(N-2)\,(N+3)\,(N+5)},$$

calculou-se:

$$t = \frac{\hat{\gamma}_1 - 0}{\sqrt{V(\hat{\gamma}_1)}},$$

$$t = \frac{\hat{\gamma}_2 - 0}{\sqrt{V(\hat{\gamma}_2)}},$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados apresentados são provenientes de séries geradas de 100 dados. Em cada quadro há 10 linhas, cada uma delas relativa a uma amostra de 100 dados, de sorte que cada quadro resume estatísticas obtidas com 1.000 dados.

Nos Quadros de 1 a 8 temos:

Coluna 1: $\hat{V}(\hat{c})$, calculada pela fórmula (1) de Métodos, com substituição de x por c.

Coluna 2: Média de $-\hat{c}$.

Coluna 3: $\hat{V}(\hat{b})$ calculada pela fórmula (1) de Métodos, com substituição de x por $\hat{b}$.

Coluna 4: Média de $\hat{b}$.

Coluna 5: Média de x.

Coluna 6: $\hat{V}_1(x)$, estimada pela fórmula (1) de Métodos.

Coluna 7: $\hat{V}_2(x)$, estimada pela fórmula (2) de Métodos

Coluna 8: Valores de $\hat{\mu}_3$ obtidos pela fórmula (3) de Métodos.

Coluna 9: Valores de $\hat{\mu}_4$ obtidos pela fórmula (3) de Métodos.

Coluna 10: μ_4 (esperado) pela fórmula (4) de Métodos substituindo-se σ^2 por $V_1(x)$.

Coluna 11: $\hat{\gamma}_1$, estimado pela fórmula (5) de Métodos.

Coluna 12: $\hat{\gamma}_2$, estimado pela fórmula (5) de Métodos.

Coluna 13: Teste t aplicado a $\hat{\gamma}_1$.

Coluna 14: Teste t aplicado a $\hat{\gamma}_2$.

Pode-se ver, no Quadro 1, que há semelhança nos resultados obtidos nas colunas 6 e 7. Os dados da coluna 8 ($\hat{\mu}_3$) são próximos de zero. Os valores estimados para $\hat{\mu}_4$ (coluna 9) são bem semelhantes aos obtidos para μ_4 (esperado), (coluna 10). Estudando os valores de $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$ (colunas 11 e 12), vemos que só os $\hat{\gamma}_1$ da primeira e da sétima linha diferiram de zero ao nível de 5% de probabilidade; na quarta, na sexta e na décima linha diferiram ao nível de 1% de probabilidade. O $\hat{\gamma}_2$ diferiu de zero, ao nível de 1% de probabilidade, pelo teste t, apenas na 9.ª linha.

No Quadro 2 verifica-se que os valores obtidos para a coluna 7 são sempre inferiores aos da coluna 6. O valor obtido para $\hat{\mu}_3$ só na 3.ª linha se aproxima de zero. O $\hat{\mu}_4$ da terceira linha se aproxima bastante do valor esperado, mas o das demais difere. Quanto a $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$, só o valor de $\hat{\gamma}_2$ na terceira linha não difere significativamente de zero. O resultado obtido para $\hat{\gamma}_1$ na terceira linha difere de zero ao nível de 5% de probabilidade pela prova de t; os outros valores diferem ao nível de 1% de probabilidade pelo mesmo critério.

No estudo do Quadro 3, vemos que os resultados constantes da coluna 7 são sempre inferiores aos da coluna 6. Os valores calculados para $\hat{\mu}_3$ são bem diferentes de zero. Os resultados das colunas 9 e 10 diferem muito entre si. Os valores de γ_1 e γ_2 diferem todos significativamente de zero pelo teste t, ao nível de 1% de probabilidade, conforme podemos verificar pelas colunas 13 e 14. Olhando agora os Quadros 4, 5 e 6, vemos que os resultados obtidos nos levam a observações semelhantes às feitas para o Quadro 3.

Vê-se no Quadro 7 que os resultados da coluna 7 em geral subestimam os valores da coluna 6, com exceção do valor obtido na 9.ª linha, que supera o da coluna 6. Os valores de $\hat{\mu}_3$ são bem diferentes de zero e os de $\hat{\mu}_4$ divergem bastante dos obtidos para μ_4 (esperado). Os resultados obtidos para $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$ diferem bastante de zero. Com exceção dos valores obtidos na 3.ª e 9.ª linha para $\hat{\gamma}_1$, todos os demais diferem de zero ao nível de 1% de probabilidade pelo teste t.

No quadro 8 os resultados das colunas 6 e 7, que estimam o mesmo valor, estão sempre menores na coluna 7. O $\hat{\mu}_3$ apresenta estimativas bem distintas de zero, embora devessem ser nulas, se a distribuição fosse normal. Comparando os resultados constantes das colunas 9 e 10, vê-se que diferem grandemente entre si. Sabe-se pelo estudo da distribuição normal que o μ_3 é nulo e o $\mu_4 = 3\ \sigma^4$. Verifica-se, pois, que os pontos de máximo ou de mínimo calculados estão fugindo sensivelmente da distribuição normal. Olhando as colunas 11 e 12, vê-se que há valores diferentes de zero, confirmando a não normalidade dos dados. Indo mais além, vê-se que as colunas 13 e 14, onde se pode afirmar que os valores obtidos para $\hat{\gamma}_1$ e $\hat{\gamma}_2$ são significativamente diferentes de zero pelo teste t. Rejeita-se a hipótese da nulidade.

Saliente-se que nos Quadros 1 e 2 todos os valores de $\hat{\gamma}_1$, são positivos, o que indica ser a distribuição viezada à direita. Nos demais Quadros aparecem sempre valores positivos e negativos para $\hat{\gamma}_1$, o que demonstra serem as curvas viezadas às vezes à esquerda.

Os valores de $\hat{\gamma}_2$ são negativos em 4 dos 10 casos do Quadro 1, e em apenas 1 caso do Quadro 2; nos demais são sempre positivos. Isto indica que, à medida que cresce a variação do acaso (medida por σ) tende a distribuição de x a se tornar leptocúrtica.

QUADRO 1 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 0{,}015625$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\hat{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t $p/\gamma_1 \neq 0$	teste t $p/\gamma_2 \neq 2$
0,0213	1,0010	0,0428	2,9855	1,5240	0,0636	0,0581	0,0087	0,0116	0,0120	0,5438	— 0,1000	2,25*	0.209
0,0186	1,0062	0,0435	3,0013	1,5200	0,0571	0,0516	0,0035	0,0078	0,0099	0,2574	— 0,6364	1,07	1,33
0,0141	0,9896	0,0370	3,0161	1,5460	0,0451	0,0429	0,0024	0,0048	0,0060	0,2500	— 0,6000	1,04	1,25
0,0155	0,9993	0,0401	2,9913	1,5220	0,0539	0,0448	0,0083	0,0096	0,0087	0,6640	0,3103	2,75**	0,649
0,0141	0,9995	0,0518	3,0022	1,5222	0,0444	0,0448	0,0039	0,0053	0,0060	0,4149	— 0,3500	1,72	0,732
0,0187	1,0092	0,0465	2,9948	1,5115	0,0565	0,0519	0,0100	0,0111	0,0096	0,7463	0,4688	3,09**	0,980
0,0132	1,0043	0,0417	3,0048	1,5165	0,0446	0,0398	0,0054	0,0067	0,0060	0,5745	0,3500	2,38*	0,732
0,0117	0,9911	0,0523	3,0167	1,5404	0,0433	0,0409	0,0034	0,0066	0,0057	0,3778	0,4787	1,57	0,990
0,0141	0,9952	0,0522	2,9986	1,5268	0,0447	0,0455	0,0067	0,0086	0,0060	0,0094	1,3000	0,039	2,72**
0,0139	0,9937	0,0468	3,0018	1,5333	0,0514	0,0441	0,0078	0,0090	0,0078	0,6784	0,4615	2,81**	0,965

QUADRO 2 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 0{,}062500$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\hat{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t p/$\gamma_1 \neq 0$	teste t p/$\gamma_2 \neq 0$
0,0570	0,9833	0,2234	3,0217	1,6434	0,3041	0,1971	0,2378	0,5265	0,2775	1,4180	2,6919	5,87**	5,63**
0,0580	1,0015	0,1696	2,9642	1,5912	0,3369	0,1689	0,4736	1,1960	0,3405	2,4225	7,5374	10,04**	15,76**
0,0492	1,0186	0,1863	2,9978	0,5458	0,1734	0,1477	0,0376	0,0887	0,0903	0,5208	—0,0538	2,16*	0,111
0,0535	0,9899	0,1616	2,9984	1,6073	0,2500	0,1685	0,2685	0,6786	0,1875	2,1480	7,8576	8,90**	16,43**
0,0690	1,0026	0,2247	3,0319	1,6336	0,3186	0,2129	0,2325	0,4615	0,3045	1,2931	1,5468	5,36**	3,23**
0,0619	0,9940	0,1595	3,0151	1,6589	0,5474	0,1846	1,5541	7,0565	0,8988	3,8373	20,5531	15,90**	42,97**
0,0556	1,0055	0,1405	2,9692	1,5646	0,2066	0,1546	0,1067	0,1843	0,1281	1,1363	1,3162	4,71**	2,75**
0,0697	1,0193	0,1696	2,9834	1,6137	0,6815	0,1846	3,0254	18,8805	1,3932	5,3775	37,6557	22,28**	78,73**
0,0695	0,9984	0,1675	2,9782	1,6196	0,3303	0,1972	0,2469	0,4956	0,3273	1,3008	1,5426	5,30**	3,22**
0,0624	1,0021	0,2202	3,0001	1,6008	0,2647	0,1940	0,1728	0,3214	0,2103	1,2687	1,5849	5,26**	3,31**

QUADRO 3 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 0,250000$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\bar{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t $p/\gamma_1 \neq 0$	teste t $p/\gamma_2 \neq 0$
0,2108	0,9787	0,7572	3,0141	1,9657	3,4498	0,7196	15,899	219	36	2,4813	15,4122	10,28**	32,22**
0,2358	1,0219	0,7006	3,0424	0,9572	38,9431	0,6680	—2.011,190	116.658	4.550	—8,2758	78,9223	34,28**	154,55**
0,2453	1,0137	0,7591	3,0127	—0,8706	882,3087	0,7118	—255.106,688	74.882.256	2.333.406	—9,7340	93,1917	40,32**	194,84**
0,2705	1,0278	0,8422	2,9945	1,3138	34,7699	0,7427	—1.498,056	82.866	3.627	—7.3067	65,5437	30,27**	137,03**
0,2483	1,0486	0,7410	3,0074	5,1936	738,9841	0,6328	153.781,719	34.603.904	1.638.292	7.6551	60,3657	31,71**	126,21**
0,2980	0,9867	0,6975	0,0396	1,3806	125,1870	0,9052	—3.212,954	706.394	47.015	—2.2939	42,0743	9,50**	87,97**
0,2954	0,9762	0,6310	2,9982	2,8572	154,7383	0,8964	12.588,904	1.394.758	71.832	6.5402	55,2510	27,09**	115,52**
0,3071	0,9978	0,9007	2,9852	1,3207	162,5910	0,9164	—5.979,981	747.278	79.307	—2.8844	25,2676	11,95**	52,83**
0,3002	1,0052	0,6326	2,9631	0,2152	219,5067	0,8020	—19.924,758	2.059.893	144.550	—6.1266	39,7513	25,38**	83,11**
0,2524	1,0081	0,7074	3,0379	—11,4817	21.451,8338	0,7378	—30.421.620,047	43.992.318.048	1.380.544.318	—9,6824	92,5000	40,11**	193,39**

QUADRO 4 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 1,00$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\bar{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t $p/\gamma_1 \neq 0$	teste t $p/\gamma_2 \neq 0$
1,0095	1,0029	2,6311	2,9134	4,2262	876,9301	2,7706	223.433,000	61.831,624	2.307.019	8,60	77,40	35,63**	161,82**
1,0254	0,9641	2,7723	2,8539	0,9234	63,4796	3,1618	—1.124,872	100.214	12.089	—2,22	21,87	9,20**	45,72**
1,0709	0,9476	3,4637	2,9380	0,9296	13,1138	3,9280	—151,856	5.107	516	—3,20	26,70	13,26**	55,82**
1,2041	1,0653	2,5724	2,9982	—0,3761	64,7230	2,6672	—2.686,780	154.928	12.567	—5,18	33,98	21,46**	71,04**
0,9643	1,0265	2,6579	3,1478	—8,3784	10.745,2285	2,7818	—10.763.880,023	11.001.215.000	346.379.903	—9,66	92,28	40,02**	192,93**
0,9237	0,9519	2,6033	3,0341	0,5283	80,4748	3,3074	1.490,841	145.025	19.428	—2,07	19,39	8,58**	40,54**
0,9236	1,0785	2,6540	3,0056	1,1372	203,0328	2,1117	3.678,860	1.540.420	123.667	—1,27	34,37	5,26**	71,86**
1,0716	1,0620	2,7747	3,0158	2,6657	357,9530	2,5299	25.672,609	5.564.388	384.391	3,79	40,43	15,70**	84,53**
0,8011	1,0858	3,4458	2,9872	3,6417	1.028,5617	2,0162	152.005,532	55.096.296	3.173.818	4,61	49,08	19,10**	102,61**
0,9177	1,0738	3,6588	3,0052	5,7930	3.352,1279	2,3513	1.789.525,753	1.013.635.329	33.710.284	9,22	87,20	38,19**	182,31**

QUADRO 5 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 2{,}00$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	—	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$V_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t p/ $\gamma_1 \neq 0$	teste t p/ $\gamma_2 \neq 0$
1,9971	1,0122	7,0469	3,0010	0,2801	88,9448	6,0022	—3.164,841	243.479	23.734	—3,77	27,78	15,62**	58,08**
2,1546	0,9257	5,3545	3,2126	0,0188	120,1613	9,1329	—3.822,961	316.398	43.318	—2,90	18,91	12,01**	39,54**
2,0425	0,9277	7,3394	3,0408	0,0826	27,9409	8,5066	—150,701	7.416	2.342	—1,02	6,50	4,23**	13,59**
2,1959	0,9992	5,4200	2,8142	0,8816	32,9177	5,7173	408,029	22.100	3.251	2,16	17,40	8,95**	36,38**
1,9641	1,0708	5,1698	2,8505	—2,7518	726,4195	4,1613	—154.155,532	36.529.584	1.583.056	—7,87	66,23	32,60**	138,47**
1,6759	1,0096	5,5053	3,0183	—2,6309	495,5569	5,0242	—61.322,886	8.753.106	736.730	—5,56	32,64	23,03**	68,24**
1,8086	1,1064	6,9470	2,8027	—7,1719	4.870,2089	3,7881	—3.227.478,006	2.200.880.135	71.156.804	—9,58	89,79	39,35**	187,73**
1,7677	1,0895	6,5791	2,9595	0,8098	87,9855	4,1327	—598,241	257.144	23.224	—0,72	30,22	2,98**	63,18**
2,2312	1,1104	5,5042	3,0178	—2,2705	1.388,8100	4,4564	—492.166,688	180.067.424	5.786.380	—9,51	90,36	39,40**	188,92*
2,2495	0,9164	5,1576	3,1746	1,0184	31,5812	9,5714	1.632,588	164.260	19.967	2,22	21,68	9,20**	45,33**

QUADRO 6 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 4,00$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\bar{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t p/ $\gamma_1 \neq 0$	teste t p/ $\gamma_2 \neq 0$
3,5091	1,1320	13,9000	2,7200	—0,9385	284,1337	6,6627	—44.194,266	7.264.162	242.196	—9,2274	86,98	38,22**	181,85**
3,9161	0,8486	11,0280	2,7249	—0,3848	123,2472	17,8392	—6.992,120	552.228	45.570	—5,1103	33,35	21,17**	69,73**
3,6978	1,0035	13,6877	3,3339	0,0730	40,9853	13,5273	—430,100	29.204	5.039	—1,6392	14,38	6,79**	30,06**
4,6132	0,9616	12,9305	3,1684	—1,2340	164,6979	17,0315	—15.880,822	1.857.494	81.386	—7,5135	65,48	31,12**	136,90**
3,0048	1,1702	12,1102	3,1888	2,4451	124,5799	6,2838	7.721,986	577.983	46.560	5,5534	34,24	23,01**	71,59**
4,4540	1,0031	13,0699	3,1627	2,3210	403,6660	14,2474	68.945,322	13.241.322	488.839	8,5011	78,26	35,22**	163,62**
4,5310	0,9254	11,8723	2,9353	0,5466	21,6509	16,7703	108,880	6.626	1.406	1,0808	11,14	4,48**	23,29**
3,7138	0,8477	12,9238	3,2810	1,4207	189,4187	23,8431	19.215,109	2.427.164	107.638	7,3707	64,65	30,53**	135,17**
3,4296	0,9937	11,5733	2,8211	0,4740	34,4348	10,1810	527,473	32.740	3.557	2,6104	24,61	10,81**	51,45**
4,3318	0,9876	11,5603	2,7176	—0,1688	119,7670	11,3700	—4.274,158	514.014	43.032	—3,2610	32,83	13,51**	68,64**

QUADRO 7 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 6{,}25$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\bar{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t p/$\gamma_1 \neq 0$	teste t p/$\gamma_2 \neq 0$
5,9221	1,0767	16,9388	2,6518	1,1408	24,85	11,40	294,04	10.311	1.853	2,3732	13,69	9,83**	28,62**
6,3830	0,9572	22,5175	3,0452	—0,8935	938,12	23,76	—161.325,69	51.675.840	2.640.189	—5,6146	55,72	23,26**	116,50**
5,2720	0,8937	18,9316	3,0707	0,1862	71,02	25,40	229,82	82.974	15.131	0,3340	13,45	1,59	28,12**
5,8955	1,1097	17,5151	3,2124	—55,3963	311.229,38	13,58	—1.701.280.515,50	9.396.736.258.047	290.591.180.926	—9,7900	94,00	40,56**	196,53**
6,1329	1,0685	18,9765	3,0636	0,2788	20,09	15,19	85,26	3.922	1.211	0,9465	6,71	3,92**	14,04**
6,7632	1,1391	21,0554	2,9729	1,5086	326,83	12,93	49.702,34	8.670.216	320.454	8,4119	78,17	34,85**	163,43**
6,2085	1,2433	18,5253	3,0371	4,0964	1.112,22	8,99	296.661,88	91.531.088	3.711.114	7,9979	70,99	33,13**	148,42**
7,4505	0,9337	17,4389	3,1982	1,7523	255,97	30,06	25.740,16	3.478.403	196.558	6,2854	50,09	26,04**	104,72**
7,3862	0,8814	15,7760	2,9913	—0,4428	24,85	32,45	42,82	14.489	1.853	0,3456	20,46	1,43	42,18**
6,1296	1,0079	19,4300	2,7650	6,7302	2.997,05	16,13	1.537.299,25	819.640.962	26.947.009	9,3695	88,25	38,81**	184,51**

QUADRO 8 — Resumo dos resultados obtidos para $\sigma^2 = 9{,}00$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
$\hat{V}(\hat{c})$	$-\bar{c}$	$\hat{V}(\hat{b})$	$\bar{b}$	$\bar{x}$	$\hat{V}_1(x)$	$\hat{V}_2(x)$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{\mu}_4$ (esperado)	γ_1	γ_2	teste t p/$\gamma_1 \neq 0$	teste t p/$\gamma_2 \neq 0$
9,9433	1,0316	32,3583	3,3837	1,0949	117,39	32,73	10.344,244	1.062.572	41.340	8,1332	74,11	33,69**	154,94**
8,9258	0,9285	22,9715	3,1819	1,2823	231,48	37,06	24.761,887	3.724.009	160.748	7,0310	66,50	29,12**	139,03**
8,0070	1,0669	20,2267	2,6316	—3,3814	628,64	15,14	—117.815,984	24.267.596	1.185.572	—7.4748	58,41	30,96**	122,12**
10,0468	1,2321	24,4162	2,8016	3,6344	1.279,85	12,57	433.277,376	151.966.784	4.914.063	9,4630	89,77	39,20**	187,68**
10,0173	0,9815	24,1180	2,7392	—0,3771	49,29	26,51	41.370,787	63.934	7.289	—3,9611	23,31	16,41**	48,74**
8,9872	1,0260	31,7109	3,0082	2,6476	569,78	25,81	125.937,766	29.246.488	973.939	9,2597	87,09	38,36**	182,08**
9,6960	0,8424	24,0952	3,4511	5,3792	3.539,91	65,81	1.922.991,253	1.121.797.123	37.592.222	9,1304	82,52	37,82**	180,98**
9,1916	0,8466	33,0275	3,0866	0,8590	81,30	54,12	2.031,535	136.669	19.831	2,7711	17,67	11,48**	36,94**
9,8817	0,9984	24,3900	2,6060	1,2637	366,91	22,99	63.304,711	11.793.328	403.866	9,0074	84,60	37,31**	176.88**
8,8385	1,1503	23,2641	2,6830	1,3622	554,40	13,48	71.818,750	18.710.568	922.095	5,5017	57,87	22,79**	120,99**

CONCLUSÕES

1) Só para o valor mais baixo de σ^2 ensaiado (0,015625, que dá um coeficiente de variação de 12,5% para $\hat{c}$), a normalidade aproximada da distribuição do quociente (x) é aceitável. Nos demais casos x foge completamente à distribuição normal.

2) Para os níveis mais baixos de σ^2, são positivos os valores de $\hat{\gamma}_1$ relativos à distribuição de x. À medida, porém, que cresce σ^2, surgem valores positivos e também negativos de $\hat{\gamma}_1$.

3) Ao contrário, no caso de $\hat{\gamma}_2$, para os valores mais baixos de σ^2, ocorrem estimativas positivas e negativas. No entanto, quando cresce σ^2, passam a ocorrer somente valores positivos de $\hat{\gamma}_2$, o que caracteriza as distribuições leptocúrticas.

4) Os valores de $\hat{V}_2(x)$ foram, em praticamente todos os casos estudados, bem inferiores aos obtidos para $\hat{V}_1(x)$.

SUMMARY

THE DISTRIBUTION OF POINTS OF MAXIMUM OR MINIMUM OF SECOND DEGREE REGRESSION EQUATIONS

When studying experiments with fertilizers from the economic point of view, it is rather common to use a quadratic regression equation $Y = \hat{a} X^2 + \hat{b} X + \hat{c}$, and to seek its point of maximum $X = -\frac{\hat{b}}{2\hat{c}}$. If the values of Y are supposed to be normally distributed, the same happens with the estimates $\hat{b}$ and $\hat{c}$, both linear functions of the Y's. This shows that for the economical interpretation of trials with fertilizers it is important to know what is the distribution of the ratio of two normal variates. To study the distribution of $X = -\frac{\hat{b}}{2\hat{c}}$, the statistics γ_1 and γ_2 of FISHER (1930) were used, as well as the third and fourth moments.

The results obtained show that in most cases the distribution of X is far from normal.

LITERATURA CITADA

D'AULÍSIO, M. de B.G. — 1970 — A Variância dos Pontos de Máximo ou de Mínimo de Equações de Regressão de Segundo Grau. *Resumos XXII Reunião Anual — SBPC* (Nota Prévia).

D'AULÍSIO, M. de B.G. — 1976 — A Variância dos Pontos de Máximo ou de Mínimo de Equações de Regressão de Segundo Grau. Dissertação de Mestrado apresentada à ESALQ, Piracicaba, SP.

FISHER, R.A. — 1930 — The Moments of the Distribution for Normal Samples of Meassures of Departure from Normality. *Royal Society*, Série A, **130**: 17-28.

KENDALL, M.G. e A. STUART — 1963 — The Advance Theory of Statistics, vols. 1 e 2. Charles Griffin & Company, Londres.