

# MODELAGEM DA DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA DE POVOAMENTOS EQUIÂNEOS DE EUCALIPTO UTILIZANDO A FUNÇÃO LOGÍSTICA GENERALIZADA<sup>1</sup>

Daniel Henrique Breda Binoti<sup>2</sup>, Mayra Luiza Marques da Silva Binoti<sup>3</sup> e Helio Garcia Leite<sup>4</sup>

**RESUMO** – Objetivou-se neste estudo analisar a aplicação da função logística generalizada para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando a função. Realizou-se também a modelagem da distribuição diamétrica utilizando a função Weibull para fins comparativos. Utilizaram-se dados de parcelas permanentes de um inventário florestal contínuo nas idades de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses. Ajustou-se a função logística generalizada e Weibull para todas as parcelas e medições. A aderência das funções aos dados foi verificada pela aplicação do teste Kolmogorov-Smirnov. A função logística generalizada apresentou resultados satisfatórios para a modelagem da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto.

Palavras-chave: Weibull; Eucalipto; Prognose.

## **MODELLING THE DIAMETER DISTRIBUTION OF EUCALYPT EVEN-AGED STANDS USING THE GENERALIZED LOGISTIC FUNCTION**

**ABSTRACT** – *The objective of this study was to examine the generalized logistic function to describe the diameter structure of eucalypt plantations, and propose a model of diameter distribution using the function. There was also modeling the diameter distribution using the Weibull function for comparative purposes. We used data from permanent of a continuous forest inventory measured at ages 28, 40, 52, 64, 76 and 84 months. The generalized logistics and Weibull function were set for all plots and measurements. The adherence of the functions to the data was verified by applying the Kolmogorov-Smirnov test. The generalized logistic function showed good results for modeling the diameter distribution of eucalypt.*

*Keywords: Weibull; Eucalypt; Prognosis.*

### **1. INTRODUÇÃO**

A modelagem do crescimento e produção florestal são partes integrantes do manejo e pesquisa florestal. A maioria dos estudos e aplicações da modelagem tem-se baseado na previsão de variáveis em nível de povoamento, para obtenção de informações necessárias à estimação do custo de colheita e transporte, produtividade e receitas. Apesar de tais

modelos terem proporcionado ganhos inestimáveis aos gestores florestais, esses ainda permanecem como simplificações da realidade (NORD-LARSENCAO, 2006).

Os recentes avanços na modelagem de crescimento florestal resultaram em modelos cada vez mais complexos que operam em nível de árvores individuais, demonstrando explicitamente interações complexas

---

<sup>1</sup> Recebido em 08.04.2013 aceito para publicação em 07.05.2015.

<sup>2</sup> Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Engenharia florestal, DEF, Campus UFV, Viçosa, MG - Brasil. E-mail: <danielhbbinoti@gmail.com>.

<sup>3</sup> Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Agrárias (CCA), Departamento de Ciências Florestais e da Madeira, Jerônimo Monteiro, ES - Brasil. E-mail: <mayrabinoti@gmail.com>.

<sup>4</sup> Universidade Federal de Viçosa, Centro de Ciências Agrárias, Departamento de Engenharia Florestal, Vicoso, MG - Brasil. E-mail: <Hgleite@gmail.com>.

entre as árvores e o ambiente (GUIMARÃES, 1994). Contudo, a obtenção das informações necessárias à construção e utilização desses modelos torna-os com pouco valor prático aos gestores florestais, especialmente no caso de povoamentos de eucalipto manejados com o intuito de produção de celulose e carvão.

Como alternativa, entre a utilização de modelos em nível de povoamento e modelos de árvore individual, encontram-se os modelos de distribuição diamétrica, que proporcionam conhecimento detalhado sobre a estrutura diamétrica do povoamento, permitindo a análise de multiprodutos, simulação de desbastes e uma consistente avaliação econômica, sem aumento significativo na complexidade dos modelos.

Os modelos de distribuição diamétrica apresentam como característica principal a utilização de uma função densidade de probabilidade (*fdp*) para descrição da estrutura diamétrica. Entre as diversas *fdp* utilizadas, destacam-se Weibull, normal, log-normal, gama, Johnson's SB, beta, log-logística, Cauchy, Frechet, Erlang, Rayleigh e hiper (BAILEY; DELL, 1973; HAFLEY; SCHREUDER, 1977; MALTAMO et al., 1995; MALTAMO et al., 2000; BINOTI, 2008; LEITE et al., 2010).

Apesar da existência de diversas funções estatísticas, o enfoque de modelagem da distribuição de povoamentos equiâneos tem sido o mesmo, com predomínio de uma das formas da função Weibull (CAMPOS; LEITE, 2009). Entre outras características, a boa correlação apresentada por seus parâmetros com características do povoamento tem sido fundamental à utilização dessa função.

Estudos estatísticos têm proposto novas funções com características interessantes para a modelagem e projeção da distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos. Uma dessas funções é a logística generalizada (NADARAJAH; KOTZ, 2005).

Objetivou-se neste estudo analisar a aplicação da função logística generalizada para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando essa função. Realizou-se também a modelagem da distribuição diamétrica com o uso da função Weibull para fins comparativos.

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos de 400 parcelas permanentes retangulares de 340 m<sup>2</sup>,

instaladas em povoamentos de híbridos de *Eucalyptus grandis* x *Eucalyptus urophylla*, na região Centro-Oeste do Estado de Minas Gerais, Brasil. Esses povoamentos foram estabelecidos em espaçamento de 3 x 3 m, com rotação de corte de 7 anos, em média. As medições de diâmetros acima de 5 cm foram efetuadas nas idades médias de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses.

Os dados de *dap* observados em cada parcela foram agrupados em classe com amplitude de 1,0 cm. Aos dados agrupados ajustou-se à função logística generalizada e de Weibull.

A função Weibull na sua configuração comumente usada pode ser descrita como:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left( \frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha}} \quad (1)$$

em que  $\beta$  é o parâmetro de escala ( $\beta > 0$ ),  $\alpha$  é o parâmetro de forma ( $\alpha > 0$ ) e  $\gamma$  é o parâmetro de localização ( $\gamma > 0$ ).

A função logística generalizada pode ser descrita como:

$$f(x) = \frac{\left( 1 + \alpha \left( \frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}}{\beta \left( 1 + \left( 1 + \alpha \left( \frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^2 \right)} \quad (2)$$

Sendo a função de densidade acumulativa definida por:

$$F(x) = \frac{1}{1 + \left( 1 + \alpha \left( \frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)} \quad (3)$$

em que  $\beta$  é o parâmetro de escala ( $\beta > 0$ ),  $\alpha$  é o parâmetro de forma ( $\alpha > 0$ ) e  $\gamma$  é o parâmetro de localização ( $\gamma > 0$ ).

Os ajustes foram feitos pelo método da máxima verossimilhança em ambiente Excel, com o auxílio de ferramentas do *Visual Basic for Applications*. Para avaliar a aderência da função aos dados, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) (GIBBONS; SUBHABRATA, 1992). Realizou-se a análise entre valores

estimados e observados de todos os ajustes obtidos com a função logística generalizada e Weibull.

A construção do modelo de distribuição diamétrica baseou-se na alternativa usual de correlação dos parâmetros da *fdp* com características do povoamento. Conforme Nogueira et al. (2005), utilizou-se como variáveis dependentes os parâmetros da função logística generalizada e Weibull em uma idade futura e, como variáveis independentes, os parâmetros da função e características do povoamento em uma idade atual. Para cada ajuste, foi feita a análise gráfica entre valores observados e estimados.

A redistribuição teórica dos diâmetros foi avaliada pela capacidade do sistema de equações em projetar o diâmetro máximo, o número total de árvores e os parâmetros da função logística generalizada ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ ) e Weibull ( $\alpha$  e  $\beta$ ) em qualquer idade. O sistema foi avaliado pela projeção de diferentes distribuições iniciais observadas para idades futuras e comparando com os respectivos valores observados de frequência por classe de diâmetro. Pela avaliação da exatidão das estimativas geradas pelas equações que compõem o modelo de distribuição de diâmetros, estimaram-se as seguintes estatísticas:

$$RQEQM(\%) = 100 / \bar{Y} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}}$$

em que  $\bar{y}$  é a média da saída observada e  $n$  é o número total de dados.

$$r_{y\hat{y}} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

### 3. RESULTADOS

Ajustou-se a função logística generalizada e Weibull para todas as parcelas e em cada situação, sendo cada estimativa comparada com a distribuição observada. Todos os ajustes resultaram em aderência aos dados pelo teste de Kolmogorov-Smirnov ( $P > 0,01$ ). Os valores médios da estatística do teste de K-S foram de 0,0723 e 0,0810 para a função logística generalizada e Weibull, respectivamente. Três parcelas foram escolhidas aleatoriamente, cujos ajustes são apresentados na Figura 1.

Os modelos de distribuição diamétrica ajustados com os respectivos coeficientes de correlação e *RQEQM* (%) são apresentados nos tópicos subsequentes.

#### 3.1. Logística generalizada

$$\hat{\alpha}_2 = \alpha_1 e^{(-0,0481 (t_2^{0,5063} - t_1^{0,5063}))} \quad R_{y\hat{y}}=93,76\% \quad RQEQM=31,19\%$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_1 e^{(-21,3299 (t_2^{-0,9421} - t_1^{-0,9421}))} \quad R_{y\hat{y}}=98,35\% \quad RQEQM=8,83\%$$

$$\hat{\gamma}_2 = \gamma_1 \left(\frac{I_1}{I_2}\right) + 1,44851 \left(-\frac{I_1}{I_2}\right) q \quad R_{y\hat{y}}=91,70\% \quad RQEQM=5,33\%$$

$$\ln \hat{\alpha}_2 = \ln \alpha_1 e^{(-0,7429 (t_2^{0,1318} - t_1^{0,1318}))} \quad R_{y\hat{y}}=98,18\% \quad RQEQM=13,35\%$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_1 \left(\frac{I_1}{I_2}\right) + 20,70921 \left(-\frac{I_1}{I_2}\right) \quad R_{y\hat{y}}=95,51\% \quad RQEQM=3,82\%$$

$$\hat{d}_{max_2} = d_{max_1} \left(\frac{I_1}{I_2}\right) + 25,3786 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) \quad R_{y\hat{y}}=95,25\% \quad RQEQM=4,94\%$$

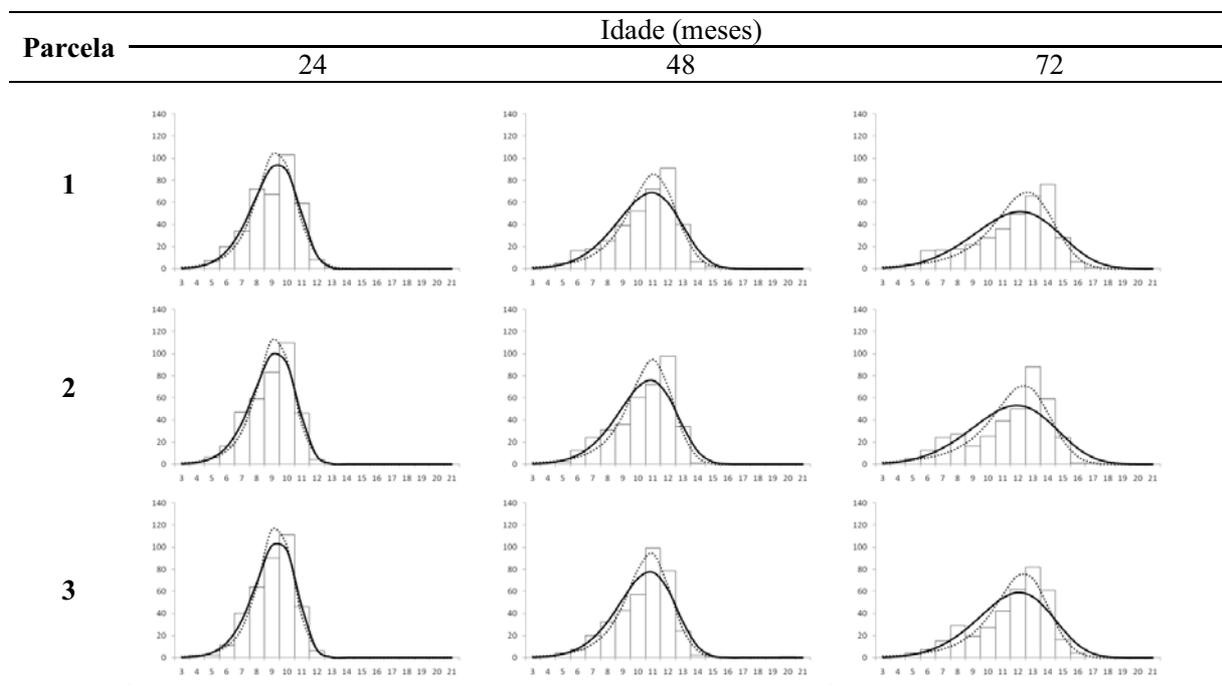
$$\hat{d}_{min_2} = d_{min_1} e^{(-16,6040 (t_2^{1,1574} - t_1^{1,1574}))} \quad R_{y\hat{y}}=88,41\% \quad RQEQM=8,78\%$$

em que  $I_1$  e  $I_2$  são as idades atual e futura, respectivamente, em meses;  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os parâmetros de forma da função logística generalizada e Weibull nas idades atual e futura;  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros de escala da função logística generalizada e Weibull nas idades atuais;  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os parâmetros de locação da função logística generalizada e futura;  $d_{max_1}$  e  $d_{max_2}$  são os diâmetros máximos nas idades atual e futura, em cm;  $d_{min_1}$  e  $d_{min_2}$  são os diâmetros mínimos nas idades atual e futura, em cm; e  $q$  é o diâmetro quadrático. Não houve necessidade de projeção da densidade do povoamento em função do baixo índice de mortalidade observado.

### 4. DISCUSSÃO

Ajustaram-se as funções logística generalizada e Weibull pelo método da máxima verossimilhança, bem como se avaliou a aderência das funções aos dados pelo teste de Kolmogorov-Smirnov. Diversos trabalhos encontrados na literatura utilizam esse método para a decisão da melhor *fdp* a ser utilizada em modelos de distribuição de diâmetros (BINOTI, 2008; CAMPOS; LEITE, 2009; LEITE et al., 2010).

As funções testadas demonstraram aderência aos dados pelo teste K-S, o que demonstra a possibilidade da utilização da função logística generalizada para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto. A função logística generalizada



**Figura 1** – Frequência observada e estimada pela função logística generalizada (....) e Weibull (—) em três parcelas instaladas em povoamentos equiâneos de eucalipto com idades de 24, 48 e 72 meses.

**Figure 1** – Observed and estimated frequency values by the generalized logistic (....) and Weibull (—) function in three plots installed in even-aged stands of eucalypt at ages 24, 48 and 72 months.

apresentou-se mais adequada para a descrição dos dados deste estudo, contudo a eficiência da função deve ser testada para a utilização em dados de povoamentos submetidos a desbastes.

Os modelos propostos em geral apresentaram altos coeficientes de correlação entre valores estimados e observados em todas as equações. Os parâmetros de forma de ambas as *fdp* apresentaram piores coeficientes de correlação e *RQEQM* (%); esse resultado se deve à maior dispersão natural observada para esse parâmetro em plantios de eucaliptos (GUIMARÃES, 1994).

O parâmetro de locação na maioria dos estudos sobre distribuição de diâmetros tem sido considerado o diâmetro mínimo do povoamento ou, simplesmente, eliminado da função. Essa medida é tomada porque o parâmetro de locação apresenta baixa correlação com características do povoamento, e sua exclusão contribui para a maior facilidade de projeção dos parâmetros de forma e de escala (RUSTAGI, 1977). A função logística generalizada apresenta como principal vantagem que

a utilização do parâmetro de locação não acarreta diminuição nas estimativas dos modelos de projeção, como observado em trabalhos utilizando a função Weibull (CAMPOS; LEITE, 2009).

Como proposta de estudos futuros, deve-se verificar a eficiência da função logística generalizada para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos manejada sobre regime de desbaste. Aconselha-se a avaliação de diferentes formas de ajuste e formas de truncamento para melhor adequação biológica.

## 5. CONCLUSÃO

A função Logística generalizada pode ser utilizada com eficiência para projetar distribuições de diâmetros em povoamentos de eucalipto.

## 6. REFERÊNCIAS

BAILEY, R.L.; DELL, T.R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science**, v.19, n.2, p.97-104, 1973.

- BINOTI, D.H.B. **Funções densidade de probabilidade para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos desbastados de *Tectona grandis***. 2008. 42f. Monografia (Graduação em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2008.
- CAMPOS, J.C.C.; LEITE, H.G. Mensuração florestal: perguntas e respostas. 3.ed. Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa, 2009.
- GIBBONS, J.D.; SUBHABRATA, C. Nonparametric statistical inference. 3. ed. New York: Marcel Dekker, 1992. 544p. (Statistics: textbook and monograph, 31).
- GUIMARÃES, D.P. **Desenvolvimento de um modelo de distribuição diamétrica de passo invariante para prognose e projeção da estrutura de povoamentos de eucalipto**. 194. Tese (Doutorado em Ciência Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 1994.
- HAFLEY, W.L.; SCHREUDER, H.T. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. **Canadian Journal of Forest Research**, v.7, p.184-487, 1977.
- LEITE, H.G.; BINOTI, D.H.B.; GUIMARÃES, D.P.; SILVA, M.L.M.; GARCIA, S.L.R. Avaliação do ajuste das funções Weibull e hiperbólica a dados de povoamentos de eucalipto submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.34, n.2, p.331-335, 2010.
- MALTAMO, M.; KANGAS, A.; UUTTERA, J.; TORNIAINEN, T.; SARAMAKI, J. Comparison of percentile based prediction methods and the Weibull distribution in describing the diameter distribution of heterogeneous Scots pine stands. **Forest Ecology Management**, v.133, n.3, p.263-274, 2000.
- MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PAIVINEN, R. Comparison of beta and Weibull functions for modeling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scandinavian Journal Forest Research**, v.10, p.284-295, 1995.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. A Generalized logistic distribution. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, v.19, p.3169-3174, 2005.
- NOGUEIRA, G.S.; LEITE, H.G.; CAMPOS, J.C.C.; CARVALHO, A.F.; SOUZA, A.L. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.29, n.4, p.579-589, 2005.
- NORD-LARSEN, T.; CAO, Q.V. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. **Forest Ecology and Management**, v.2, n.31, p.218-225, 2006.
- RUSTAGI, K.P. Predicting stand structure in even-aged stands. In: GROWTH MODELS FOR LONG TERM FORECASTING OF TIMBER YIELDS, 1977, Blacksburg. Proceeding... [S.L]: IUFRO, 1977. p.1-16.