

GRÁFICOS ADAPTATIVOS DE CONTROLE POR ATRIBUTOS E SEU PROJETO NA PRÁTICA

Eugenio Kahn Epprecht *

Departamento de Engenharia Industrial
Pontifícia Univ. Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
eke@ind.puc-rio.br

Antonio Fernando Branco Costa

Departamento de Produção
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Guaratinguetá – SP

Flávia Cesar Teixeira Mendes

Departamento de Engenharia Industrial
Pontifícia Univ. Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

* *Corresponding author*/autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 06/2004; aceito em 02/2005 após 1 revisão
Received June 2004; accepted February 2005 after one revision

Resumo

Os gráficos de controle de processo com parâmetros variáveis, ou gráficos *adaptativos*, permitem intensificar ou relaxar o controle do processo de acordo com a informação da amostra mais recente. Sua vantagem é uma maior rapidez na detecção de causas especiais que tiram o processo de sua situação de controle. Este artigo apresenta um modelo geral para gráficos de c , np , u e p com um, dois ou todos os parâmetros de projeto (tamanho de amostra, intervalo de tempo entre amostras e largura dos limites de controle) variáveis, que proporciona ganhos de eficiência substanciais. É proposto um procedimento para escolha dos valores para os parâmetros dos gráficos na prática, apoiado em um programa em *Excel* (disponível a pedido) que permite selecionar, de forma rápida e simples, dentre valores práticos, aqueles que otimizam a eficiência do gráfico de controle na detecção de alterações do processo.

Palavras-chave: gráficos de controle com parâmetros variáveis; atributos; controle estatístico de processo.

Abstract

Process control charts with variable parameters, also known as adaptive charts, allow one to intensify or to relax the control of the process according to the information about the process obtained from the most recent sample. In this paper, we study an adaptive scheme for the c , np , u , and p charts that allows one to vary one, two, or all design parameters (sample size, sampling interval and control limit width). The adaptive scheme increases significantly the speed with which the control chart detects process disturbances. We propose, in addition, a simple and fast procedure using an *Excel* spreadsheet for selection of the best values for the design parameters, from a set of practicable values.

Keywords: variable parameter control charts; attributes; statistical process control.

1. Introdução

As propriedades dos gráficos de controle com parâmetros variáveis têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores (ver Tagaras, 1998; e, em português, Costa, 1998a). Tais gráficos são chamados de *gráficos de parâmetros variáveis* (e, também, de *gráficos adaptativos*) pois um ou mais parâmetros de projeto (tamanho de amostra, intervalo de tempo entre amostras e largura dos limites de controle) variam entre dois ou mais valores, de acordo com as informações que se tem do processo. Sem aumentar o volume de inspeção, ou mesmo a frequência de alarmes falsos, os gráficos adaptativos são ágeis na detecção de causas especiais que aumentam, de forma moderada, a incidência de não-conformidades ou de unidades não conformes. O ganho marginal de desempenho ao variar cada parâmetro de projeto do gráfico de controle entre mais de dois valores é desprezível em relação a quando eles assumem apenas dois valores (ver Reynolds *et al.*, 1988; Reynolds, 1989, 1995; Runger & Pignatiello, 1991; Prabhu *et al.*, 1994; Porteus & Angelus, 1997; e Zimmer *et al.*, 1998); conseqüentemente, os esquemas *duais* têm sido os mais usuais. Nos esquemas duais, além dos limites de controle (também chamados *limites de ação*), o gráfico contém limites de advertência, mais estreitos. O resultado da análise de cada amostra é um valor de uma estatística particular, escolhida em função da característica do processo que se deseja monitorar. Se o resultado da análise de uma amostra gerar suspeitas de que o processo está fora de controle (um valor amostral entre os limites de advertência e de ação — ver Figura 1), o monitoramento deve ser intensificado, esperando-se assim um tempo menor do que o usual para a retirada da próxima amostra, que pode ainda ter um tamanho maior do que o usual, e cujo valor também pode ser confrontado com limites de controle mais estreitos que o usual, portanto mais sensíveis a alterações do processo. Por outro lado, se não houver suspeitas de que o processo está fora de controle (um valor amostral abaixo do limite de advertência) o monitoramento deve ser relaxado, esperando-se assim um tempo maior do que o usual para a retirada da próxima amostra, que ainda pode ter um tamanho menor do que o usual, e também pode ter seu valor confrontado com limites de controle mais largos que o usual, portanto mais robustos contra alarmes falsos. Assim, os períodos de monitoramento intenso serão compensados pelos períodos em que o monitoramento é realizado de forma branda, de tal sorte que a frequência média de alarmes falsos e o número médio de itens inspecionados por unidade de tempo permaneçam iguais aos de um gráfico de controle tradicional, ou seja, de parâmetros fixos (Fp). Os gráficos adaptativos são mais ágeis no diagnóstico de causas especiais que afetam o processo de forma moderada.

Os esquemas adaptativos foram inicialmente utilizados com os gráficos de controle por variáveis. Reynolds *et al.* (1988) estudaram o gráfico de \bar{X} com intervalo de tempo entre amostras variável (*VSI — Variable Sampling Interval*). O próximo parâmetro a ser considerado variável foi o tamanho de amostra: Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994) estudaram este esquema (*VSS — Variable Sample Size*). A direção natural de prosseguimento da pesquisa era fazer variáveis tanto o tamanho de amostra quanto o intervalo de tempo entre amostras (*VSSI — Variable Sample Size and Sampling Interval*), ou então fazer variáveis todos os parâmetros, incluindo o fator de abertura dos limites de controle (*Vp — Variable Parameters*). Prabhu *et al.* (1994) e Costa (1997, 1998a, 1999a) fornecem uma descrição detalhada destes gráficos de \bar{X} com todos os parâmetros adaptativos. A idéia de usar gráficos de parâmetros variáveis foi naturalmente estendida a outros esquemas estatísticos, tais como os gráficos de \bar{X} e R , gráficos CUSUM e EWMA (ver Reynolds *et al.*, 1990; Saccucci *et al.*, 1992; e Costa, 1998b, 1999b).

A proposta de uso de esquemas adaptativos para gráficos de controle de c , np , u e p é recente (ver Epprecht & Costa, 2001; e Epprecht *et al.*, 2003). Aqui, prefere-se o termo “gráficos adaptativos” (ou ainda “esquemas adaptativos”), a fim de distingui-los dos gráficos de p ou de u com parâmetros variáveis já existentes na literatura, nos quais o tamanho das amostras varia em função da disponibilidade de itens para inspeção (Montgomery (2001), p. 298-303 e 319-322; Costa *et al.* (2004), p. 215-217 e 225-226).

Rendtel (1990) estudou o gráfico CUSUM adaptativo por atributos, porém ele avaliou e comparou os esquemas VSS , VSI e $VSSI$ segundo critérios diferentes dos usuais, tornando impraticável a comparação entre seu trabalho e trabalhos afins. Vaughan (1993) e Porteus & Angelus (1997) propuseram esquemas bayesianos para controle por atributos; no entanto, os princípios, critérios e operação destes esquemas também são muito diferentes dos gráficos não-bayesianos para permitir qualquer comparação.

Este artigo apresenta o modelo de Epprecht *et al.* (2003) para gráficos de Shewhart adaptativos para atributos (gráficos de c , np , p e u) em que um, dois ou todos os parâmetros do gráfico variam entre dois valores. Além dos esquemas VSS , VSI e Vp , são considerados os esquemas VL (“*Variable Limits*”), em que só os limites de controle variam, e $VSIL$, em que variam o intervalo de tempo entre amostras e os limites de controle. (Vale notar que, no caso de gráficos de Shewhart para atributos, quando o tamanho de amostra varia não se consegue manter fixo o risco de alarme falso, de modo que não existe a distinção entre gráficos $VSSI$ e Vp). Para a determinação dos parâmetros destes gráficos, foi escrito um programa em Excel. Dentre valores práticos, o programa permite ao usuário selecionar, de forma rápida e simples, aqueles que maximizam a eficiência do gráfico de controle na detecção de alterações do processo.

A questão de escolha dos parâmetros (*projeto*) do gráfico adaptativo, fundamental para seu uso na prática, não é tratada na literatura (com raras exceções — ver, por exemplo, De Magalhães *et al.*, 2001, 2002; e De Magalhães & Moura Neto, 2004). Em geral, são fornecidas tabelas de projetos que apresentam bom desempenho (ou mesmo desempenho ótimo segundo algum critério), mas que, em função de restrições operacionais, podem não ser aplicáveis.

A Seção 2 descreve a operação do esquema adaptativo para o gráfico de c ; a Seção 3 apresenta as medidas de desempenho deste gráfico, que são usadas na Seção 4 para comparação de desempenho entre o esquema proposto e o gráfico de c de parâmetros fixos. A Seção 5 discute o problema do projeto do gráfico na prática, apresenta o procedimento para solução desse problema usando o programa em *Excel* desenvolvido pelos autores, e ilustra-o com um exemplo. A Seção 6 mostra como aplicar o esquema adaptativo aos gráficos de np , u e p , e a Seção 7 resume as conclusões do trabalho.

2. Gráfico Adaptativo de c

Considere um processo de produção, do qual deseja-se monitorar a frequência de não-conformidades. Seja x_k o número de não-conformidades da k -ésima amostra, composta de m unidades de inspeção. Assume-se que x_k siga uma distribuição de Poisson com média $c = mu$, onde u é o número médio de não-conformidades por unidade de inspeção, e que não exista correlação serial entre amostras. Considera-se que o processo inicie sua operação em controle com $u = u_0$ mas, que após a ocorrência de uma causa especial, ele mude para um estado fora de controle, que faça a frequência de não-conformidades u aumentar

imediatamente de u_0 para u_1 . O processo permanece fora de controle até que a causa especial seja detectada e subsequentemente eliminada, trazendo o processo de volta ao estado em controle. Suponha que um gráfico adaptativo de c seja definido através de dois conjuntos de parâmetros, $\Theta_1 = \{m_1, h_1, LSC_1, LSA_1\}$ e $\Theta_2 = \{m_2, h_2, LSC_2, LSA_2\}$, onde m_i é o tamanho de amostra, h_i é o intervalo de tempo entre amostras, LSC_i é o limite superior de controle e LSA_i é o limite de advertência ($i = 1, 2$). O gráfico é construído sem limite inferior de controle (LIC), pois o interesse é detectar apenas ocorrências de deteriorações no processo que venham aumentar o número esperado de não-conformidades durante a produção. Assume-se, por definição, que $0 < LSA_i < LSC_i$ ($i = 1, 2$), $m_1 \leq m_2$ e $h_1 \geq h_2$ (no esquema Vp , estas duas últimas desigualdades são estritas; a igualdade ocorre nos esquemas em que nem todos os parâmetros variam: VSS e VSI , por exemplo). A operação do gráfico adaptativo é simples e o esquema das amostragens obedece à seguinte regra: se $x_k < LSA_i$, para a $(k+1)$ ésima amostragem usa-se o conjunto de parâmetros Θ_1 ; se $LSA_i < x_k < LSC_i$, usa-se o conjunto Θ_2 ; se $x_k > LSC_i$ (alarme), inicia-se a investigação da causa especial. Para evitar gráficos com quatro limites (LSC_1, LSC_2, LSA_1 e LSA_2), são utilizadas duas escalas verticais: uma à direita e outra à esquerda do gráfico. As escalas são lineares por partes, de modo que os LSC 's coincidam em uma única linha e que o mesmo ocorra com os LSA 's (ver Figura 1). Quando está em uso o conjunto Θ_1 , considera-se a escala da esquerda; quando está em uso o conjunto Θ_2 , considera-se a escala da direita.

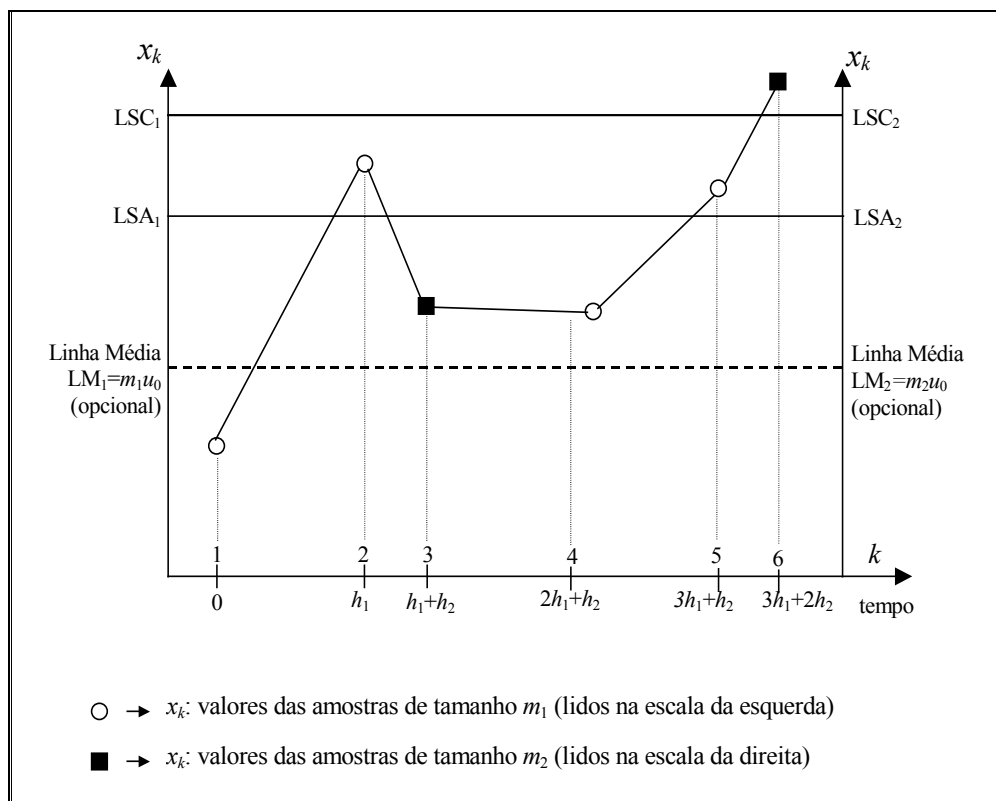


Figura 1 – Gráfico adaptativo (Vp) de c com duas escalas.

O princípio básico das regras de operação do gráfico totalmente adaptativo é simples: se x_k encontra-se abaixo do limite de advertência, o controle é relaxado porque espera-se um tempo maior do que o usual para retirada da $(k+1)$ ésima amostra, de tamanho menor que o usual. Além disso, o valor de x_{k+1} é registrado considerando a escala da esquerda, onde o limite superior de controle é maior que o usual. Por outro lado, se x_k encontra-se entre o limite superior de controle e o limite de advertência, o controle se torna mais severo porque espera-se um tempo menor do que o usual para retirada da $(k+1)$ ésima amostra, de tamanho maior que o usual, e o valor de x_{k+1} é registrado considerando a escala da direita, onde o limite superior de controle é mais estreito que o usual.

3. Medidas de Desempenho

O propósito do esquema adaptativo é acelerar a detecção, pelo gráfico, de incrementos no número médio de não-conformidades, sem precisar aumentar a quantidade de itens inspecionados e tampouco a taxa de alarmes falsos, que podem ser vistos como restrições preestabelecidas.

A velocidade de detecção pelo gráfico pode ser medida pelo tempo esperado entre a ocorrência de uma causa especial e sua sinalização (*TES*, “tempo esperado até o sinal” — ver Costa *et al.*, 2004). As restrições relativas à quantidade média de itens a inspecionar por unidade de tempo, bem como à taxa máxima de alarmes falsos que o usuário está disposto a aceitar, são expressas em termos do tamanho médio de amostra \bar{m} , do intervalo médio de tempo entre amostragens \bar{h} , e do tempo médio entre ocorrências de alarmes falsos (*TMAF*).

Através das propriedades das cadeias de Markov, tem sido possível obter medidas de desempenho dos gráficos adaptativos (ver, por exemplo, Prabhu *et al.*, 1994; e Costa, 1997, 1998a). Os estados da cadeia relacionam-se à posição da amostra x_k da maneira indicada na Tabela 1, onde o índice i em LSA_i e LSC_i refere-se ao conjunto de parâmetros usado para a k -ésima amostra.

Tabela 1 – Modelo de cadeia de Markov para o processo.

Estado da cadeia	Posição de x_k no gráfico	Conjunto de parâmetros para a retirada da $(k+1)$ ésima amostra
1	$x_k \leq LSA_i$	Θ_1
2	$LSA_i < x_k \leq LSC_i$	Θ_2
3	$x_k > LSC_i$	estado absorvente (processo interrompido)

A matriz de probabilidades de transição é $\mathbf{P}^{(f)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(f)} & p_{12}^{(f)} & p_{13}^{(f)} \\ p_{21}^{(f)} & p_{22}^{(f)} & p_{23}^{(f)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com

$$p_{i1}^{(f)} = \sum_{j=0}^{\text{int}(LSA_i)} e^{-m_i u_f} (m_i u_f)^j / j! \tag{1}$$

$$p_{i2}^{(f)} = \sum_{j=\text{int}(LSA_i)+1}^{\text{int}(LSC_i)} e^{-m_i u_f} (m_i u_f)^j / j! \quad (2)$$

$$p_{i3}^{(f)} = 1 - p_{i1}^{(f)} - p_{i2}^{(f)}$$

onde $i = 1, 2$, o índice $f = 0, 1$ especifica se o processo está em controle ($f=0$) ou fora de controle ($f=1$), $u_i > u_0$ e $\text{int}(Y)$ representa a parte inteira de Y .

As probabilidades de estado inicial para cada fase seguem modelos diferentes.

Na fase em controle, o estado inicial (em $k = 0$) corresponde ao conjunto de parâmetros (Θ_1 ou Θ_2) usado para a primeira amostra (quando o processo está sendo iniciado, ou reiniciado após um alarme falso). Epprecht & Costa (2001) demonstraram que existe um valor particular r_1 para a probabilidade de o estado inicial ser o estado 1, tal que r_1 é a frequência relativa esperada de visitas ao estado 1. A expressão para r_1 depende do esquema adaptativo considerado. Para o gráfico VSI “puro”, com limites constantes, r_1 é dado por

$$r_1 = p_{21}^{(0)} / (1 - p_{11}^{(0)} - p_{23}^{(0)} + p_{21}^{(0)});$$

para todos os demais esquemas (Vp , VSS , $VSIL$, VL), r_1 é dado por

$$r_1 = \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right) / (2a)$$

onde

$$a = p_{23}^{(0)} - p_{13}^{(0)} > 0, \quad b = p_{12}^{(0)} + p_{21}^{(0)} + p_{13}^{(0)} - p_{23}^{(0)}, \quad e \quad c = -p_{21}^{(0)}.$$

Para facilitar a modelagem, é conveniente assumir que o conjunto de parâmetros para a primeira amostra é escolhido aleatoriamente, Θ_1 com probabilidade r_1 e Θ_2 com probabilidade $r_2 = (1 - r_1)$.

Na prática, o usuário pode preferir adotar para a primeira amostra sempre o conjunto Θ_1 ou o conjunto Θ_2 em vez de sortear um deles. Se o processo permanecer tempo suficiente em controle, a escolha não-aleatória terá muito pouca influência nas propriedades do gráfico.

O conjunto de parâmetros para a primeira amostra após a ocorrência da causa especial (que, instantaneamente, aumenta u de u_0 para u_1) será Θ_1 se a causa especial ocorrer durante um intervalo de tempo entre amostras de duração h_1 , e será Θ_2 se ela ocorrer durante um intervalo de duração h_2 . Esse conjunto de parâmetros corresponde ao estado inicial na fase fora de controle. Como em Reynolds *et al.* (1988), considera-se que s_i , a probabilidade de uma causa especial ocorrer durante um intervalo de duração h_i , é proporcional ao produto $r_i h_i$, sendo r_i a frequência relativa esperada de intervalos de duração h_i até a ocorrência de uma causa especial.

$$s_i = r_i h_i / \mathbf{r}' \mathbf{h}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{r}' = [r_1 \quad r_2], \quad \mathbf{h}' = [h_1 \quad h_2].$$

A teoria das cadeias de Markov possibilita a obtenção das expressões das medidas de desempenho de interesse. Desta forma, $NMAF_{adapt} = \mathbf{r}' \mathbf{N}_0 \mathbf{1}$ é o número esperado de amostras até um alarme falso, e $NMA_{adapt} = \mathbf{s}' \mathbf{N}_1 \mathbf{1}$ é o número esperado de amostras até o sinal verdadeiro (na fase fora de controle), onde $\mathbf{s}' = [s_1 \quad s_2]$, $\mathbf{1}' = [1 \quad 1]$ e ambas as matrizes \mathbf{N}_f obedecem à fórmula geral

$$\mathbf{N}_f = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_f)^{-1} \quad (f = 0, 1)$$

onde $\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} p_{11}^{(f)} & p_{12}^{(f)} \\ p_{21}^{(f)} & p_{22}^{(f)} \end{bmatrix}$, o que resulta em

$$\mathbf{N}_f = \frac{1}{(1 - p_{11}^{(f)})(1 - p_{22}^{(f)}) - p_{12}^{(f)} p_{21}^{(f)}} \begin{bmatrix} (1 - p_{22}^{(f)}) & p_{12}^{(f)} \\ p_{21}^{(f)} & (1 - p_{11}^{(f)}) \end{bmatrix}.$$

Além disso, $TMAF_{adapt} = \mathbf{r}'\mathbf{N}_0\mathbf{h}$ fornece o tempo médio até um alarme falso e

$$TES_{adapt} = \mathbf{s}'\mathbf{N}_1\mathbf{h} - E(t) \quad (3)$$

é o tempo para o gráfico sinalizar com o processo fora de controle, sendo t o tempo entre a última amostra retirada durante o período em controle e o instante de ocorrência da causa especial. Como em Reynolds *et al.* (1988), supõe-se que, quando a causa especial ocorre dentro do intervalo de tempo entre duas amostras particulares quaisquer, o instante exato da ocorrência é uniformemente distribuído nesse intervalo. Conseqüentemente,

$$E(t) = \mathbf{s}'\mathbf{h}/2 \quad (4)$$

e, substituindo (4) em (3), $TES_{adapt} = \mathbf{s}'\mathbf{N}_1\mathbf{h} - \mathbf{s}'\mathbf{h}/2$.

O tamanho médio de amostra na fase em controle é $\bar{m} = (\mathbf{r}'\mathbf{N}_0\mathbf{m})/NMAF_{adapt}$, onde $\mathbf{m}' = [m_1 \ m_2]$, e o intervalo médio de tempo entre amostras na fase em controle é $\bar{h} = TMAF_{adapt}/NMAF_{adapt}$.

4. Comparação entre Gráficos Adaptativos e Gráficos de Parâmetros Fixos

Para comparar o desempenho dos diferentes esquemas adaptativos, os valores de TES de diversos projetos de gráficos de c adaptativos e convencionais (Fp) foram obtidos para processos com diferentes valores de u_0 e de u_1 . Os resultados estão na Tabela 3. Para os gráficos Fp , assume-se, sem perda de generalidade, $m=1$ e portanto $c_0=u_0$. A Tabela 2 apresenta os valores dos parâmetros desses gráficos. Note que esta tabela contém todos os tipos possíveis de esquemas adaptativos duais — i.e., em que um, dois ou todos os parâmetros do gráfico variam entre dois valores: Vp , com todos os parâmetros variáveis; VSS , com $h_1 = h_2$; $VSIL$, com $m_1 = m_2$; VL , com $h_1 = h_2$ e $m_1 = m_2$; e VSI , com $m_1 = m_2$ e $LSC_1 = LSC_2$. (Relembrando, no caso de gráficos de Shewhart para atributos, não existe um esquema $VSSI$ distinto do esquema Vp , pois nele não se consegue manter fixo o risco de alarme falso, já que a função distribuição de probabilidades acumulada das variáveis aleatórias discretas é descontínua). A importância de considerar os esquemas em que nem todos os parâmetros são variáveis vem do fato de que, em muitos contextos práticos, pode não ser possível trabalhar com tamanho de amostra variável, ou com intervalo de tempo entre amostras variável.

A comparação é feita em igualdade de condições: na fase em controle do processo, os gráficos adaptativos considerados possuem, em média, mesmo tamanho de amostra, mesmo intervalo de tempo entre amostras e taxa de alarmes falsos não maior que dos gráficos Fp de

referência. Formalmente, $\bar{h} = h$ e $\bar{m} = m$, onde h e m são, respectivamente, o intervalo de tempo entre amostras e o tamanho de amostra do gráfico Fp .

Para o gráfico com parâmetros fixos, o $TMAF$ e o TES são dados respectivamente por

$$TMAF_{Fp} = NMAF_{Fp} \times h = h/\alpha$$

$$TES_{Fp} = NMA_{Fp} \times h - h/2 = [1/(1-\beta) - 1/2]h$$

com $\alpha = 1 - \sum_{j=0}^{\text{int}(LSC)} e^{-mu_0} (mu_0)^j / j!$ e $\beta = \sum_{j=0}^{\text{int}(LSC)} e^{-mu_1} (mu_1)^j / j!$; $\text{int}(Y)$ representa a parte inteira de Y .

A função de distribuição do número de não-conformidades na amostra, sendo descontínua, não permite satisfazer simultaneamente as condições $m = \bar{m}$, $h = \bar{h}$ e $TMAF_{adapt} = TMAF_{Fp}$. Por isso, esta última restrição será substituída por $TMAF_{adapt} \geq TMAF_{Fp}$. Além disso, sem perda de generalidade, adotou-se para o gráfico de parâmetros fixos $h = 1$ e $m = 1$, e, para o gráfico adaptativo, $\bar{h} = 1$ e $\bar{m} = 1$; isso corresponde a empregar, como unidade de tempo, o intervalo de tempo entre amostras do gráfico Fp e, como unidade de inspeção, o tamanho de amostra do gráfico Fp .

Os projetos da Tabela 2 foram selecionados satisfazendo os seguintes critérios:

- No caso dos gráficos Fp , em que o projeto limita-se à escolha do LSC , foi adotado o menor valor de LSC que ainda satisfaz à condição $TMAF_{Fp} \geq 200$ — limite que nem sempre coincide com o tradicional limite “de três sigma”. Isso porque, com valores de $c_0 < 9$, como é o caso de interesse aqui, o limite “de três sigma” leva por vezes a valores de $TMAF$ inaceitavelmente baixos; torna-se portanto recomendável determinar o LSC em função da taxa de alarmes falsos tolerada. Por outro lado, se essa taxa fosse fixada no valor convencional $\alpha = 0,0027$ (que é a taxa “nominal” dos gráficos de Shewhart convencionais quando a estatística amostral plotada é normalmente distribuída), os valores de LSC resultantes seriam muito altos, enfraquecendo o poder do gráfico de detectar desvios no processo. O valor $TMAF_{Fp} \geq 200$ foi considerado uma boa solução de compromisso. Esse valor também é reportado por Bissel (1988) como um valor tradicional: “*For attribute and event situations, because of the reduced sensitivity of discrete variables to changes in the process, the Action lines have traditionally been set at the upper 0.5% (1 in 200) point of the approximate Binomial or Poisson distribution*”.
- No caso dos gráficos adaptativos: cada projeto é o que minimiza o TES quando u dobra (i.e., para $u_1 = 2u_0$), com as restrições já mencionadas $\bar{h} = h$, $\bar{m} = m$ e $TMAF_{adapt} \geq TMAF_{Fp}$ (em relação ao gráfico Fp para o mesmo valor de $u_0 = c_0$). Estes projetos são os fornecidos por Epprecht *et al.* (2003), que os obtiveram por busca exaustiva no espaço dos parâmetros Θ_1 e Θ_2 (acrescentando as restrições $0,2 < m_1 < 0,8$ e $m_2 < 5,0$ por considerações de ordem prática). No caso dos esquemas Vp , $VSIL$ e VSI , foram consideradas apenas duas opções para o menor intervalo de amostragem h_2 : 0,10 e 0,50. Isso devido ao fato de nem todo valor de h_2 ser factível na prática, e também para indicar a sensibilidade dos resultados em relação a h_2 ; o intervalo h_1 foi determinado univocamente pela restrição $\bar{h} = h$.

Tabela 2 – Parâmetros de projeto para o gráfico tradicional e para gráficos adaptativos de c .

$c_0=u_0$	Esquema	h_2	h_1	m_1	m_2	LSC_1	LSA_1	LSC_2	LSA_2
0,5	Fp	1	1	1	1	3,5	----	3,5	----
	Vp	0,1	1,180	0,256	4,615	3,5	0,5	6,5	2,5
	Vp	0,5	1,100	0,256	4,615	3,5	0,5	6,5	2,5
	VSS	1	1	0,256	4,615	3,5	0,5	6,5	2,5
	VSIL	0,1	1,192	1	1	5,5	1,5	2,5	0,5
	VSIL	0,5	1,133	1	1	5,5	1,5	2,5	0,5
	VL	1	1	1	1	4,5	1,5	2,5	1,5
	VSI	0,1	1,581	1	1	3,5	0,5	3,5	0,5
	VSI	0,5	1,323	1	1	3,5	0,5	3,5	0,5
1,0	Fp	1	1	1	1	4,5	----	4,5	----
	Vp	0,1	1,317	0,256	3,075	3,5	0,5	7,5	3,5
	Vp	0,5	1,176	0,256	3,075	3,5	0,5	7,5	3,5
	VSS	1	1	0,208	4,195	2,5	0,5	9,5	5,5
	VSIL	0,1	1,222	1	1	5,5	2,5	3,5	0,5
	VSIL	0,5	1,140	1	1	5,5	2,5	3,5	0,5
	VL	1	1	1	1	6,5	2,5	3,5	0,5
	VSI	0,1	2,538	1	1	4,5	0,5	4,5	0,5
	VSI	0,5	1,854	1	1	4,5	0,5	4,5	0,5
1,5	Fp	1	1	1	1	5,5	----	5,5	----
	Vp	0,1	1,258	0,528	2,620	5,5	1,5	8,5	4,5
	Vp	0,5	1,122	0,504	3,005	4,5	1,5	9,5	5,5
	VSS	1	1	0,216	2,970	5,5	0,5	9,5	5,5
	VSIL	0,1	1,250	1	1	7,5	3,5	4,5	0,5
	VSIL	0,5	1,210	1	1	6,5	3,5	4,5	0,5
	VL	1	1	1	1	7,5	3,5	4,5	0,5
	VSI	0,1	4,116	1	1	5,5	0,5	5,5	0,5
	VSI	0,5	2,731	1	1	5,5	0,5	5,5	0,5
2,0	Fp	1	1	1	1	6,5	----	6,5	----
	Vp	0,1	1,254	0,432	3,005	6,5	1,5	11,5	7,5
	Vp	0,5	1,141	0,432	3,005	6,5	1,5	11,5	7,5
	VSS	1	1	0,392	3,635	4,5	1,5	13,5	9,5
	VSIL	0,1	1,308	1	1	8,5	3,5	5,5	1,5
	VSIL	0,5	1,172	1	1	8,5	3,5	5,5	1,5
	VL	1	1	1	1	7,5	4,5	4,5	2,5
	VSI	0,1	2,307	1	1	6,5	1,5	6,5	1,5
	VSI	0,5	1,726	1	1	6,5	1,5	6,5	1,5
3,0	Fp	1	1	1	1	8,5	----	8,5	----
	Vp	0,1	1,174	0,467	3,717	6,5	2,5	18,5	14,5
	Vp	0,5	1,097	0,467	3,717	6,5	2,5	18,5	14,5
	VSS	1	1	0,467	3,717	6,5	2,5	18,5	14,5
	VSIL	0,1	1,385	1	1	10,5	4,5	7,5	2,5
	VSIL	0,5	1,215	1	1	10,5	4,5	7,5	2,5
	VL	1	1	1	1	9,5	6,5	6,5	2,5
	VSI	0,1	2,219	1	1	8,5	2,5	8,5	2,5
	VSI	0,5	1,677	1	1	8,5	2,5	8,5	2,5

4,0	Fp	1	1	1	1	10,5	----	10,5	----
	Vp	0,1	1,232	0,600	2,550	8,5	3,5	18,5	13,5
	Vp	0,5	1,152	0,440	2,783	7,5	2,5	19,5	14,5
	VSS	1	1	0,440	2,783	7,5	2,5	19,5	14,5
	VSIL	0,1	1,450	1	1	12,5	5,5	9,5	3,5
	VSIL	0,5	1,105	1	1	11,5	7,5	8,5	3,5
	VL	1	1	1	1	11,5	7,5	8,5	4,5
	VSI	0,1	2,170	1	1	10,5	3,5	10,5	3,5
	VSI	0,5	1,650	1	1	10,5	3,5	10,5	3,5

Para cada combinação de valores de $u_0 = c_0$ e de $\gamma = u_1/u_0$, o menor *TES* para os diferentes gráficos encontra-se destacado em negrito na Tabela 3. E, para as situações em que não seja viável na prática adotar h_2 igual a 1/10 do intervalo de tempo “unitário”, estão sublinhados os menores valores de *TES* dentre os dois gráficos que usam $h_2 = 0,50$ ou h fixo (para cada combinação de valores de $u_0 = c_0$ e de $\gamma = u_1/u_0$).

As seguintes observações podem ser tiradas da Tabela 3:

Para todos os valores de c_0 considerados, o esquema *Vp* fornece tempos médios de sinalização de aumentos da ordem de 50% a 200% em u (i.e., valores de *TES* para $1,5u_0 \leq u_1 \leq 3u_0$) que são duas a cinco vezes menores que os dos gráficos *Fp* correspondentes.

Para $0,5 \leq c_0 \leq 1,5$, o esquema *Vp* é o mais eficiente de todos para sinalizar aumentos de até 3 vezes em u ($\gamma \leq 3,0$; e inclusive para $\gamma \leq 4,0$ no caso de $c_0 = 0,5$). Para $2,0 \leq c_0 \leq 4,0$, o esquema *Vp* ainda é o mais eficiente de todos para sinalizar aumentos de até 2 vezes em u ($\gamma \leq 2,0$). Para aumentos maiores em u (quando o esquema *Vp* deixa de ser o mais eficiente), o esquema mais eficiente é o esquema *VSIL*, até o ponto em que o esquema *Fp* se torna o mais eficiente (o que ocorre a partir de $u_1 = 5u_0$, para $c_0 = 2,0$; e a partir de $u_1 = 4u_0$, para $c_0 \geq 3,0$).

O esquema *VSS* é o segundo melhor esquema para valores pequenos de c_0 e pequenos aumentos em u_0 (especificamente, para $c_0 = 0,5$ e $\gamma \leq 3,5$; para $1,0 \leq c_0 \leq 1,5$ e $\gamma \leq 2,0$; e para $2,0 \leq c_0 \leq 3,0$ e $\gamma = 1,5$); nos demais casos, em geral o segundo melhor esquema é o esquema *VSIL*.

Nos esquemas em que h é variável (*Vp*, *VSIL* e *VSI*), os melhores resultados foram obtidos com os menores valores de h_2 .

Assim, os resultados mencionados dos esquemas *Vp*, *VSIL* e *VSI* referem-se ao seu emprego com $h_2=0,10$ (um décimo do intervalo de tempo base, “unitário”, igual por hipótese ao intervalo de amostragem do gráfico *Fp* de referência para comparação). Pode ser feita uma análise semelhante, considerando apenas o uso de $h_2 = 0,50$ ou h fixo.

Em geral o esquema *VSIL* é superior ao esquema *VSI*. O esquema adaptativo com o mais fraco desempenho é o esquema *VL*, mas mesmo assim ele apresenta ganhos significativos em relação ao esquema *Fp* para casos com $\gamma \leq 3,0$.

Sintetizando as duas últimas observações, pode-se dizer que, como regra geral, da mesma maneira que ocorre com a aplicação de esquemas adaptativos a gráficos de controle por variáveis (ver por exemplo Costa, 1999a), esquemas adaptativos de maior ordem (com maior número de parâmetros variando entre dois valores) são mais sensíveis para a detecção de alterações pequenas a moderadas no nível de qualidade do processo; além disso, deve-se adotar o menor valor operacionalmente possível para h_2 .

Epprecht *et al.* (2003) calcularam também os desvios-padrão dos tempos até a sinalização, mostrando que seus valores são muito próximos aos valores de *TES*. Os valores não são aqui reproduzidos, por limitação de espaço; a conclusão importante de ordem prática é que a análise dos valores de *TES* é suficiente para comparação dos desempenhos dos esquemas.

Tabela 3 – Valores de *TES* para o gráfico tradicional e para gráficos adaptativos de *c*.

$c_0=u_0$	Esquema	h_2	TMAF	$\gamma=u_1/u_0$							
				1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0,5	Fp		570,9	136,6	52,16	25,63	14,73	9,42	6,50	4,75	3,63
	Vp	0,1	628,2	43,13	9,66	4,82	3,46	2,84	2,46	2,19	1,98
	Vp	0,5	628,2	<u>46,33</u>	<u>10,91</u>	<u>5,38</u>	<u>3,76</u>	<u>3,04</u>	<u>2,62</u>	<u>2,34</u>	<u>2,14</u>
	VSS		628,2	50,36	12,49	6,09	4,15	3,29	2,82	2,52	2,32
	VSIL	0,1	571,8	88,08	25,51	10,66	5,66	3,55	2,50	1,91	1,55
	VSIL	0,5	571,4	93,32	29,03	13,02	7,35	4,82	3,50	2,73	2,24
	VL		696,5	130,6	44,24	20,62	11,70	7,55	5,34	4,03	3,19
	VSI	0,1	570,9	110,3	34,63	14,36	7,22	4,21	2,76	2,01	1,58
	VSI	0,5	570,9	122,0	42,36	19,31	10,49	6,46	4,36	3,16	2,42
1,0	Fp		273,2	53,33	18,49	8,69	4,91	3,14	2,19	1,64	1,29
	Vp	0,1	273,7	18,19	4,55	2,56	1,95	1,66	1,47	1,33	1,23
	Vp	0,5	273,7	<u>20,13</u>	<u>5,26</u>	<u>2,86</u>	<u>2,12</u>	<u>1,78</u>	1,58	1,45	1,36
	VSS		312,2	24,58	6,12	3,29	2,45	2,08	1,88	1,74	1,64
	VSIL	0,1	273,5	26,74	6,99	3,20	1,97	1,43	1,14	0,97	0,86
	VSIL	0,5	273,7	30,21	8,90	4,33	2,71	1,94	<u>1,51</u>	<u>1,24</u>	<u>1,06</u>
	VL		298,2	36,18	11,74	6,01	3,84	2,78	2,17	1,78	1,51
	VSI	0,1	273,2	35,75	9,26	3,85	2,29	1,72	1,48	1,36	1,30
	VSI	0,5	273,2	43,40	13,19	5,83	3,29	2,18	1,63	1,31	1,12
1,5	Fp		224,4	36,04	11,42	5,15	2,87	1,84	1,30	1,00	0,82
	Vp	0,1	225,1	11,62	2,99	1,73	1,31	1,10	0,97	0,88	0,82
	Vp	0,5	234,0	<u>13,57</u>	<u>3,54</u>	<u>2,03</u>	<u>1,53</u>	<u>1,28</u>	1,13	1,02	0,94
	VSS		224,5	15,00	4,15	2,38	1,84	1,62	1,51	1,44	1,40
	VSIL	0,1	241,5	15,67	4,29	2,21	1,47	1,12	0,93	0,82	0,75
	VSIL	0,5	224,5	18,73	5,75	2,98	1,93	1,42	<u>1,12</u>	<u>0,94</u>	<u>0,82</u>
	VL		241,2	23,02	7,68	4,06	2,63	1,92	1,49	1,22	1,03
	VSI	0,1	224,42	20,92	5,38	2,90	2,29	2,08	2,00	1,96	1,94
	VSI	0,5	224,42	27,30	7,71	3,55	2,20	1,63	1,34	1,19	1,09
2,0	Fp		220,6	29,34	8,54	3,70	2,04	1,32	0,96	<u>0,76</u>	0,65
	Vp	0,1	222,1	8,65	2,35	1,48	1,17	1,01	0,91	0,84	0,79
	Vp	0,5	222,1	<u>9,68</u>	<u>2,72</u>	<u>1,71</u>	<u>1,38</u>	1,21	1,12	1,04	0,99
	VSS		237,7	11,31	3,17	2,00	1,62	1,42	1,29	1,18	1,08
	VSIL	0,1	228,0	12,61	2,99	1,50	1,05	0,86	0,77	0,72	0,69
	VSIL	0,5	228,0	15,73	4,32	2,19	1,45	<u>1,11</u>	<u>0,92</u>	0,79	0,71
	VL		221,2	19,14	5,56	2,78	1,79	1,30	1,02	0,84	0,72
	VSI	0,1	220,6	17,09	3,72	1,78	1,34	1,20	1,14	1,12	1,10
	VSI	0,5	220,6	22,39	5,71	2,49	1,51	1,11	0,92	0,81	0,76

3,0	Fp		263,0	24,34	6,05	2,46	1,34	0,89	0,68	0,59	0,54
	Vp	0,1	265,8	6,08	1,83	1,22	0,97	0,83	0,74	0,69	0,66
	Vp	0,5	265,8	<u>6,73</u>	<u>2,09</u>	<u>1,43</u>	1,18	1,02	0,91	0,82	0,75
	VSS		265,8	7,54	2,39	1,69	1,42	1,25	1,11	0,99	0,89
	VSIL	0,1	265,2	8,99	2,00	1,11	0,86	0,76	0,72	0,70	0,69
	VSIL	0,5	265,4	12,20	3,10	1,59	<u>1,09</u>	<u>0,86</u>	0,73	0,65	0,61
	VL		306,4	14,87	4,15	2,09	1,33	0,96	0,75	0,63	0,57
	VSI	0,1	263,0	12,57	2,46	1,37	1,16	1,09	1,07	1,06	1,05
	VSI	0,5	263,0	17,66	3,92	1,72	1,10	0,87	0,76	0,71	0,69
4,0	Fp		352,1	22,96	4,93	1,90	1,03	<u>0,71</u>	0,58	0,53	0,51
	Vp	0,1	404,5	6,30	1,38	0,91	0,77	0,70	0,66	0,64	0,62
	Vp	0,5	356,7	<u>6,48</u>	<u>1,72</u>	<u>1,20</u>	<u>1,02</u>	0,91	0,82	0,75	0,70
	VSS		356,7	7,67	2,06	1,42	1,22	1,09	0,97	0,86	0,77
	VSIL	0,1	352,6	7,48	1,60	0,97	0,81	0,75	0,72	0,71	0,71
	VSIL	0,5	352,8	10,05	2,52	1,29	0,88	0,69	0,61	0,57	0,55
	VL		419,1	14,31	3,43	1,67	1,05	0,77	0,62	0,55	0,52
	VSI	0,1	352,1	10,62	1,95	1,22	1,09	1,05	1,04	1,03	1,03
	VSI	0,5	352,1	15,97	3,14	1,39	0,93	0,77	0,70	0,68	0,67

5. Projeto dos Gráficos de c com Parâmetros Variáveis

A análise precedente mostrou uma maior eficiência dos gráficos adaptativos de c em relação ao gráfico tradicional, de parâmetros fixos, para detectar aumentos em u de até cerca de quatro vezes o valor em controle, em processos com $c_0 \leq 4,0$. Um problema de ordem prática é a escolha do conjunto de valores para os parâmetros do gráfico adaptativo.

Em tese, os projetos constantes da Tabela 2 forneceriam a resposta a este problema. Na prática, porém, o problema permanece, pois:

- A escolha dos valores para os parâmetros do gráfico depende dos valores de u_0 (frequência de não-conformidades em controle do processo) e u_1 (valor da frequência de não-conformidades contra o qual se deseja maior proteção). O valor de u_0 do processo em questão pode não ser nenhum dos valores contemplados na Tabela 2. Além disso, os projetos da Tabela 2 são os que minimizam o TES para $\gamma = 2,0$ (i.e., para u_1 igual ao dobro de u_0); no entanto o usuário pode estar interessado em minimizar o TES para valores de γ diferentes deste. Epprecht *et al.* (2003) obtiveram projetos ótimos para $\gamma = 1,5; 3,0$. (Já a escolha do “melhor” projeto para uma faixa de valores de γ seria um problema multicritério, encerrando um razoável grau de subjetividade).
- E, mesmo supondo que o usuário esteja interessado no melhor projeto para um par de valores de u_0 e γ contemplados na Tabela 2, essa tabela fornece valores para h_1 , m_1 e m_2 que podem não ser praticáveis em muitas situações. Pode-se imaginar que os valores “operacionalizáveis” para o intervalo amostral pertençam a um domínio discreto, como por exemplo $\{30 \text{ min}, 1\text{h}, 2\text{h}, 3\text{h}, \dots\}$, e que, da mesma forma, só haja um conjunto limitado de tamanhos de amostra admissíveis, múltiplos de alguma unidade básica, como por exemplo “1 rolo” (prossequindo com este exemplo, se $m=1$ corresponder a 5 rolos, os valores admissíveis para m serão 0,2; 0,4; 0,6; ...).

O propósito primordial da Tabela 2 não foi fornecer parâmetros para implementação do esquema em cada situação prática, mas sim comparar os desempenhos dos esquemas para mostrar a superioridade do esquema adaptativo. De acordo com esse propósito, os valores pouco práticos para h_1 , m_1 e m_2 nos projetos da Tabela 2 foram necessários para atender às restrições $TMAF_{adapt} \geq TMAF_{Fp}$, $\bar{h} \geq h = 1$ e $\bar{m} \leq m = 1$ com a menor folga possível, com a finalidade de reduzir a comparação de eficiência entre esquemas a uma simples comparação de seus TES 's. Se houvesse folga nas restrições, as diferenças entre os TES 's diminuiriam e os ganhos em eficiência proporcionados pelos esquemas adaptativos ficariam diluídos entre um menor valor de TES , um menor tamanho médio de amostra, uma menor frequência média de amostragem, e/ou uma maior proteção contra alarmes falsos. A visualização do ganho tornar-se-ia menos imediata, dificultando a comparação entre esquemas.

Ora, em geral, com h_1 , m_1 e m_2 limitados a um pequeno conjunto de valores práticos, não seria possível atender às restrições sem folgas, uma vez que os parâmetros de projeto restantes (limites de controle e de advertência) não se prestam a um “ajuste fino” de \bar{h} , \bar{m} e $TMAF$, devido à natureza discreta das estatísticas de contagem.

Porém, na prática, as condições para escolha dos parâmetros do gráfico são outras. Se o usuário não estiver satisfeito com a eficiência dos gráficos de c com parâmetros fixos para sinalizar um determinado aumento na frequência média de não-conformidades do seu processo, o esquema adaptativo é uma alternativa mais eficiente. O problema do usuário não é demonstrar isso, mas escolher o “melhor” projeto adaptativo, segundo critérios de eficiência e operacionalidade. Nesse contexto, é mais importante usar valores operacionalmente convenientes para h_1 , h_2 , m_1 e m_2 do que satisfazer a $\bar{h} = h$ e $\bar{m} = m$. As condições a serem satisfeitas por \bar{h} e \bar{m} podem ser expressas por uma única restrição:

$$\bar{m}/\bar{h} \leq m/h, \quad (5)$$

ou seja, de que o custo de amostragem (supondo-o proporcional ao número médio de unidades inspecionadas por unidade de tempo) do gráfico adaptativo não seja superior ao do gráfico Fp de referência. Isso fornece uma maior flexibilidade, ampliando o conjunto de soluções factíveis. Além disso, uma pequena violação da restrição (5) pode ser tolerável, se ela resultar em uma grande melhora no TES . Para comparar diferentes projetos de gráficos levando em conta esse “tradeoff”, pode-se usar a forma genérica da função g recomendada por Epprecht & Santos (1998):

$$g = TES \times (\bar{m}/\bar{h}). \quad (6)$$

onde, no caso de projetos Fp , evidentemente, $\bar{m} = m$ e $\bar{h} = h$. Quando diferentes projetos para o gráfico possuírem o mesmo valor de \bar{m}/\bar{h} , o de menor g terá o menor TES ; quando diferentes projetos possuírem o mesmo valor de TES , o de menor g terá a menor razão \bar{m}/\bar{h} . No caso mais geral, entre dois projetos com valores de TES e de \bar{m}/\bar{h} diferentes, o projeto de menor g será o mais eficiente, pois possui a maior razão (quociente) entre rapidez média de detecção (medida por $1/TES$) e custo por unidade de tempo (medido por \bar{m}/\bar{h}).

Assim, pode-se quantificar a eficiência relativa de um esquema A em relação a um esquema B como g_B/g_A , razão que será maior do que a unidade quando o esquema A for mais eficiente que o esquema B.

Não é difícil escrever um programa para testar automaticamente todas as combinações admissíveis de valores para h_1 , h_2 , m_1 e m_2 ; experimentar (para cada uma delas) um conjunto de valores razoáveis para os limites de controle; calcular, para cada conjunto, as medidas de desempenho, pelas expressões fornecidas na Seção 3, descartando os projetos que não atendam a algumas restrições (por exemplo, em *TMAF*, ou em *TMAF* e em \bar{m}/\bar{h}); de modo a, finalmente: ou selecionar dentre os projetos não eliminados aquele que minimize alguma função-objetivo (como o *TES*, ou $g = TES \times (\bar{m}/\bar{h})$), dependendo das restrições consideradas; ou simplesmente, listar como saídas os projetos não eliminados, junto com suas medidas de desempenho, para escolha de um deles pelo usuário.

Contudo, se o número de valores admissíveis para h_1 , h_2 , m_1 e m_2 for pequeno (ainda mais considerando que nem todas as combinações desses valores são admissíveis, por exemplo grandes valores de m_1 e m_2 com pequenos valores de h_1 e h_2 , que teriam alto custo), o usuário pode utilizar o programa em *Excel* desenvolvido pelos autores (disponível, bastando contactar o primeiro autor) para avaliar os desempenhos proporcionados para o gráfico pelas diversas combinações admissíveis e escolher melhor delas. Veja a Figura 2, que ilustra a interface com o usuário (primeira planilha do programa). As células cujos valores são dados de entrada estão em cinza escuro. A planilha calcula e fornece \bar{h} , \bar{m} , \bar{m}/\bar{h} , *TMAF* e os perfis de *TES* em função de γ . A mera inspeção dos valores obtidos pode ser suficiente para a decisão. Como auxílio à decisão, são ainda fornecidos, sob as curvas de *TES*, para cada valor de γ : os fatores de redução no *TES* (razão TES_{adapt} / TES_{Fp}); a eficiência relativa, razão entre as funções g definidas em (6); e o ganho percentual de eficiência, calculado como $100 \times (\text{eficiência relativa} - 1)$; tudo isso em relação ao gráfico *Fp* de referência. O usuário deve introduzir os valores dos limites de controle e de advertência, para estabelecer os melhores valores por tentativa e erro: experimentando valores e observando os resultados fornecidos pela planilha. Para evitar dúvidas sobre a localização do número de não-conformidades de cada amostra nas regiões do gráfico, é recomendável utilizar sempre limites com valores não inteiros, como feito na Tabela 2. Sugere-se começar com os valores de LSC_1 e LSC_2 (a planilha fornece valores iniciais para a busca: um valor mínimo para LSC_1 e um valor máximo para LSC_2), e depois experimentar valores para LSA_1 e LSA_2 , observando o seu efeito nos valores de \bar{m}/\bar{h} , *TMAF* e perfis de *TES*. Essa busca não é muito longa, pois os resultados são muito sensíveis aos valores dos limites, de modo que não há muitas opções de valores alternativos a serem testados: o usuário logo perceberá quando alterações de um desses limites começam a produzir valores muito grandes de \bar{m}/\bar{h} ou *TMAF*, ou valores muito baixos de *TES*. Conseguem-se assim um bom projeto rapidamente. Como a planilha de interface só exibe um projeto de cada vez, e o usuário pode querer armazenar resultados de projetos intermediários satisfatórios nesse processo de busca do melhor projeto, a interface possui ainda dois botões no canto superior direito, “**Guardar resultado Adapt.**” e “**Guardar resultado Fp**”. Clicando o *mouse* nesses botões, os parâmetros e os resultados do projeto corrente são armazenados em duas outras planilhas da mesma pasta, para facilidade de comparação posterior (as Tabelas 4 e 6 a seguir foram produzidas dessa forma).

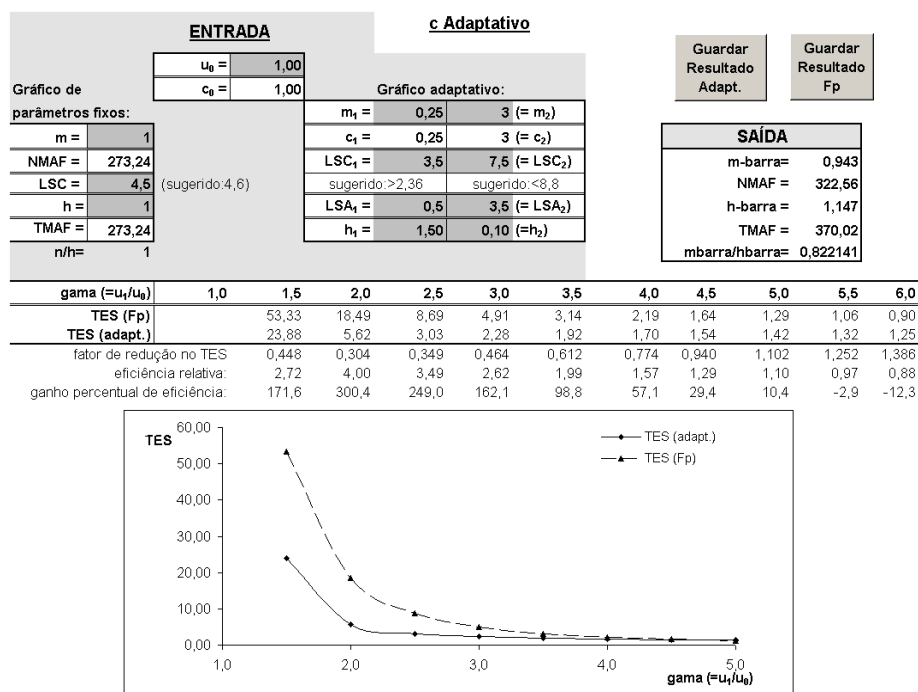


Figura 2 – Interface do programa de cálculo para obtenção dos projetos dos esquemas.

Para ilustrar o uso da planilha na obtenção de um bom projeto que satisfaça a um conjunto de restrições de ordem prática, veja-se o seguinte exemplo. Suponha um processo de pintura de carrocerias, em que o número médio de defeitos por carroceria (com o processo em controle) seja de 0,8 defeitos. Consideram-se os seguintes valores possíveis para o número de carrocerias em uma amostra: {1, 2, 4}, e os seguintes intervalos de tempo entre amostras: {2h, 4h, 8h}. Porém, nem todas as combinações desses valores são possíveis: há uma restrição de examinar apenas, em média, 1 carroceria a cada 2 horas; ou seja, m/h (e \bar{m}/\bar{h})=0,5.

Os gráficos de c de parâmetros fixos possíveis com esses valores de m e h estão na Tabela 4, que apresenta, além dos valores de m , h e LSC , o $TMAF$ e os valores de TES quando $1,5u_0 \leq u_1 \leq 4,0u_0$. Esses valores são fornecidos pela planilha. Para cada gráfico, o LSC escolhido foi o menor valor que satisfaz $TMAF \geq 200$. Cada projeto é identificado por uma letra, na primeira coluna, “Id.”, da Tabela 4.

Tabela 4 – Projetos Fp possíveis no exemplo.

Id.	m	h	LSC	m/h	TMAF	TES para γ igual a				
						1,5	2	2,5	3	4
x	1	2	4,5	0,500	1417,1	257,20	83,45	36,98	19,86	8,12
y	2	4	5,5	0,500	662,2	110,13	35,95	16,62	9,46	4,49
z	4	8	7,5	0,500	475,4	66,59	21,59	10,62	6,79	4,51

É imediato ver que o projeto z fornece TES 's muito inferiores aos demais — o que é razoável, dado que tem o menor $TMAF$ dos três. Como trata-se de um valor satisfatório ($TMAF > 200$), o projeto z é o preferível, dados seus menores TES 's. Suponha porém que o usuário considere estes TES 's ainda muito altos; nesse caso, os esquemas adaptativos surgem como uma alternativa. As combinações possíveis dos tamanhos de amostra e intervalos de amostragem admissíveis estão na Tabela 5. Note que, como $(m_1/h_1) < \bar{m}/\bar{h} < (m_2/h_2)$, não estão em consideração combinações em que $(m_1/h_1) \geq 0,5$ ou em que $(m_2/h_2) \leq 0,5$.

Tabela 5 – Combinações de tamanhos de amostra e intervalos de amostragem admissíveis na prática, no exemplo.

<i>Id.</i>	m_1	m_2	h_1	h_2
<i>a</i>	1	2	8	2
<i>b</i>	1	2	4	2
<i>c</i>	1	4	8	4
<i>d</i>	1	4	8	2
<i>e</i>	1	4	4	2
<i>f</i>	2	4	8	4
<i>g</i>	2	4	8	2

As combinações possíveis com $m_1=m_2$ (esquemas $VSIL$ e VSI) e com $h_1=h_2$ (esquema VSS) não são incluídas aqui, porém foram testadas e mostraram desempenho muito inferior ao das combinações Vp da Tabela 5.

Introduzindo cada uma das combinações na planilha e, para cada uma delas, buscando por tentativa e erro os melhores valores para os limites de controle e de advertência, o usuário obteve os projetos na Tabela 6 (os melhores que ele obteve para cada combinação).

Tabela 6 – Projetos Vp obtidos pelo usuário no exemplo.

<i>Id.</i>	m_1	m_2	h_1	h_2	LSC_1	LA_1	LSC_2	LA_2	\bar{m}/\bar{h}	$TMAF$	TES para γ igual a				
											1,5	2	2,5	3	4
<i>a</i>	1	2	8	2	4,5	0,5	4,5	0,5	0,473	207,7	35,25	13,95	8,38	6,19	4,49
<i>b</i>	1	2	4	2	3,5	0,5	5,5	1,5	0,506	395,9	74,19	23,49	10,78	6,39	3,49
<i>c</i>	1	4	8	4	5,5	0,5	7,5	2,5	0,489	567,3	53,02	16,89	9,69	7,29	5,69
<i>d</i>	1	4	8	2	3,5	0,5	7,5	2,5	0,615	329,4	34,37	11,39	7,02	5,53	4,42
<i>e</i>	1	4	4	2	5,5	1,5	7,5	3,5	0,485	854,2	56,09	14,87	8,03	5,82	4,21
<i>f</i>	2	4	8	4	5,5	0,5	7,5	3,5	0,546	472,2	53,62	16,14	8,50	6,01	4,31
<i>g</i>	2	4	8	2	5,5	0,5	7,5	3,5	0,680	379,0	39,03	11,45	6,40	4,90	3,92

Os projetos b , c e f são bastante inferiores aos demais (possuem TES 's maiores, de maneira geral) e podem ser descartados; dos restantes, com \bar{m}/\bar{h} aproximadamente igual a 0,5 há

apenas os projetos *a* e *e*, sendo o último ligeiramente melhor para $\gamma \geq 2,5$ e o primeiro, melhor para $\gamma \leq 2,0$ (em particular, muito melhor para $\gamma = 1,5$). A escolha entre eles dependerá da magnitude γ^* de perturbação do processo que se considera importante detectar com rapidez. Porém há ainda outra possibilidade: os projetos *d* e *g* possuem os menores *TES*'s de todos, com valores de \bar{m}/\bar{h} um pouco maiores. Examinando os *TES*'s dos diversos projetos para a perturbação γ^* , o usuário contraporá “rapidez” e custo (\bar{m}/\bar{h}), para decidir.

A interpretação dos resultados da Tabela 6 pode ainda ser beneficiada através da medida $g = TES \times (\bar{m}/\bar{h})$ proposta na seção 5 (equação (6)), que quantifica essa relação entre rapidez e custo. Veja a Tabela 7. O menor valor de *g* para cada valor de γ está realçado em negrito, indicando o projeto mais eficiente na detecção do aumento correspondente na frequência média de não-conformidades. Essa tabela mostra que os projetos *d* e *g*, a despeito de seus menores *TES*'s, são menos eficientes que os projetos *a* e *e*: o aumento que eles demandam no custo \bar{m}/\bar{h} (em relação aos projetos *a* e *e*) é proporcionalmente maior que a redução que eles propiciam nos *TES*'s. Outra maneira de ver isso é a seguinte: se no projeto *a* (ou no projeto *e*) o usuário pudesse reduzir h_1 e h_2 numa mesma proporção até o ponto em que o valor de \bar{m}/\bar{h} , aumentando, se igualasse ao valor de \bar{m}/\bar{h} do projeto *d* (ou do projeto *g*), ele conseguiria com isso *TES*'s menores que os do projeto *d* (ou do projeto *g*). Claro que, como não há essa flexibilidade nos valores de h_1 e h_2 , ele poderá ainda preferir um projeto menos eficiente, mas com menor *TES*, como *d* ou *g*. A decisão final permanece uma questão de preferência do usuário.

Tabela 7 – Eficiência dos projetos *Vp* obtidos pelo usuário no exemplo.

<i>Id.</i>	<i>função g para γ igual a</i>				
	1,5	2	2,5	3	4
<i>a</i>	16,67	6,60	3,96	2,93	2,12
<i>b</i>	37,54	11,89	5,45	3,23	1,77
<i>c</i>	25,93	8,26	4,74	3,56	2,78
<i>d</i>	21,14	7,00	4,32	3,40	2,72
<i>e</i>	27,20	7,21	3,89	2,82	2,04
<i>f</i>	29,28	8,81	4,64	3,28	2,35
<i>g</i>	26,54	7,79	4,35	3,33	2,67

De qualquer forma, com qualquer um desses quatro melhores projetos (*a*, *d*, *e* e *g*), a redução dos *TES*'s em relação ao melhor projeto convencional (gráfico de parâmetros fixos), que é o projeto *z* da Tabela 4, é bastante significativa.

Mesmo assim, o ganho de eficiência proporcionado pelos projetos adaptativos neste exemplo foi menor que os ganhos dos projetos indicados na Tabela 2 (e verificáveis na Tabela 3), na comparação de desempenho entre esquemas (os projetos da Tabela 2 proporcionavam *TES*'s duas a cinco vezes menores que os dos gráficos *Fp* de referência; os projetos adaptativos da Tabela 6 acima proporcionam reduções muito menos significativas). Uma das razões é o número limitado de alternativas para os parâmetros do gráfico, que leva naturalmente a

soluções sub-ótimas (ou, de outra maneira, trata-se de soluções ótimas num conjunto factível mais restrito).

Por outro lado, como $\bar{m} < m_2$ e $\bar{h} > h_2$, pode ser razoável admitir valores para m_2 maiores que o maior valor de m admissível para o gráfico Fp e, da mesma forma, valores para h_2 menores que o menor valor admissível para m , sem que isso implique necessariamente em valores de \bar{m}/\bar{h} maiores que os valores de m/h admissíveis para os gráficos Fp . Restringir os tamanhos de amostra e tempos entre amostras para os gráficos adaptativos ao mesmo conjunto de valores que para os gráficos Fp , como foi feito no exemplo, pode limitar demasiadamente as opções, eliminando boas alternativas, e colocando, assim, o esquema adaptativo em desvantagem na comparação.

Para buscar melhores projetos, então, poder-se-ia considerar, no caso do exemplo, $m_2 = 8$ e/ou $h_2 = 1$, o que fornece as combinações adicionais de m_1 , m_2 , h_1 e h_2 constantes da Tabela 8.

Tabela 8 – Combinações adicionais de tamanhos de amostra e intervalos de amostragem, no exemplo.

m_1	m_2	h_1	h_2
1	8	8	4
1	8	4	2
2	8	8	4
2	8	8	2
1	2	8	1
1	2	4	1
1	4	4	1
2	4	8	1

Com estas combinações adicionais, conseguem-se vários projetos melhores que os da Tabela 6. Para não alongar demasiadamente o exemplo, apenas o projeto mais eficiente de todos será descrito: veja a Tabela 9.

Tabela 9 – Projeto Vp mais eficiente obtido pelo usuário no exemplo.

Id.	m_1	m_2	h_1	h_2	LSC_1	LA_1	LSC_2	LA_2	\bar{m}/\bar{h}	$TMAF$	<i>TES para γ igual a</i>				
											1,5	2	2,5	3	4
h	1	4	4	1	3,5	1,5	6,5	3,5	0,503	195,2	26,21	9,50	5,81	4,39	3,17
função g :											13,18	4,78	2,92	2,21	1,59

Este projeto fornece TES 's sensivelmente menores que todos os projetos da Tabela 6, ao preço de um $TMAF$ menor (inclusive violando ligeiramente a restrição inicial $TMAF \geq 200$). Seu custo de amostragem médio, porém, é praticamente igual ao valor estabelecido pelo usuário ($\bar{m}/\bar{h} = 0,5$). Este é um exemplo da situação em que uma pequena violação de uma das restrições pode ser compensada por uma redução substancial no TES . Considerando

apenas a medida $g = TES \times (\bar{m}/\bar{h})$, este é o projeto mais eficiente que o usuário teria encontrado, para todos os valores de γ . A redução dos *TES*'s em relação ao melhor projeto *Fp* (projeto *z* da Tabela 4), vai de 20% (no caso de aumentos de 300% em u_0) até 60% (no caso de aumentos de 50% em u_0).

6. Gráficos Adaptativos de np , p e u

Considerando as mesmas suposições feitas no estudo das propriedades do gráfico de c , podem-se obter as seguintes expressões para as probabilidades de transição associadas ao gráfico adaptativo de np :

$$p_{i1}^{(f)} = \sum_{j=0}^{\text{int}(LSA_i)} \binom{n_i}{j} p_f^j (1-p_f)^{n_i-j} \quad i = 1, 2; f = 0, 1 \quad (7)$$

$$p_{i2}^{(f)} = \sum_{j=\text{int}(LSA_i)+1}^{\text{int}(LSC_i)} \binom{n_i}{j} p_f^j (1-p_f)^{n_i-j} \quad i = 1, 2; f = 0, 1 \quad (8)$$

onde p_f é a fração média de defeituosos produzida pelo processo, o índice f indicando o estado do processo. Assim, durante a fase em controle, $p_f = p_0$ e, durante a fase fora de controle, $p_f = p_1$ ($p_1 > p_0$). Além disso, n , n_1 e n_2 são, respectivamente, o tamanho fixo de amostra do gráfico de np e o menor e maior tamanhos de amostra do gráfico adaptativo de np .

Com exceção das expressões das probabilidades de transição, o modelo matemático para obtenção das medidas de desempenho, o projeto e a operação do gráfico adaptativo de np são idênticos aos do gráfico adaptativo de c . Além disso, devido à aproximação entre as distribuições binomial e de Poisson, para valores pequenos de p_0 , as probabilidades de transição em (7) e (8) tornam-se praticamente iguais aos valores fornecidos pelas expressões (1) e (2) com $u_f = n_i p_f / m_i$, $f=1, 2$. Conseqüentemente, os *TES*'s e os *TMAF*'s dos gráficos adaptativos e não-adaptativos de np são quase iguais aos *TES*'s e os *TMAF*'s dos gráficos de c correspondentes.

Portanto, para qualquer par de valores (n, p_0) tal que o produto np_0 coincida com algum dos valores de c_0 na Tabela 2, e desde que p_0 seja suficientemente pequeno ($p_0 \leq 0,0200$), podem-se obter projetos *Fp* e adaptativos de gráficos de np , correspondentes aos projetos de gráficos de c da Tabela 2, através das relações: $n_i = m_i u_0 / p_0 = m_i n$ para $i = 1, 2$. Como no gráfico de np os tamanhos de amostra devem ser inteiros, os n_i 's devem ser arredondados para o inteiro mais próximo, mas o efeito desse arredondamento no desempenho do gráfico será muito pequeno, dada a magnitude dos tamanhos de amostra envolvidos. Os demais parâmetros (h_i , LSC_i e LSA_i) permanecem os mesmos do gráfico adaptativo de c . Para o gráfico de controle np *Fp*, tem-se que $n = c_0 / p_0$, sendo seu limite superior de controle igual ao do gráfico c *Fp*.

As conclusões apresentadas na Seção 4, quando da comparação entre os esquemas de monitoramento para os gráficos de c , também são válidas para os gráficos de np , quando a fração defeituosa p_0 é pequena; os autores repetiram a comparação entre os esquemas para gráficos de np , para $p_0 = 0,0025$ e $p_0 = 0,0200$, e os resultados encontrados foram aproximadamente iguais aos resultados para os gráficos de c com $mu_0 = np_0$.

A obtenção de um projeto para o gráfico adaptativo de np na prática pode seguir o mesmo procedimento apresentado na Seção 5 para o projeto do gráfico de c . A mesma planilha pode ser utilizada, bastando substituir as expressões das probabilidades de transição p_{11} , p_{12} , p_{21} e p_{22} pelas expressões (26) e (27) acima. No caso do gráfico de np , o número de alternativas para os tamanhos de amostra é geralmente maior que no caso do gráfico de c , o que torna a busca mais longa; essa questão é administrável resolvendo o problema em etapas: primeiro admitindo apenas grandes variações no tamanho de amostra (por exemplo, de 100 em 100 unidades), depois experimentando variações menores em torno da primeira solução. Em compensação, esse maior número de alternativas pode levar a melhores soluções (com resultados mais próximos aos da solução ótima).

Os gráficos adaptativos de u e de p podem ser obtidos a partir dos gráficos adaptativos de c e de np , simplesmente dividindo x_i , LSC_i e LSA_i pelo tamanho de amostra m_i ou n_i . Cabe ao usuário decidir se considera esta complexidade adicional compensada pela vantagem de ter um único valor para a linha média, e estatísticas diretamente comparáveis independentemente do tamanho de amostra.

7. Conclusões

Os gráficos adaptativos por atributos são mais rápidos que os gráficos tradicionais de parâmetros fixos na detecção de deteriorações de diferentes magnitudes na qualidade do processo, sem requererem maior volume de inspeção ou oferecerem menor proteção contra alarmes falsos. Como consequência, para alcançar a mesma rapidez de detecção proporcionada pelos gráficos adaptativos, os gráficos de parâmetros fixos requerem maior volume de inspeção por unidade de tempo e/ou oferecem menos proteção contra alarmes falsos. Assim, fixando-se uma frequência de alarmes falsos, o ganho obtido com o esquema adaptativo pode ser explorado em duas direções: conseguir detecção mais rápida de descontroles sem aumentar o custo de amostragem, ou reduzir o custo de amostragem sem reduzir a rapidez de detecção de descontroles.

A magnitude desse ganho depende do projeto (conjunto de valores para os parâmetros) do gráfico adaptativo. O procedimento proposto na Seção 5 permite ao usuário obter o melhor projeto para um leque de valores operacionalmente viáveis do tamanho de amostra e do intervalo de amostragem. Esse procedimento se torna simples e rápido caso o usuário disponha de uma planilha em *Excel* que calcule e apresente as diversas medidas de desempenho para cada conjunto de valores dos parâmetros de projeto. Essa planilha está disponível, bastando contactar o primeiro autor.

Este artigo tratou do projeto dos gráficos adaptativos de c , de np , de u e de p , com um, dois ou todos os parâmetros variáveis. Isto contempla todos os gráficos usuais por atributos, e as situações práticas em que não seja possível variar algum (ou alguns) dos parâmetros.

As vantagens do esquema adaptativo se tornam tão mais relevantes quanto maior for o nível de exigência sobre o processo e quanto mais importante for, em decorrência, detectar alterações de menor magnitude no seu nível de qualidade. No caso de controle por atributos, essa relevância pode ser ainda maior que no caso de controle por variáveis, devido aos grandes tamanhos de amostra tipicamente requeridos.

Agradecimentos

Somos gratos a dois revisores anônimos cuja revisão cuidadosa levou à eliminação de várias imperfeições deste artigo. Esta pesquisa teve o apoio financeiro do CNPq e da CAPES.

Referências Bibliográficas

- (1) Bissel, A.F. (1988). Control chart limits for attributes and events. *Journal of Applied Statistics*, **15**(1), 97-105.
- (2) Costa, A.F.B. (1994). \bar{X} Charts with Variable Sample Size. *Journal of Quality Technology*, **26**, 155-163.
- (3) Costa, A.F.B. (1997). \bar{X} Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology*, **29**, 197-204.
- (4) Costa, A.F.B. (1998a). Gráficos de Controle \bar{X} para Processos Robustos. *Gestão&Produção*, **5**(3), 259-271.
- (5) Costa, A.F.B. (1998b). Joint \bar{X} and R Charts with Variable Parameters. *IIE Transactions*, **30**, 505-514.
- (6) Costa, A.F.B. (1999a). \bar{X} Charts with Variable Parameters. *Journal of Quality Technology*, **31**, 408-41.
- (7) Costa, A.F.B. (1999b). Joint \bar{X} and R Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology*, **31**, 387-397.
- (8) Costa, A.F.B.; Epprecht, E.K. & Carpinetti, L.C.R. (2004). *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, São Paulo, SP.
- (9) De Magalhães, M.S.; Costa, A.F.B. & Epprecht, E.K. (2002). Constrained Optimization Model for the Design of an Adaptive \bar{X} Chart. *International Journal of Production Research*, **40**(13), 3199-3218.
- (10) De Magalhães, M.S.; Epprecht, E.K. & Costa, A.F.B. (2001). Economic Design of a V_p \bar{X} Chart. *International Journal of Production Economics*, **74**, 191-200.
- (11) De Magalhães, M.S. & Moura Neto, F.D. (2004). Joint Economic Model for Totally Adaptive \bar{X} -bar and R charts (no prelo). *European Journal of Operational Research*.
- (12) Epprecht, E.K. & Costa, A.F.B. (2001). Adaptive Sample Size Control Charts for Attributes. *Quality Engineering*, **13**(3), 465-473.
- (13) Epprecht, E.K.; Costa, A.F.B. & Mendes, F.C.T. (2003). Adaptive Control Charts for Attributes. *IIE Transactions*, **35**(6), 567-582.
- (14) Epprecht, E.K. & Santos, A.B. (1998). Um Método Simples para o Projeto Ótimo de Gráficos de \bar{X} . *Gestão&Produção*, **5**(3), 206-220.
- (15) Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*. 4ª edição. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.

- (16) Porteus, E.L. & Angelus, A. (1997). Opportunities for Improved Statistical Process Control. *Management Science*, **43**, 1214-1228.
- (17) Prabhu, S.S.; Runger, G.C. & Keats, J.B. (1993). An Adaptive Sample Size \bar{X} Chart. *International Journal of Production Research*, **31**, 2895-2909.
- (18) Prabhu, S.S.; Montgomery, D.C. & Runger, G.C. (1994). A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{X} Control Scheme. *Journal of Quality Technology*, **26**, 164-176.
- (19) Rendtel, U. (1990). Variable Sampling Intervals and Sample Sizes. *Statistical Papers*, **31**, 103-118.
- (20) Reynolds, M.R., Jr. (1989). Optimal Variable Sampling Interval Control Charts. *Sequential Analysis*, **8**, 361-379.
- (21) Reynolds, M.R., Jr. (1995). Evaluating Properties of Variable Sampling Interval Control Charts. *Sequential Analysis*, **14**, 59-97.
- (22) Reynolds, M.R., Jr.; Amin, R.W.; Arnold, J.C. & Nachlas, J.A. (1988). \bar{X} Charts with Variable Sampling Intervals. *Technometrics*, **30**, 181-192.
- (23) Reynolds, M.R., Jr.; Amin, R.W. & Arnold, J.C. (1990). CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals. *Technometrics*, **32**, 371-384.
- (24) Runger, G.C. & Pignatiello, J.J., Jr. (1991). Adaptive Sampling for Process Control. *Journal of Quality Technology*, **23**, 135-155.
- (25) Saccucci, M.S.; Amin, R.W. & Lucas, J.M. (1992). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes with Variable Sampling Intervals. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **21**, 627-657.
- (26) Tagaras, G. (1998). A Survey of Recent Developments in the Design of Adaptive Control Charts. *Journal of Quality Technology*, **30**, 212-231.
- (27) Vaughan, T.S. (1993). Variable Sampling Interval np Process Control Chart. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **22**, 147-167.
- (28) Zimmer, L.S.; Montgomery, D.C. & Runger, G.C. (1998). Three-State Sample Size \bar{X} Chart. *International Journal of Production Research*, **36**, 733-743.