
**PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES MONOESTÁGIO COM
RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE: MODELAGEM, MÉTODO DE RESOLUÇÃO
E RESULTADOS COMPUTACIONAIS**

Silvio Alexandre de Araujo
Marcos Nereu Arenales
ICMC/USP-CP 668
CEP 13560-970 – São Carlos – SP
{saraujo, arenales}@icmc.sc.usp.br

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre o método de resolução de um problema de dimensionamento de lotes monoestágio proposto por Trigeiro *et al.* (1989). Este problema consiste em determinar as quantidades de itens a serem produzidas em diferentes períodos de tempo, de modo a minimizar a soma dos custos de produção, preparação e estoque. A quantidade produzida em cada período deve ser capaz de atender as demandas dos itens, sem exceder a capacidade de máquina. Para retratar o consumo de recursos, são incluídos tempos de preparação e produção. O método de resolução desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) consiste num método heurístico baseado em relaxação Lagrangiana, no método de otimização do subgradiente e em uma heurística de factibilização. Neste trabalho, esse método foi implementado considerando custos variáveis no tempo. Além disso, foi proposta uma mudança, baseada nas condições de otimalidade do problema, na fase de melhoria da solução factível. São apresentados alguns experimentos computacionais comparando as duas versões.

Palavras-chave: programação inteira, dimensionamento de lotes, planejamento da produção.

Abstract

This work presents a study on the resolution method of the single product lot sizing problem formulated by Trigeiro *et al.* (1989). This problem consists of determining the quantities to be produced in different periods of time, minimizing the sum of costs of production, setup and inventory. The quantity to be produced in each period should be sufficient to attend the demands of items, without exceeding the capacity of the machine. To model the aspects of consumption of resources, setup and production times are included in the model. The resolution method developed by Trigeiro *et al.* (1989) consists of a heuristic method based on Lagrangean relaxation, subgradient optimization and a heuristic smoothing procedure. In this work that method was implemented considering variable costs. Furthermore, it was proposed a modification, based on the optimality conditions of the problem, during the phase of the improvement of the feasible solution. Some computational experiments are presented comparing both versions.

Keywords: integer programming, lot-sizing, production planning.

1. Introdução

A indústria de manufatura tem sido muito estimulada a tornar seus processos mais eficientes. Este estímulo advém da maior competitividade imposta pelas transformações que têm afetado a ordem econômica mundial. Assim, as indústrias vêm sofrendo profundas mudanças no seu setor produtivo no que tange à modernização de seus processos de produção, melhoria da qualidade de seus produtos e racionalização administrativa.

O gerenciamento da produção dentro de uma empresa é responsável pela transformação de matérias-primas em produtos acabados. O sistema responsável por este gerenciamento denomina-se Planejamento e Controle da Produção (PCP), que coordena todas as atividades, desde a aquisição de matérias-primas, até a entrega dos produtos acabados. A estrutura hierárquica de um sistema PCP pode ser dividida em três níveis de planejamento distintos: estratégico, tático e operacional (Anthony, 1965).

O planejamento estratégico está relacionado ao mais alto nível de tomada de decisões, onde são definidas as metas globais de uma empresa e as políticas adequadas para atingi-las, determinando os objetivos da empresa a longo prazo.

O planejamento tático é responsável pela implementação das estratégias definidas no nível superior (planejamento estratégico), de forma a utilizar eficientemente os recursos disponíveis. Nesta etapa devem ser tomadas as decisões a médio prazo.

Por fim, tem-se o planejamento operacional que trata de decisões do dia-a-dia da produção de uma empresa, ou seja, são tomadas decisões a curto prazo, tendo como objetivo executar os planos definidos anteriormente.

Este trabalho enfoca os problemas de tomada de decisão relacionados com o planejamento tático/operacional. O planejamento da produção nestes níveis consiste no processo de determinar um plano de quanto produzir e/ou comprar nos próximos períodos de tempo, chamado de horizonte de planejamento. Também determina os níveis de estoque e os recursos necessários para implementar tal plano (Thomas & McClain, 1993).

Neste contexto, situa-se o problema de dimensionamento de lotes, que consiste em planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias (ou única) máquinas, em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender uma certa demanda, sujeito a restrições de limitação de capacidade, tendo como objetivo otimizar uma função, que pode ser, minimizar custos.

Os problemas de dimensionamento de lotes podem ser divididos em monoestágio e multiestágio. Denomina-se sistema de produção multiestágio quando a produção de determinado item depende da produção de outro item, chamado item componente. Diz-se que um sistema de produção é monoestágio quando os itens a serem produzidos são independentes, ou seja, nenhum item depende da produção de outro item. A motivação para estudar a classe de problemas de dimensionamento de lotes monoestágios está no fato de que, além de sua potencialidade de aplicações, como nas “indústrias de processo” onde o processo de produção é contínuo (por exemplo: indústrias de cimento, siderúrgicas, petroquímica e alimentícias), o problema monoestágio aparece também como um subproblema de casos mais gerais, de modo que, implementações eficientes dos bons algoritmos disponíveis melhoram o desempenho de algoritmos projetados para problemas mais gerais. O problema monoestágio pode ser subdividido em várias categorias, por exemplo: pode ser considerado para um único item ou para vários itens, com ou sem restrição de capacidade ou ainda pode considerar ou não tempo de preparação (Bahl *et al.* 1987).

Neste trabalho serão considerados tempos de preparação de máquina. A consideração ou não de tempos de preparação na modelagem do problema tem gerado algumas controvérsias. Alguns autores sugerem que tempos de preparação já estão incluídos implicitamente nos custos de preparação (Maes & Van Wassenhove, 1991), não sendo necessário incorporá-los ao modelo. Outros autores, afirmam que a substituição dos tempos de preparação por seus custos pode levar a uma representação falsa do consumo de recursos (Billington *et al.*, 1983 e Kuik *et al.*, 1994). Billington *et al.* (1994) destacam que o tempo de preparação pode ser ignorado em algumas indústrias de processo, mas em vários sistemas com restrição de capacidade, um dos fatores mais críticos do problema de dimensionamento de lotes é o tempo de preparação e não seu custo. Trigeiro *et al.* (1989) fazem um exemplo mostrando que certos problemas não devem ser formulados sem a inclusão de tempos de preparação.

A inclusão de tempos de preparação aumenta bastante o grau de complexidade do problema. Florian *et al.* (1980) mostraram que, para problemas com recursos de produção limitados e custos de preparação, encontrar a solução ótima para o problema com um único item é um problema *NP-Hard*. Bitran & Yanasse (1982) mostraram que vários casos de problemas com um único item podem ser resolvidos em tempo polinomial, tornando-se *NP-Hard* quando um segundo item é introduzido. Quando se considera tempo de preparação, o problema de encontrar uma solução factível é *NP-Completo* (Maes *et al.*, 1991). Para tempos de preparação nulos, as restrições são lineares e, portanto, o problema de factibilidade é da classe *P*. Esta é uma das razões pela qual a maioria das pesquisas não inclui tempos de preparação. Dzielinski & Gomory (1965) por exemplo, tratam do problema de dimensionamento de lotes sem considerar tempo de preparação utilizando a decomposição de Dantzig & Wolfe (1960). Drexel & Kimms (1997) consideram modelos que acoplam os problemas de planejamento (*lot sizing*) e programação (*scheduling*) sem considerar tempos de preparação. Uma revisão bibliográfica mais completa de problemas monoestágios pode ser encontrada em Bahl *et al.* (1987) e Kuik *et al.* (1994).

2. Formulação do Problema

Este trabalho foi baseado no modelo de Trigeiro *et al.* (1989) onde se considera o problema de dimensionamento de lotes monoestágio com vários itens, restrição de capacidade, custos de produção, preparação e estoque e, para retratar o consumo de recursos, são incluídos tempos de preparação e produção. Além disso, o modelo considera que todos os custos e as demandas podem variar para cada item em cada período de tempo.

Os seguintes dados são utilizados no modelo:

c_{it}	Custo unitário de produção do item i no período t .
S_{it}	Custo de preparação para a produção do item i no período t .
H_{it}	Custo unitário de estocagem do item i no período t .
b_i	Tempo necessário para produzir uma unidade do item i .
s_i	Tempo de preparação para a produção do item i .
CAP_t	Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t .
d_{it}	Demanda do item i no período t .
M	Número grande.

As variáveis de decisão são:

X_{it}	Unidades do item i produzidas no período t .
I_{it}	Unidades do item i estocadas no período t .
Y_{it}	Variável binária, indicando a produção ($Y_{it}=1$) ou não ($Y_{it}=0$) do item i no período t .

Índices:

$t = 1, \dots, T$ Períodos de tempo.
 $i = 1, \dots, N$ Itens.

Modelo:

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} + \sum_t \sum_i c_{it} X_{it} + \sum_t \sum_i S_{it} Y_{it} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (2)$$

$$\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} \leq CAP_t \quad \forall t \quad (3)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (4)$$

$$Y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, t \quad (5)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (6)$$

Nesta formulação, a função objetivo (1) consiste em minimizar a soma dos custos de produção, estoque e preparação. As restrições (2) são de balanço de estoque, ou seja, a cada período, quantidade produzida mais a quantidade disponível em estoque (sobra do período anterior) menos o que sobrar em estoque para o período seguinte deve ser igual à demanda do período. As restrições (3) são devido a limitação de capacidade onde se leva em consideração o tempo despendido para a produção dos itens e preparação das máquinas. As restrições (4) e (5) asseguram que o tempo e o custo de preparação são considerados apenas quando existe produção e, por fim, (6) são restrições de não negatividade. O estoque inicial é considerado igual a zero ($I_{i0}=0 \forall i$) sem perda de generalidade pois, em casos onde $I_{i0} \neq 0$, pode-se reduzir este valor na demanda do item. Cabe observar aqui que existem outras formulações para este problema, como por exemplo, a apresentada por Diaby *et al.* (1992), que desenvolveram um método de resolução baseado num procedimento de enumeração implícita.

3. Método de Resolução

O método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) é um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade (3) utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrição de capacidade. Estes subproblemas são resolvidos por programação dinâmica utilizando o algoritmo ótimo de Wagner & Whitin (1958). O valor da solução do problema Lagrangiano (problema relaxado), constitui um limitante inferior para o problema original. Em geral, a solução do problema Lagrangiano é infactível para o problema original, pois viola as restrições de capacidade. Aplica-se então, uma heurística que transfere a produção entre períodos, na tentativa de obter uma solução factível. Por fim, a atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita utilizando-se o método de otimização do subgradiente. A utilização do método do subgradiente garante a obtenção, no limite, do melhor (maior) limitante inferior. No entanto, em se tratando de programação inteira, tem-se que o valor do melhor limitante inferior pode ser menor que o valor ótimo da função objetivo do problema original, devido ao chamado “*gap de dualidade*”, que consiste na diferença entre o valor ótimo da função objetivo do

problema dual Lagrangiano (melhor limitante inferior) e o valor ótimo da função objetivo do problema original.

Neste trabalho, a exemplo de Trigeiro *et al.* (1989), a avaliação da solução obtida é feita através da diferença percentual entre o valor da função objetivo para a melhor solução factível encontrada (limitante superior) e o valor do melhor limitante inferior. Esta diferença percentual será chamada de “*gap da solução*”.

$$\text{gap da solução} = \frac{\text{lim sup} - \text{lim inf}}{\text{lim inf}} \cdot 100$$

Observe que o numerador da fração acima representa a soma do *gap de dualidade* com a diferença entre o valor da melhor solução factível encontrada (limitante superior) e o valor da solução ótima.

Quando o *gap da solução* é pequeno, pode-se dizer que o valor da função objetivo obtido pela solução factível está próximo do valor ótimo. No entanto, quando o *gap da solução* é alto, não se pode afirmar que o valor obtido pela solução factível está longe do valor ótimo, ou se existe um *gap de dualidade* grande.

3.1 Obtenção do Limitante Inferior

Para se obter um limitante inferior para o problema, aplica-se a técnica de relaxação Lagrangiana às restrições de capacidade (3). O problema Lagrangiano é definido por:

Problema Lagrangiano ($\lambda_t^k \geq 0$):

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} + \sum_t \sum_i (c_{it} + \lambda_t^k b_i) X_{it} + \sum_t \sum_i (S_{it} + \lambda_t^k s_i) Y_{it} - \sum_t \lambda_t^k \text{CAP}_t \quad (7)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (8)$$

$$X_{it} - MY_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (9)$$

$$Y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall i, t \quad (10)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (11)$$

Observe que as únicas restrições que ligavam os itens eram as restrições de capacidade (3). Assim, o problema Lagrangiano (7)-(11) pode ser decomposto item a item, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrições de capacidade. Isto torna possível a resolução do problema (7)-(11) pela utilização da técnica de programação dinâmica de Wagner & Whitin (1958), a qual é aplicada em cada um dos subproblemas separadamente. As soluções para estes subproblemas são agrupadas e, em geral, a solução resultante deste agrupamento não é factível para o problema (1)-(6), devido ao fato de não estarem sendo consideradas as restrições de capacidade. O valor da função objetivo do problema Lagrangiano (7)-(11), para cada $\lambda_t^k \geq 0$, produzirá um limitante inferior para o problema original (1)-(6). O método de otimização do subgradiente é utilizado para atualizar os multiplicadores de Lagrange determinando λ_t^k que forneça o maior dos limitantes inferiores (Held *et al.* 1974 e Camerini *et al.* 1975).

3.2 Heurística de Factibilização

A heurística de factibilização desenvolvida por Trigeiro *et al.* (1989) parte da solução obtida pelo algoritmo de programação dinâmica, tentando ajustar os lotes de acordo com a capacidade disponível em cada período. O procedimento tem quatro passos iniciais, dois regressivos e dois progressivos no tempo, descritos a seguir:

- **1ª Passo regressivo no tempo:**

Este passo é iniciado no fim do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos anteriores. Se houver violação de capacidade num período, cada item com produção positiva é avaliado, com o objetivo de verificar qual é o mais adequado para ser transferido. O item mais adequado é aquele que tem o menor custo por unidade de violação eliminada.

Para transferir um item i de um determinado período t tem-se:

Se o tamanho do lote do item i no período t não for maior do que a violação do período t , duas opções são consideradas:

- Mover todo o lote para o período imediatamente anterior ($t-1$).
- Mover todo o lote para outro período anterior ($t-j$, com $j>1$), onde $t-j$ é o primeiro período anterior no qual o item i já esteja sendo produzido. Assim, evita-se os custos associados a uma preparação.

No entanto, se o tamanho do lote é maior do que a violação, três diferentes combinações de quantidade e períodos são considerados para a transferência:

- Mover a quantidade necessária para eliminar a violação para o período $t-1$.
- Mover a quantidade necessária para eliminar a violação para o período $t-j$.
- Mover todo o lote para o período $t-j$.

Cabe observar que, transferir mais do que o necessário para eliminar a violação para um período anterior será considerado somente se não houver violação da capacidade deste período anterior.

O item de menor custo é transferido de acordo com um dos procedimentos descritos acima. Se persistir a violação no período t , um outro item é escolhido e o processo é repetido até que a violação do período seja eliminada. O mesmo processo é aplicado ao período anterior ($t-1$) e assim por diante, até o período 2. Observe que, ao final do passo regressivo tem-se uma solução factível, exceto possivelmente para o primeiro período.

- **1ª Passo progressivo no tempo:**

Este passo é iniciado no começo do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos posteriores. O período alvo é sempre o imediatamente posterior e a quantidade transferida é o estoque I_{it} . Os itens que podem ser transferidos são:

- Os itens que foram agrupados pelo algoritmo de Wagner & Whitin (1958).
- Aqueles que foram transferidos pelo primeiro passo regressivo.

As transferências terminam quando as *violações acumuladas* forem eliminadas para todos os períodos, ou seja, as necessidades acumuladas até o período t forem menores ou iguais à capacidade acumulada até o mesmo período (para todo t):

$$\sum_{\tau=1}^t \left(\sum_i b_i X_{i\tau} + \sum_i s_i Y_{i\tau} \right) \leq \sum_{\tau=1}^t CAP_{\tau} \quad \text{para todo } t \quad (12)$$

Observe que a desigualdade acima não implica na eliminação da violação de todos os períodos de 1, ..., t. Pois, para um dado período t' onde $1 < t' \leq t$, pode ocorrer que:

$$\sum_i b_i X_{it'} + \sum_i s_i Y_{it'} > CAP_{t'} \quad \text{onde } 1 < t' \leq t \quad (13)$$

Observe ainda que nenhuma tentativa é feita para evitar violação no período alvo. No entanto, não são permitidos atrasos na produção.

- **2ª Passo regressivo no tempo:**

Idêntico ao primeiro, exceto pelo seu estado inicial que é determinado pelo resultado dos dois primeiros passos.

- **2ª Passo progressivo no tempo:**

Mais rigoroso do que o primeiro. No primeiro a produção é enviada para períodos posteriores até que as *violações acumuladas* sejam eliminadas. Neste segundo passo progressivo continua-se trabalhando no período até que toda a *violação* seja eliminada. A diferença entre violação acumulada e violação pode ser vista pelas equações (12) e (13).

Se ao final deste passo a violação não for eliminada, o procedimento é abandonado, as variáveis duais são atualizadas e um novo problema Lagrangiano é resolvido produzindo outra solução.

3.3 Arranjo Final

Caso uma solução factível seja encontrada nos quatro passos iniciais, tem-se ainda um quinto passo, denominado “arranjo final”, que tenta eliminar estoques desnecessários. Este arranjo consiste basicamente no seguinte: iniciando-se com uma solução factível, os períodos são processados em ordem decrescente. Períodos sem folga de capacidade são pulados e, num período t com folga de capacidade, todos os itens que são produzidos são checados, selecionando aqueles em que $I_{i,t-1} X_{it} \neq 0$, ou seja, o produto do estoque do item i no período $t-1$ pela quantidade produzida do item i no período t é diferente de zero. Escolhido um item k , a produção deste item é acrescida em t e decrescida em $t-j$ (onde $t-j$ é um período “anterior” para o qual o estoque final é positivo para todos os períodos desde $t-j$ até $t-1$ inclusive). Isto é feito até que não haja mais folga no período t , ou que o estoque seja eliminado em algum período.

3.4 Arranjo Final Modificado

Em nosso trabalho, foi implementado o método de Trigeiro *et al.* (1989) para custos variáveis no tempo e proposto um novo arranjo final para este método. Esta nova proposta foi feita com base nas seguintes observações:

- O “arranjo final” proposto por Trigeiro *et al.* (1989) tenta satisfazer a propriedade $I_{i,t-1} X_{it} = 0$ ($\forall i, t$). Assim, dado um determinado item k com $I_{k,t-1} X_{kt} \neq 0$ onde t é um período com folga de capacidade, a produção deste item k é incrementada no período t , fazendo com que o estoque do item k no período $t-1$ seja diminuído e, conseqüentemente os custos de estocagem também serão diminuídos. No entanto, $I_{i,t-1} X_{it} = 0$ ($\forall t$) é propriedade de otimalidade para o problema com um único item e sem restrição de capacidade mas, o problema em apreço, consiste num problema com vários itens e com restrição de capacidade, de modo que, a propriedade acima deixa de ser uma propriedade de otimalidade.

- b) Como o modelo considera que todos os custos podem variar a cada item e a cada período, o procedimento de melhoria proposto por Trigeiro *et al.* (1989) pode vir a piorar a solução obtida pelos quatro passos iniciais da heurística de factibilização. De fato, se o custo unitário de produção for variável, pode-se transferir produção para um período onde este custo é muito alto, fazendo com que o custo total aumente. Na implementação do método, Trigeiro *et al.* (1989) consideram todos os custos constantes no tempo, apesar de modelarem o problema com custos variáveis no tempo. Neste trabalho, o método foi implementado para custos variáveis no tempo, seguindo a modelagem do problema. Entretanto, cabe observar que, muitos autores consideram custos constantes no tempo, argumentando que isto é o que acontece na maioria dos problemas práticos.
- c) Por fim, tem-se a última e mais importante observação que é baseada no seguinte teorema (Geoffrion, 1974): Dada uma solução do problema Lagrangiano, esta solução será ótima para o problema original se, e somente se, satisfaz:
- i. A solução é ótima para o problema Lagrangiano.
 - ii. A solução é factível para o problema original.
 - iii. A solução satisfaz as condições de folgas complementares.

Na heurística de factibilização desenvolvida por Trigeiro *et al.* (1989) tem-se que, nos quatro passos iniciais somente as duas primeiras condições deste teorema são levadas em consideração, ou seja, tenta-se fazer as transferências de modo a se chegar a uma solução factível para o problema original (condição (ii)) na qual, o valor da função objetivo do problema Lagrangiano para esta solução factível, esteja o mais próximo possível do valor ótimo da função objetivo do problema Lagrangiano (condição (i)). Posteriormente, o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) também considera somente as duas primeiras condições do teorema, somadas à propriedade $I_{i,t-1}X_{it}=0$ ($\forall i,t$) ou seja, dado que algum item k esteja violando esta propriedade ($I_{k,t-1}X_{kt} \neq 0$) em algum período t com folga de capacidade, procura-se eliminar esta violação fazendo transferências de produção do item k para o período t . No entanto, ao fazer estas transferências o arranjo mantém a factibilidade da solução procurando não se afastar muito do valor ótimo do problema Lagrangiano.

A partir das três observações acima, foi desenvolvido em nosso trabalho um novo arranjo final, buscando satisfazer as três condições do teorema anterior. Assim, após a aplicação dos quatro passos iniciais, os quais são iguais ao que foi proposto por Trigeiro *et al.* (1989), quando se obtém uma solução factível, aplica-se um arranjo final fazendo algumas transferências de modo a manter a factibilidade da solução (condição (ii)), procurando afastar o mínimo possível do valor ótimo da função objetivo do problema Lagrangiano (condição (i)) e, ao invés de buscar a propriedade $I_{i,t-1}X_{it}=0$ ($\forall i,t$), como faz Trigeiro *et al.* (1989), busca-se satisfazer a condição de folgas complementares (condição (iii)), a qual é uma propriedade de otimalidade para o problema com restrição de capacidade.

3.4.1 Descrição do Arranjo Final Modificado

O procedimento consiste de dois passos: um passo regressivo no tempo e outro progressivo no tempo. A seguir, será descrito o passo regressivo no tempo, sendo que, o passo progressivo segue a mesma idéia e será omitido. Maiores detalhes sobre o arranjo final modificado podem ser encontrados em Araujo (1999).

• **Passo regressivo no tempo:**

Partindo de uma solução factível, inicia-se no fim do horizonte de planejamento (período T) e evolui em direção ao período inicial. Se num determinado período t, existir folga de capacidade ($(\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} - CAP_t) < 0$) e, o valor do multiplicador de Lagrange para este período for maior que zero ($\lambda_t > 0$), este período não estará satisfazendo as condições de folgas complementares ($\lambda_t(CAP_t - \sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it}) = 0$). Diante disso, deve-se transferir produção para este período t de modo que a folga de capacidade seja eliminada, ou seja, ($(\sum_i b_i X_{it} + \sum_i s_i Y_{it} - CAP_t) = 0$). Com isso, busca-se a propriedade (iii) do teorema descrito em Geoffrion, 1974.

Para transferir produção para este período t, inicialmente procura-se um período t' anterior a t ($t' < t$), para o qual o vetor multiplicador de Lagrange é zero ($\lambda_{t'} = 0$). Encontrado tal período, verifica-se todos os itens que estão sendo produzidos, para avaliar qual o item de menor custo para ser transferido. Os custos envolvidos são: custos de produção, preparação, estoque e os custos Lagrangianos. Escolhido o item k de menor custo, a produção (ou parte da produção) deste item somente será transferida para o período t, se o valor da função objetivo após a sua transferência, for menor que o valor da função objetivo antes da transferência. Assim, ao escolher o item de menor custo e só fazer sua transferência se a função objetivo for melhorada, tenta-se aproximar-se do valor ótimo da função objetivo Lagrangiana, ou seja, busca-se a propriedade (i) do teorema (Geoffrion, 1974).

Quando um item k é escolhido para ser transferido do período t' para o período t, a quantidade deste item a ser transferida será o mínimo entre:

- a quantidade produzida do item k no período t';
- a menor quantidade de estoque do item k para todos os períodos desde t' até t-1;
- a folga de capacidade do período t, menos o tempo gasto com *setup* do item k (se for preciso um novo *setup* após a transferência) dividido pelo tempo unitário de produção do item k.

Ou seja, a quantidade a ser transferida será:

$$\delta = \min \{ X_{kt'}, I_{kh}, h=t', \dots, t-1; \text{Folga}(t)/b_k \}$$

$$\text{onde: Folga}(t) = \begin{cases} CAP_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it} & \text{se } Y_{kt} = 1 \\ CAP_t - \sum_i b_i X_{it} - \sum_i s_i Y_{it} - s_k & \text{se } Y_{kt} = 0 \end{cases}$$

Observe que, toda esta preocupação com a quantidade a ser transferida se dá exatamente para manter a factibilidade da solução. Com isso, busca-se satisfazer a propriedade (ii) do teorema (Geoffrion, 1974).

Se a transferência de um item não for suficiente para eliminar a folga de capacidade do período t, um outro item é escolhido, determina-se a quantidade deste item que deverá ser transferida e transfere-se novamente. Isto é feito até que não haja mais folga no período t, ou que seja atingido um número máximo de três iterações (este valor foi obtido após extensivos testes computacionais). Quando a folga de capacidade do período t é eliminada, o arranjo passa a examinar o período t-1 e o processo se repete.

4. Resultados Computacionais

Esta seção será subdividida em três subseções. Na primeira, descrevem-se os parâmetros utilizados para a geração de dados. Na segunda, comentam-se os resultados computacionais obtidos após a implementação do método de Trigeiro *et al.* (1989) para custos variáveis no tempo. Por fim, na terceira subseção, têm-se alguns gráficos e tabelas mostrando os resultados obtidos da comparação entre o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) e a nossa proposta de arranjo final (arranjo final modificado).

4.1 Geração de dados

Os dados foram gerados aleatoriamente segundo uma distribuição de probabilidade uniforme. Os intervalos utilizados para a geração dos dados são descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – Intervalos para geração dos dados.

Parâmetro	Variações	Observação	Sigla
Custo unitário de Produção (c_{it})	0	Fixo	F
	U[10,30]	Variável	V
Custo de Preparação (S_{it})	U[100,500]	Baixo	CB
	U[200,1000]	Alto	CA
Custo de estocagem	U[1,5]	–	–
Tempo unitário para produção (b_i)	1	–	–
Tempo de Preparação (s_i)	U[10,50]	Baixo	TB
	U[30,150]	Alto	TA
Demanda (d_{it})	U[0,180]	25% das demandas dos 4 primeiros períodos são fixadas em zero	–
Capacidade (CAP_t)	$CAP_t/0,85$	Folgada	C_1
	CAP_t	Normal	C_2

A maioria dos intervalos utilizados para geração dos dados foi obtida com base no artigo de Trigeiro *et al.* (1989), no entanto, alguns intervalos não são exatamente iguais aos deste artigo. A seguir, serão feitos alguns comentários com respeito a geração dos dados:

- além do custo unitário de produção fixo em zero, foi considerado um custo unitário de produção variável no intervalo [10,30]. Este intervalo de variação foi determinado com base em nossos testes computacionais. Entretanto, os testes feitos com este intervalo não têm a intenção de simular exemplos práticos, mas somente obter resultados que comprovam o que havia sido exposto teoricamente a respeito da influência, nas duas versões de arranjos finais, quando se considera custos de produção variáveis no tempo;
- a quantidade de itens (N) e o número de períodos (T) são dados na Tabela 2;
- a capacidade foi gerada segundo uma média da política lote-por-lote, isto é, para cada período t, calcula-se a quantidade de recursos necessária para produzir exatamente as demandas dos itens neste período. Obviamente, esse cálculo é feito somente para os itens que têm demanda positiva no período t. Soma-se a quantidade de recursos necessária para todos os períodos e divide-se pelo número de períodos (T), ou seja:

$$CAP_t = \frac{\sum_{t=1}^T [\sum_{i=1}^N (b_i d_{it} + s_i)]}{T} \quad (14)$$

Para realizar os testes computacionais, foram utilizados dois níveis de capacidade diferentes:

C_1 : $CAP_t/0,85$ considerada folgada;

C_2 : CAP_t considerada normal.

Trigeiro *et al.* (1989) consideram três níveis de capacidade: folgada ($CAP_t/0,75$), normal ($CAP_t/1$) e apertada ($CAP_t/1,10$). No entanto, os testes computacionais mostraram que, para o nível de capacidade ($CAP_t/0,75$) muitos exemplos foram resolvidos pelo método de Wagner-Whitin e não utilizaram a heurística de factibilização e, para o nível ($CAP_t/1,10$) muitos exemplos foram infactíveis. Assim, utilizou-se os níveis de capacidade C_1 e C_2 descritos acima pois, além de conseguir obter, com mais facilidade, exemplos resolvidos pela heurística de factibilização, foi mais clara a análise das duas propostas de arranjos finais.

4.2 Resultados Computacionais para o Método de Trigeiro *et al.* (1989) com Custos Variáveis no Tempo

Segundo Trigeiro *et al.* (1989), na implementação do método, todos os custos foram considerados constantes no tempo. No entanto, o modelo (1)-(6) proposto por Trigeiro *et al.* (1989) considera todos os custos variáveis no tempo. Diante disso, neste trabalho, o método foi implementado para custos variáveis no tempo. A implementação foi feita em linguagem C e os testes computacionais foram realizados em um micro computador Pentium II, 300 Mhz, 132 MB. Os resultados computacionais obtidos são apresentados na Subseção 4.3. As conclusões com respeito à variação dos parâmetros, considerando custos variáveis no tempo, foram semelhantes às conclusões obtidas por Trigeiro *et al.* (1989) e serão descritas a seguir:

- quanto maior o número de itens e períodos, menor é o *gap da solução* (definido na Seção 3), sendo que, a variação da quantidade de itens tem maior influência do que a variação do número de períodos. Este é um resultado bastante importante pois, em muitos casos testa-se um determinado método de resolução para exemplos pequenos e, se estes resultados forem ruins, conclui-se erroneamente que os resultados serão ainda piores para exemplos grandes, podendo gerar uma falsa avaliação da qualidade do método. Segundo Trigeiro *et al.* (1989), problemas com poucos itens têm menos combinações possíveis no uso dos recursos, enquanto que, quando se tem muitos itens é possível fazer variadas combinações, sendo assim, os recursos podem ser melhor utilizados, tornando o problema mais fácil.
- a variação da capacidade tem um grande efeito sobre *gap da solução*. Exemplos com capacidade normal resultam num *gap da solução* maior que exemplos com capacidade folgada;
- quanto se considera tempo de preparação alto tem-se que o *gap da solução* é menor do que exemplos com tempo de preparação baixo. Isto acontece porque o tempo de preparação é incluído na geração da capacidade (Subseção 4.1), sendo assim, altos tempos de preparação geram problemas com capacidades mais folgadas (equação 14). Portanto, este resultado está ligado à forma de geração dos dados, embora não deva ser esperado se a geração de capacidade for independente dos tempos de preparação. Entretanto, optamos por gerar a capacidade da forma dada em Trigeiro *et al.* (1989).
- o custo de preparação tem um efeito bastante sutil no *gap da solução*, em geral, quanto mais alto for o custo de preparação, maior será o *gap da solução*. A explicação para este

fato é bastante intuitiva. Exemplos com baixo custo de preparação tendem a ter uma melhor distribuição da produção entre os períodos, facilitando a resolução em termos de violação da capacidade e conseqüentemente, o *gap da solução* é menor do que exemplos com alto custo de preparação;

- a variação da demanda e do tempo unitário de produção têm pouco efeito sobre o *gap da solução*.

4.3 Comparação Entre as Duas Propostas de Arranjo Final

Após implementar o método de Trigeiro *et al.* (1989) considerando custos variáveis no tempo, foi implementado o arranjo final modificado para que fosse adaptado ao método e pudesse ser feita uma comparação com o arranjo final original. Com isso, foi possível verificar qual arranjo final obtinha melhores resultados para cada combinação de parâmetros. Os resultados desta comparação serão descritos a seguir.

Os parâmetros que têm maior efeito sobre o *gap da solução* são: o número de itens e períodos, a capacidade, o custo de preparação e o tempo de preparação. Por este motivo, neste trabalho optou-se por variar apenas estes parâmetros além do custo unitário de produção que será considerado fixo ou variável. Assim, foram realizados testes computacionais considerando todas as possíveis combinações entre cada um destes parâmetros. A Tabela 2 a seguir, mostra a quantidade total de exemplos gerados através da combinação destes parâmetros. As siglas utilizadas na Tabela 2 são dadas na Tabela 1.

Tabela 2 – Parâmetros a serem variados.

Número de itens (N)	6, 12, 24
Número de períodos (T)	15, 30
Custo unitário de produção (c_{it})	F e V
Custo de preparação (S_{it})	CB e CA
Tempo de preparação	TB e TA
Capacidade	C_1, C_2
Número de exemplos (sementes)	10
Total de exemplos gerados	960

A seguir, as tabelas 3 e 4 mostram o *gap da solução* obtido pelas várias combinações de parâmetros. As linhas destas tabelas representam o tamanho dos exemplos e as colunas representam as várias combinações de parâmetros. Para representar cada combinação são utilizadas as siglas da Tabela 1 e, a representação é feita na seguinte ordem:

custo unitário de produção / custo de preparação / tempo de preparação / capacidade

Assim, as siglas F/CB/TB/ C_1 representam exemplos com: custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

Cabe observar que, para cada exemplo foi utilizado o mesmo limitante inferior para fazer a comparação entre as soluções obtidas pelo procedimento de factibilização e pelos os dois arranjos finais. Portanto, quanto menor for o *gap da solução* melhor será o desempenho do arranjo final pois, a solução factível obtida estará mais próxima da solução ótima.

Tem-se ainda nas tabelas 3 e 4, o tempo médio para cada exemplo, considerando as várias combinações de parâmetros (colunas) e os vários tamanhos (linhas). Como pode-se observar, o tempo médio para se resolver um exemplo é bastante baixo, por isso, neste trabalho, não será feita nenhuma análise do tempo computacional.

Tabela 3 – *Gap da solução* utilizando variações no tempo de preparação e na capacidade considerando custo unitário de produção fixo e custo de preparação baixo.

–	F/CB/TB/C ₁			F/CB/TB/C ₂			F/CB/TA/C ₁			F/CB/TA/C ₂			Tempo (s)*
	N x T	P*	A1*	A2*	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	
6 x 15	7,44	7,14	6,8	19,77	19,27	19,18	2,09	2,02	2,09	7,58	7,4	7,31	0,05
12 x 15	1,43	1,41	1,28	8,62	8,31	8,19	0,34	0,34	0,33	2,41	2,29	2,15	0,09
24 x 15	0,93	0,93	0,77	4,27	4,18	3,9	0,12	0,11	0,12	1,1	1,08	0,86	0,194
6 x 30	5,75	5,28	5,73	18,36	17,87	18,36	1,54	1,38	1,53	6,11	5,67	6,1	0,168
12 x 30	1,46	1,43	1,26	6,33	6,11	6,33	0,29	0,29	0,29	1,56	1,54	1,49	0,473
24 x 30	0,16	0,16	0,15	1,93	1,86	1,8	0,07	0,07	0,07	0,23	0,23	0,22	0,8
Tempo(s)	0,148			0,114			0,086			0,145			–

(*) P: *Gap da solução* obtida após os 4 passos iniciais da heurística de factibilização de Trigeiro (1989).

A1: *Gap da solução* obtida após a aplicação do arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989).

A2: *Gap da solução* obtida após a aplicação da nossa proposta de arranjo final.

Tempo (s): Tempo médio (em segundos) para resolver um exemplo.

Tabela 4 – *Gap da solução* utilizando variações no tempo de preparação e na capacidade considerando custo unitário de produção fixo e custo de preparação alto.

–	F/CA/TB/C ₁			F/CA/TB/C ₂			F/CA/TA/C ₁			F/CA/TA/C ₂			Tempo (s)
	N x T	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	
6 x 15	9,02	8,44	8,92	16,47	15,55	16,46	2,59	2,38	2,59	7,09	6,42	7,07	0,046
12 x 15	2,8	2,72	2,63	8,86	8,38	8,71	0,97	0,96	0,97	2,85	2,76	2,8	0,081
24 x 15	0,84	0,82	0,8	4,73	4,56	4,61	0,15	0,15	0,15	0,88	0,85	0,78	0,128
6 x 30	7,1	6,58	6,88	19,26	17,92	19,24	2,21	2,06	2,09	6,31	5,75	6,04	0,157
12 x 30	1,74	1,56	1,7	7,27	6,83	7,27	0,33	0,33	0,33	1,25	1,15	1,23	0,337
24 x 30	0,52	0,51	0,51	2,64	2,44	2,64	0,09	0,09	0,09	0,38	0,38	0,38	0,547
Tempo(s)	0,102			0,102			0,061			0,105			–

Observe que, nas tabelas 3 e 4 o custo unitário de produção foi considerado fixo. Posteriormente, serão dadas as tabelas 5 e 6 onde o custo unitário de produção será considerado variável. O Gráfico 1, a seguir, representa o *gap da solução* médio para cada combinação de parâmetros contida nas tabelas 3 e 4. O eixo y representa o *gap da solução* médio entre todos os tamanhos e o eixo x representa as combinações de parâmetros. Os intervalos utilizados para geração dos dados estão descritos na Tabela 1.

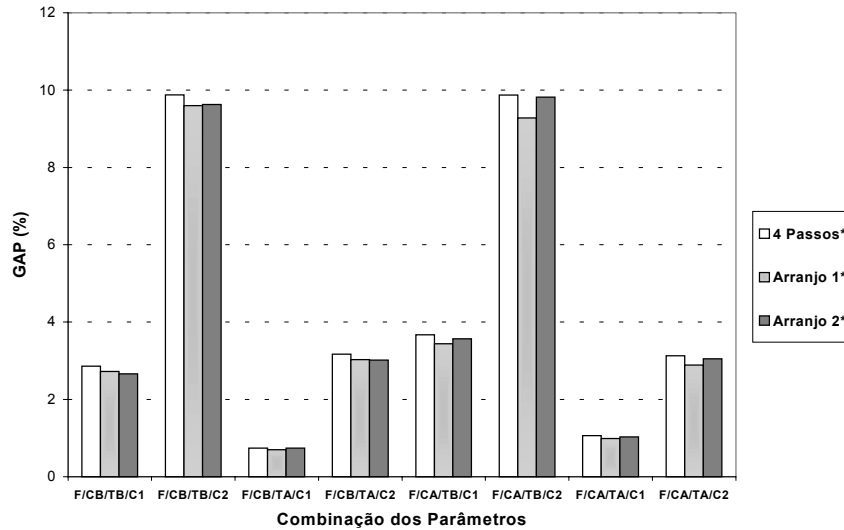


Gráfico 1 – *Gap da solução* médio entre todos os tamanhos para as possíveis combinações de parâmetros, considerando custos unitários de produção fixos em zero.

- (*) **4 Passos:** *Gap da solução* obtida após os 4 passos iniciais da heurística de factibilização.
- Arranjo 1:** *Gap da solução* obtida após o arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989);
- Arranjo 2:** *Gap da solução* obtida após a aplicação da nossa proposta de arranjo final;

A seguir, tem-se alguns gráficos (gráfico 2 a 4) que representam os dados das tabelas 3 e 4 de uma forma diferente da que foi representada no Gráfico 1. O eixo x representa o tamanho de cada problema. O eixo y representa o *gap da solução* médio entre os 10 exemplos gerados para o tamanho dado no eixo x e para a combinação de parâmetros que está sendo considerada.

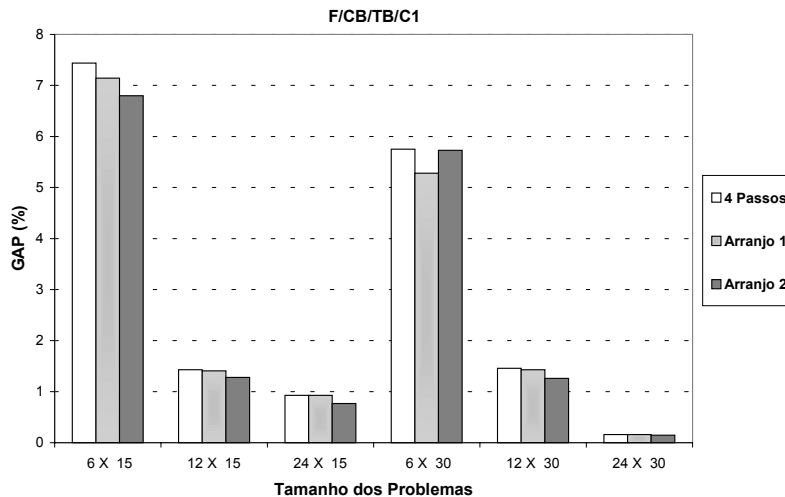


Gráfico 2 – *Gap da solução* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

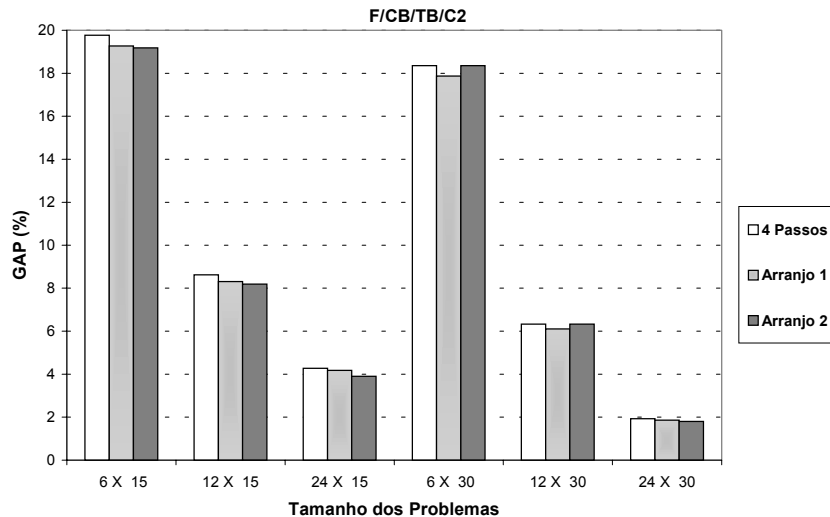


Gráfico 3 – *Gap da solução* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção fixo, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade normal.

Nos gráficos 2 e 3 é possível observar o que já havia sido antecipado com respeito ao tamanho dos problemas, ou seja, quanto maior a quantidade de itens e períodos, menor o *gap da solução*.

Pode-se verificar também que, em relação à comparação entre os dois arranjos finais, a nossa proposta (Arranjo 2) obtém melhores resultados quanto maior for o número de itens e, a proposta de Trigeiro *et al.* (1989) (Arranjo 1) obtém melhores resultados quanto maior o número de períodos. Além disso, observa-se que no Gráfico 2 onde a capacidade é folgada, o *gap da solução* é bem menor do que os do Gráfico 3 onde a capacidade é normal.

Quando são considerados altos tempos de preparação, o *gap da solução* é menor do que os obtidos pelos exemplos com tempo de preparação baixo (Tabela 3). Conseqüentemente, os dois arranjos finais não obtiveram melhorias significativas na solução encontrada pelos quatro passos iniciais da heurística de factibilização. Diante disso, optou-se por não demonstrar graficamente estes resultados.

Até este momento, os gráficos apresentados (gráfico 2 e 3) representaram os resultados contidos na Tabela 3. Os dados representados na Tabela 4 são bem semelhantes aos da Tabela 3, com exceção dos custos de preparação que são considerados altos. No entanto, a variação do custo de preparação entre alto e baixo provoca mudanças bastante sutis no *gap da solução*. Por este motivo, julgou-se desnecessária a apresentação de gráficos representando as combinações de parâmetros contidos na Tabela 4.

Até este ponto, foram considerados os dados contidos na tabelas 3 e 4, onde os custos unitários de produção foram considerados fixos. As tabelas 5 e 6, a seguir, contêm os resultados obtidos entre todas as possíveis combinações de parâmetros considerando custos unitários de produção variáveis no tempo.

Tabela 5 – *Gap da solução* utilizando variações no tempo de preparação e na capacidade considerando custo unitário de produção variável no tempo e custo de preparação baixo.

–	V/CB/TB/C ₁			V/CB/TB/C ₂			V/CB/TA/C ₁			V/CB/TA/C ₂			Tempo (s)
	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	
6 x 15	3,84	3,82	3,36	5,08	4,96	4,82	1,25	1,24	1,11	3,37	3,28	3,21	0,045
12 x 15	1,32	1,31	1,15	3,43	3,29	3,24	0,32	0,31	0,29	1	0,99	0,93	0,072
24 x 15	0,56	0,56	0,48	1,88	1,89	1,66	0,14	0,14	0,14	0,39	0,39	0,35	0,117
6 x 30	4,22	4,16	3,22	7,73	7,47	7,65	1,26	1,25	1	3,18	3,12	2,72	0,163
12 x 30	1,02	0,99	0,81	3,01	2,97	2,96	0,09	0,09	0,07	0,54	0,54	0,48	0,226
24 x 30	0,32	0,32	0,27	1,5	1,47	1,28	0,09	0,09	0,09	0,25	0,25	0,23	0,421
Tempo(s)	0,071			0,103			0,051			0,072			–

Tabela 6 – *Gap da solução* utilizando variações no tempo de preparação e na capacidade considerando custo unitário de produção variável no tempo e custo de preparação alto.

–	V/CA/TB/C ₁			V/CA/TB/C ₂			V/CA/TA/C ₁			V/CA/TA/C ₂			Tempo (s)
	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	P	A1	A2	
6 x 15	4,9	4,7	4,58	6,75	6,25	6,58	2,37	2,29	2	3,95	3,83	3,79	0,046
12 x 15	1,97	1,96	1,61	4,2	4,18	3,98	0,33	0,33	0,33	1,62	1,62	1,42	0,077
24 x 15	0,7	0,69	0,69	2,42	2,37	2,38	0,16	0,16	0,16	0,7	0,69	0,68	0,123
6 x 30	5,32	5,21	4,91	9,64	9,1	9,49	1,78	1,78	1,45	3,46	3,33	3,14	0,123
12 x 30	1,29	1,24	1,21	3,39	3,37	3,37	0,1	0,1	0,1	0,71	0,69	0,66	0,224
24 x 30	0,56	0,56	0,51	2,02	1,97	1,9	0,14	0,14	0,14	0,46	0,46	0,42	0,470
Tempo(s)	0,075			0,092			0,053			0,084			–

As tabelas 5 e 6 têm como finalidade principal mostrar o que já foi observado anteriormente neste trabalho, ou seja, o arranjo final proposto por Trigeiro *et al.* (1989) (Arranjo 1) tem um pior desempenho, em relação ao arranjo modificado (Arranjo 2), quando se considera custos unitários de produção variáveis no tempo. Este resultado pode ser observado comparando o Gráfico 5 com o Gráfico 1.

O Gráfico 5 representa os dados contidos nas tabelas 5 e 6. O eixo y representa o *gap da solução* médio entre todos os tamanhos e o eixo x representa as possíveis combinações de parâmetros. Os intervalos utilizados para geração dos dados estão descritos na Tabela 1.

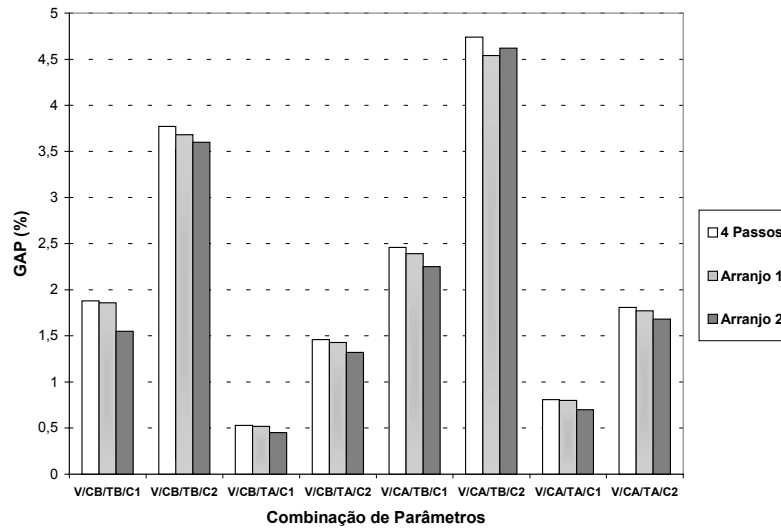


Gráfico 5 – *Gap da solução* médio entre todos os tamanhos para as possíveis combinações de parâmetros, considerando custos unitários de produção variáveis.

A seguir, apresentam-se dois gráficos que representam duas combinações de parâmetros diferentes contidas na Tabela 5. Comparando o Gráfico 6 com o 2 é possível observar claramente um declínio no desempenho do arranjo de Trigeiro *et al.* (1989) quando os custos unitários de produção são considerados variáveis no tempo. Além disso, no Gráfico 7 tem-se que, para o conjunto de 10 exemplos com 24 itens e 15 períodos, em média, a solução encontrada pelo arranjo final de Trigeiro *et al.* (1989) foi pior que a solução factível encontrada pela heurística de factibilização. Os testes computacionais mostraram que este fato pode ocorrer com mais intensidade se o intervalo de variação do custo unitário de produção for maior.

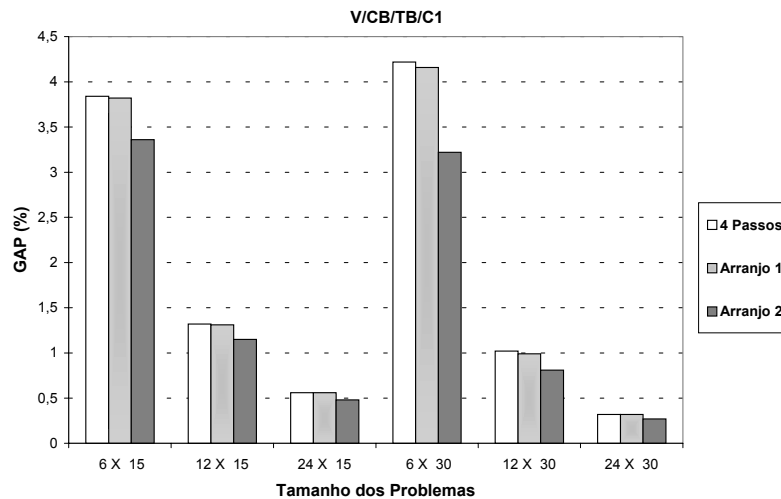


Gráfico 6 – *Gap da solução* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção variável, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade folgada.

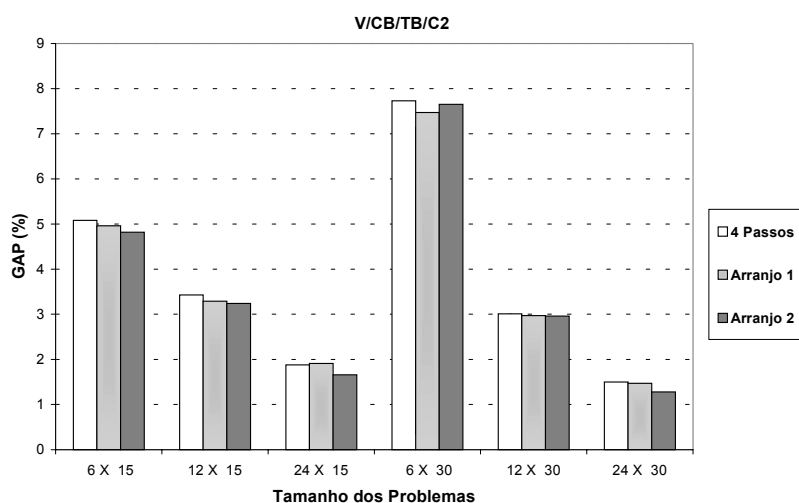


Gráfico 7 – *Gap da solução* médio para cada tamanho, considerando custo unitário de produção variável, custo de preparação baixo, tempo de preparação baixo e capacidade normal.

5. Conclusões

Neste trabalho foi revisado o método de Trigeiro *et al.* (1989), sendo que, esse método foi implementado considerando custos variáveis no tempo. Foi proposta uma mudança no procedimento de melhoria da solução factível (arranjo final), baseada nas condições de otimalidade do problema dadas por Geoffrion (1974).

Diante dos resultados apresentados na Seção 4, pode-se concluir que, dependendo da combinação de parâmetros, os desempenhos dos arranjos finais foram diferenciados, sendo que, para 56,3% dos exemplos o arranjo modificado obteve melhores resultados, contra 28,1% do arranjo original e, em 15,6% os dois arranjos finais obtiveram os mesmos resultados. Entretanto, em geral as melhorias obtidas pelos dois arranjos finais foram muito pequenas em termos percentuais. É bastante provável que este fato tenha ocorrido devido a uma grande eficiência da processo de factibilização desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989), e não devido a uma ineficiência dos arranjos finais. Cabe observar que, os exemplos utilizados neste artigo foram rodados também no pacote Cplex 4.0, com a intenção de obter o valor ótimo das soluções para possíveis comparações. O pacote Cplex 4.0 contém rotinas para resolução de problemas com variáveis inteiras e contínuas utilizando o método *Branch & Bound*. No entanto, o Cplex (com os parâmetros *defaults*) não conseguiu obter a solução ótima para nenhum dos exemplos e, o valor das soluções factíveis obtidas foram, em geral, piores do que os valores das soluções determinadas heurísticamente.

Agradecimentos

Os autores agradecem as contribuições feitas pelos árbitros anônimos da revista Pesquisa Operacional, que muito melhoraram esta versão e o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências Bibliográficas

- (1) Anthony, R.N. (1965). *Planning and Control Systems: A Framework for Analysis*. Harvard University Press, Cambridge, Mass, *apud* em Hox & Candea (1984).
- (2) Araujo, S.A. (1999). *Estudos de Problemas de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP/SC).
- (3) Bahl, H.C.; Ritzman, L.P. & Gupta, J.N.D. (1987). Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review. *Operational Research Society of America*, **35**(3), 329-345.
- (4) Berreta, R.E. (1997). *Heurísticas para Otimização do Planejamento da Produção em Sistemas MRP*. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- (5) Billington, P.J.; McClain, J.O. & Thomas, L.J. (1983). Mathematical Programming Approaches to Capacity MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction. *Management Science*, **29**(10), 1126-1141.
- (6) Billington, P.J.; Blackburn, J.D.; Maes, J.; Millen, R.A. & Van Wassenhove, L. (1994). Multi-Item Lotsizing in Capacitated Multi-stage Serial Systems. *IIE Transactions*, **26**(2), 12-18.
- (7) Bitran, G.R. & Yanasse, H.H. (1982). Computational Complexity of the Lot Size Problem. *Management Science*, **28**(10), 1174-1186.
- (8) Camerini, P.M.; Fratta, L. & Maffioli, F. (1975). On Improving Relaxation Methods by Modified Gradient Techniques. *Mathematical Programming Study*, **3**, 26-34.
- (9) Dantzig, G.B. & Wolfe, P. (1960). Decomposition Principle for Linear Programs. *Operational Research*, **8**(1), 101-110.
- (10) Diaby, M.; Bahl H.; Karwan, M.H. & Ziont, S. (1992). Capacitated Lot-Sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation. *EJOR*, **59**, 444-458.
- (11) Dzielinski, B.P. & Gomory, R.E. (1965). Optimal Programming of Lot Sizes, Inventories, and Labor Allocations. *Management Science*, **11**(9), 874-890.
- (12) Drexl, A. & Kimms, A. (1997). Lot Sizing and Scheduling – Survey and extentions. *European Journal of Operational Research*, **99**, 221-235.
- (13) Florian M.; Lenstra J.K. & Rinnoy Kan, A.H.G. (1980). Deterministic Production Planning Algorithms and Complexity. *Management Science*, **26**(7), 669-679.
- (14) Geoffrion, A.M. (1974). Lagrangean Relaxation for Integer Programming. *Mathematical Programming Study*, **2**, 82-114.
- (15) Held, M.; Wolfe, P. & Crowder, H. (1974). Validation of Subgradient Optimization. *Mathematical Programming*, **6**, 62-68.
- (16) Hox, A.C. & Candea, D. (1984). *Production and Inventory Management*. Prentice-Hall, Inc.
- (17) Kuik, R.; Salomon, M. & Van Wassenhove, L.N. (1994). Batching Decisions: Structure and Models. *European Journal of Operational Research*, **75**, 243-263.

- (18) Maes, J. & Van Wassenhove, L.N. (1991). *Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics for Serial Systems*. International Journal of Production Research, **29**(6), 1235-1249.
- (19) Maes, J.; McClain, J.O. & Van Wassenhove, L.N. (1991). *Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP Based Heuristic*. European Journal of Operational Research, **53**, 131-148.
- (20) Tempelmeier, H. & Derstroff, M. (1996). A Lagrangean-Based Heuristic for Dynamic Multilevel Multiitem Constrained Lotsizing with Setup Time. *Management Science*, **42**(5), 738-757.
- (21) Thomas, L.J. & McClain, J.O. (1993). *An Overview of Production Planning*. Handbooks in Operational Research and Management Science, editora Elsevier.
- (22) Trigeiro, W.W.; Thomas, L.J. & McClain, J.O. (1989). Capacitated Lot Sizing With Setup Times. *Management Science*, **35**(3), 353-366.
- (23) Toledo, F.M.B. (1998). *Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas*. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- (24) Wagner, H.M. & Whitin, T.M. (1958). Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. *Management Science*. **5**(1), 89-96.