

ANÁLISE DA VARIAÇÃO DA PRODUTIVIDADE DOS SERVIÇOS DE ÁGUA PORTUGUESES ENTRE 1994 E 2001 USANDO A ABORDAGEM DE MALMQUIST

Rui Cunha Marques *

DECivil – IST – Universidade Técnica de Lisboa
Lisboa – Portugal
rcmar@civil.ist.utl.pt

Duarte Silva

Estradas de Portugal – E.P.E.
Paço de Arcos – Portugal
dnsilva@netcabo.pt

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 04/2005; aceito em 08/2005
Received April 2005; accepted August 2005

Resumo

A produtividade de uma organização pode ser definida como a relação entre os produtos (*outputs*) e os factores de produção consumidos (*inputs*). Este artigo discute e aplica uma técnica fronteira de natureza não paramétrica de cálculo da produtividade baseada no índice de produtividade de Malmquist (IPM). Pretende-se, através de um caso prático de aplicação ao sector da água em Portugal, evidenciar as potencialidades dos IPM, que assumem um relevo particular na regulação económica das indústrias de rede. O estudo da produtividade envolve 45 entidades gestoras, abrangendo cerca de 48 % da população portuguesa, e é efectuado para o período 1994-2001. Verifica-se que a evolução da produtividade foi negativa neste período, sobretudo devido à variação da tecnologia de produção e, em menor dimensão, à variação da eficiência de escala. Pelo contrário, a variação da eficiência técnica foi positiva e a variação da eficiência de sobreutilização apresentou um contributo insignificante.

Palavras-chave: produtividade; índice de produtividade de Malmquist; serviços de água.

Abstract

A decision-making unit productivity can be defined as the relationship between the products (outputs) and the production factors consumed (inputs). This article discusses and applies a non-parametric frontier technique to measure productivity based on the Malmquist productivity index (MPI). By means of a case-study applied to the water sector in Portugal, we intend to stress the MPI strengths which are particularly relevant to the economic regulation of the network industries. The productivity study consists of 45 water services comprising around 48 % of the Portuguese population and it covers the period 1994-2001. We noticed that the productivity change was negative during this period, particularly due to the production technology change and to the scale efficiency change to a less extent. Conversely, the technical efficiency change was positive and the congestion efficiency change presented an insignificant value.

Keywords: productivity; Malmquist productivity index; water services.

1. Introdução

Os conceitos de eficiência e de produtividade são muitas vezes empregues com o mesmo significado. É corrente usar-se a expressão “mais eficiente” ou “menos eficiente” com o mesmo atributo dos termos “mais produtivo” ou “menos produtivo”. Tal suposição pode, contudo, constituir um erro relevante. A variação da produtividade coincide com a variação da eficiência apenas em situações particulares, mormente, se a tecnologia de produção, a escala e o ambiente de operação forem idênticos. Este documento pretende determinar a produtividade através da técnica não paramétrica fronteira do índice de produtividade de Malmquist (IPM).

A formulação do IPM partiu da ideia inicial de Sten Malmquist, datada de 1952, de construir um índice de quantidade para análise de consumo, como razão de funções distância (Malmquist, 1953). Embora aquele índice tenha sido no início fomentado no contexto da teoria do consumo, é, em tudo, análogo ao índice de quantidade no estudo da produção, enunciado por Ronald Shephard, ainda nos anos 50 (Shephard, 1953 e 1970). Nos últimos anos, o IPM tem ganho destaque na teoria da produção com várias aplicações. Na análise da produtividade podem construir-se IPM, com orientação *input* (na vertente dos factores de produção) ou *output* (na óptica dos produtos), baseados na razão das funções distância de *inputs* e de *outputs*, respectivamente. As funções distância são representações de tecnologias com múltiplos *inputs* e *outputs* que podem apenas requerer dados sobre quantidades de *inputs* e de *outputs*.

As técnicas de cálculo da produtividade baseadas nos IPM integram-se, por norma, nos métodos fronteira não paramétricos, não requerendo, por isso, a especificação de uma forma funcional para a tecnologia de produção e permitindo a decomposição da produtividade (Lovell, 1993). Os IPM possuem várias características desejáveis, a saber:

- A ausência de definição do comportamento da função de produção, mormente, como mitigadora de custos ou maximizadora de lucros. Este apanágio traz vantagens, sobretudo quando os objectivos das unidades organizatórias (UO) são distintos ou desconhecidos;
- O cálculo do IPM pode ser baseado apenas nos elementos sobre quantidades. Este método não requer os valores dos *inputs* e dos *outputs* em unidades monetárias (preços) nem as suas ponderações, particularmente importantes onde as áreas em análise estão fora do mercado (*e. g.* prisões, tribunais e serviços locais de saúde) e em países ou sectores em desenvolvimento, onde a informação relativa a estes elementos é inexistente ou distorcida;
- A não assumpção das UO como eficientes possibilita a decomposição da origem da produtividade na variação da eficiência técnica (VET) e na variação da tecnologia de produção ou do progresso tecnológico (VTP). A primeira parcela pode, supletivamente, ser ainda decomposta na variação da eficiência de escala (VEE), da eficiência técnica pura (VETP) e da eficiência de sobreutilização (VES), enquanto que a segunda parcela pode também ser separada na magnitude da variação da tecnologia de produção (MVTP), na variação da tecnologia de produção enviesada de *inputs* (VTPEI) e na variação da tecnologia de produção enviesada de *outputs* (VTPEO);
- A aptidão do IPM poder relacionar-se com facilidade com outros índices.

Os IPM são ainda de cálculo relativamente expedito, tendo como base o inverso das medidas de eficiência técnica de Farrell, derivadas a partir de técnicas de programação linear. Como principal inconveniente, o IPM requer um conjunto significativo de UO (*panel data*).

Este artigo, baseado num trabalho recente (Marques, 2005), calcula a variação da produtividade dos serviços de água portugueses (SAAR) entre 1994 e 2001 através dos IPM. Depois desta introdução o conceito de função distância é explanado. De seguida, a obtenção do IPM é examinada tal como a sua decomposição é deduzida. Ainda no capítulo 3 as alternativas ao IPM e o método de cálculo dos IPM são analisados. No capítulo 4 efectua-se o caso de estudo, discutindo-se os resultados obtidos. Por fim, são expostas as principais conclusões.

2. Conceito de Função Distância

A definição dos IPM pode ser efectuada na vertente *input*, aqui adoptada, ou na vertente *output*. Para cada data $t = 1, \dots, T$, a tecnologia de produção S^t pode ser representada pela transformação do vector de *inputs* $x^t = (x^t_1, \dots, x^t_N) \in \mathbb{R}^N_+$ no vector de *outputs* $y^t = (y^t_1, \dots, y^t_M) \in \mathbb{R}^M_+$:

$$S^t = \{(x^t, y^t): x^t \text{ pode produzir } y^t\}, t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

A tecnologia de produção (S^t) engloba o conjunto das combinações de todos os vectores de *inputs/outputs* tecnicamente admissíveis. Outra forma de figuração da tecnologia consiste na sua correspondência em *inputs* e em *outputs*. Deste modo, e para a correspondência em *inputs*, o conjunto de possibilidades de produção (ou de produção admissível) de *inputs* inclui todos os vectores de *inputs* (x^t) capazes de produzir os vectores de *outputs* (y^t). Este conjunto, denominado de $L^t(y^t)$, pode ser representado da seguinte forma:

$$L^t(y^t) = \{x^t: (x^t, y^t) \in S^t\}, t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

Tanto S^t como L^t satisfazem certas propriedades, como o facto de serem limitados, fechados, convexos e de satisfazerem a condição de *strong disposability* de *inputs* (SDI) e de *outputs* (SDO), que são suficientes para caracterizar completamente a função distância de *inputs* [(Shephard, 1970) e (Färe *et al.*, 1985)]. A função distância de *inputs* em t é definida como:

$$D^t_i(y^t, x^t) = \sup \{\lambda: (x^t/\lambda, y^t) \in S^t\}, t = 1, 2, \dots, T \quad (3)$$

Esta função, que caracteriza completamente a tecnologia, é definida como a contracção máxima proporcional (radial) do vector de *inputs* x^t , dado o vector de *outputs* y^t , compatível com a tecnologia de produção S^t . Em particular, note-se que $D^t_i(y^t, x^t) \geq 1$, se e só se o par ordenado $(x^t, y^t) \in S^t$ (Färe & Primont, 1995). Para além disso, $D^t_i(y^t, x^t) = 1$, se e só se o par ordenado (x^t, y^t) está sob a fronteira da tecnologia de produção [pertence à isoquântica $L^t(y^t) = \{x^t: x^t \in L^t(y^t), \lambda < 1 \Rightarrow \lambda x^t \notin L^t(y^t)\}$], isto é, se o vector de *inputs* x^t é o mínimo requerido para a produção do vector de *outputs* y^t , ainda possível com a tecnologia de produção S^t . Na terminologia de Farrell diz-se que a produção, para este último caso, é tecnicamente eficiente (Farrell, 1957). A Figura 1, que apresenta um modelo de produção que utiliza um único *input* para produzir um único *output* e possui rendimentos constantes à escala (RCE), permite observar esta situação. Na Figura 1 o factor de produção (*input*) mínimo admissível para y^t corresponde a (x^t/λ^*) . O valor da função distância, para a presente observação em termos de distâncias sob o eixo dos x , é of/oc, que é maior do que 1. Note-se que, supondo RCE, os *inputs* mínimos admissíveis são alcançados quando a produtividade média y/x é maximizada. Em termos empíricos, os mínimos representam as “*best practices*”,

isto é, as produtividades observadas mais altas. A função distância de *inputs* evidencia o inverso da medida de eficiência técnica de *input* de Farrell, que calcula a posição relativa a que uma dada observação está da fronteira da tecnologia. Na Figura 1 a eficiência técnica de *input* de Farrell de (x^t, y^t) é igual a oc/of , isto é ao inverso de $D_i^t(y^t, x^t)$.

Para determinar o IPM é necessário definir quatro funções distância, nomeadamente, $D_i^t(y^t, x^t)$, $D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1})$, $D_i^{t+1}(y^t, x^t)$ e $D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1})$. Por exemplo, no que concerne a $D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1})$ são solicitados elementos em relação às duas datas (t e t+1), vindo:

$$D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1}) = \sup \{ \lambda: (x^{t+1}/\lambda, y^{t+1}) \in S^t \}, t=1, 2, \dots, T \quad (4)$$

A função distância contabiliza a mudança proporcional requerida em *inputs* para transportar (x^{t+1}, y^{t+1}) para o limiar S^t . Na situação retratada na Figura 1, a produção (x^{t+1}, y^{t+1}) acontece fora do S^t , de modo que se infere que ocorreu mudança de tecnologia entre as datas t e t+1. O valor da função distância (y^{t+1}, x^{t+1}) , obtido em relação à tecnologia na data t, é equivalente a od/oe , que é inferior a 1. Similarmente, pode ser definida a função distância que mede a mudança proporcional nos *inputs* requerida para colocar (x^t, y^t) no limiar em relação à tecnologia em t+1. Esta função é denominada de $D_i^{t+1}(y^t, x^t)$.

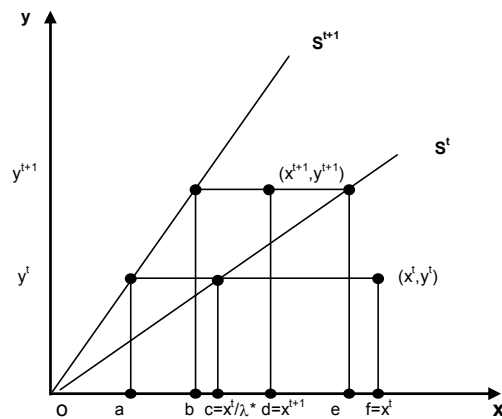


Figura 1 – IPM e funções distância de *inputs*.

3. IPM e sua Decomposição

3.1 Obtenção dos IPM

Em 1992, Caves, Christensen e Diewert (CCD) introduziram dois índices teóricos a que designaram IPM de *input* e de *output* (Caves *et al.*, 1982). CCD, na linha de Malmquist e de Shephard, comparam dois vectores de *inputs/outputs* em relação a uma tecnologia de referência, usando retracção ou expansão radial de *inputs* ou de *outputs*, consoante se trate de índices de produtividade de *input* ou de *output*, respectivamente. Desta forma, CCD definiram o IPM na vertente *input* (a definição na vertente *output* é afim) como:

$$IPM_i^t = D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1}) / D_i^t(y^t, x^t) \quad (5)$$

Nesta formulação, a tecnologia na data t é a tecnologia de referência. Em alternativa, o IPM de *input* pode ser baseado na tecnologia da data $t+1$, resultando desta forma:

$$IPM_i^{t+1} = D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1}) / D_i^{t+1}(y^t, x^t) \quad (6)$$

IPM_i^t e IPM_i^{t+1} reflectem valores distintos para o índice de produtividade quando a tecnologia de produção difere entre as duas datas (Färe *et al.*, 1998). Para se evitar a adopção de um modelo de referência arbitrário pode ser especificado um IPM na vertente *input* como a média geométrica de dois IPM do tipo CCD (Caves *et al.*, 1982; Färe *et al.*, 1989):

$$IPM_i(y^{t+1}, x^{t+1}, y^t, x^t) = \left[\left(D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1}) / D_i^t(y^t, x^t) \right) \times \left(D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1}) / D_i^{t+1}(y^t, x^t) \right) \right]^{1/2} \quad (7)$$

Esta equação segue a letra do índice de Fisher, que se define como a média geométrica dos índices de Laspeyres e de Paasche (Diewert, 1992). O IPM pode ainda ser escrito como (Nishimizu & Page, 1982; Färe *et al.*, 1989):

$$IPM_i = \underbrace{\left(D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1}) / D_i^t(y^t, x^t) \right)}_{VET} \times \underbrace{\left[\left(D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1}) / D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1}) \right) \times \left(D_i^t(y^t, x^t) / D_i^{t+1}(y^t, x^t) \right) \right]^{1/2}}_{VTP} \quad (8)$$

Nesta equação, o primeiro termo do lado direito contabiliza a variação da eficiência técnica relativa (VET) entre as datas t e $t+1$, ou seja, a mudança da distância a que os factores de produção observados estão dos factores de produção mínimos que ainda produzem os *outputs* desejados (fronteira eficiente) no intervalo temporal considerado. Pode tomar valores menores, iguais ou maiores do que 1, consoante exista melhoria, manutenção ou queda da eficiência técnica. O segundo termo do lado direito da equação, dentro dos parênteses rectos, representa a variação da tecnologia de produção (VTP) entre as datas t e $t+1$. A VTP pode ocorrer por um acréscimo (ou decréscimo) na taxa de transformação dos *inputs* em *outputs*, sem que existam alterações nas proporções dos *inputs* consumidos e dos *outputs* produzidos, ou resultarem ainda (ou também) de modificações das proporções utilizadas dos *inputs* e dos *outputs* no processo produtivo. Similarmente, valores inferiores, iguais ou superiores a 1 significarão, progresso, manutenção ou regressão da tecnologia de produção instalada. Regressando à Figura 1, vê-se progresso na tecnologia entre as datas t e $t+1$, visto que $S^t \subset S^{t+1}$. Realce-se também, que $(x^t, y^t) \in S^t$ e $(x^{t+1}, y^{t+1}) \in S^{t+1}$, mas $(x^{t+1}, y^{t+1}) \notin S^t$. Calculando o IPM para as datas t e $t+1$ obtém-se:

$$IPM_i(y^{t+1}, x^{t+1}, y^t, x^t) = (od/ob)/(of/oc) \times \left[\left((od/oe)/(od/ob) \right) \times \left((of/oc)/(of/oa) \right) \right]^{1/2} = \left[(od/of) \times (oa/oe) \right]^{1/2}$$

O incremento na produtividade resulta num IPM inferior a 1, enquanto a deterioração do desempenho ao longo do tempo revela um IPM superior a 1 e a estagnação ao IPM igual a 1. Refira-se que é o balanço entre o aumento e a redução de cada uma das suas parcelas que conduz ao progresso ou à regressão do índice de produtividade (e. g. melhoria de 25 % numa parcela compensa a perda de 10 % noutra). Em resumo, define-se a variação de produtividade de uma UO como o produto da VET pela VTP. A beneficiação na componente da VET é interpretada como uma evidência da recuperação da sua produção em relação à fronteira eficiente (“*catch-up*”), enquanto a melhoria na parcela da VTP revela inovação da indústria.

3.2 Decomposição da variação da eficiência técnica

Ao relaxar-se o pressuposto da produção com RCE, admitindo rendimentos variáveis à escala (RVE), a VET e a VTP podem ainda, por sua vez, ser decompostas. A VET pode ser separada numa componente devido à mudança da eficiência de escala (VEE) e, noutra, devido à mudança da eficiência técnica propriamente dita, designada por variação de eficiência técnica pura (VETP). Considerando que a eficiência de escala $[EE_i(y, x)]$ é equivalente a:

$$EE_i(y, x) = D_i(y, x / RVE) / D_i(y, x / RCE) \quad (9)$$

onde $D_i(y, x / RVE)$ e $D_i(y, x / RCE)$ são funções distância de *inputs* definidas em RVE e RCE. Logo:

$$VET = (EE_i^t(y^t, x^t) / EE_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1})) \times (D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1} | RVE) / D_i^t(y^t, x^t | RVE)) \quad (10)$$

ou seja:

$$VET = \underbrace{\left[\frac{D_i^t(y^t, x^t | RVE)}{D_i^t(y^t, x^t | RCE)} \times \frac{D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1} | RCE)}{D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1} | RVE)} \right]}_{VEE} \times \underbrace{D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1} | RVE) / D_i^t(y^t, x^t | RVE)}_{VETP} \quad (11)$$

A primeira componente, colocada entre parênteses rectos, corresponde à VEE. A VEE contabiliza os desvios resultantes em relação à adopção de RCE, isto é, na redução de *inputs* que se obteria se existissem RCE (Byrnes *et al.*, 1984). O segundo termo diz respeito à VETP. A VETP mede a mudança de eficiência técnica pura, assumindo que a tecnologia possui RVE.

Na Figura 2 apresentam-se as funções distância de *inputs* com RVE. Na figura, S^t (RVE) e S^{t+1} (RVE), representadas a tracejado, evidenciam as tecnologias de produção nas datas t e $t+1$ com RVE. A partir da Figura 2 podem calcular-se a VET e as suas componentes VEE e VETP:

$$VEE = ((oc / ob) / (oc / oa)) \times ((of / od) / (of / oe)) = (oa / ob) \times (oe / od)$$

$$VETP = (of / oe) / (oc / ob) = (of / oe) \times (ob / oc)$$

$$VET = VEE \times VETP = (oa / ob) \times (oe / od) \times (of / oe) \times (ob / oc) = (of / od) \times (oa / oc)$$

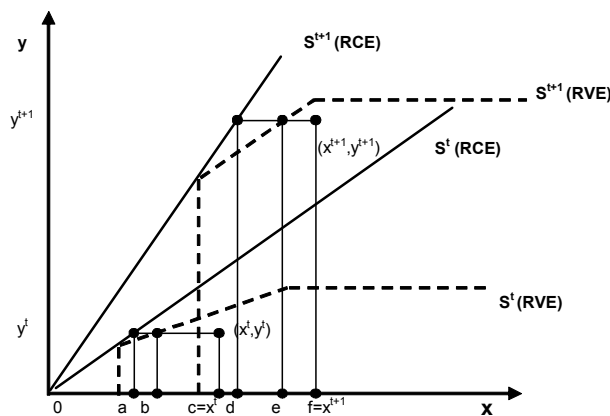


Figura 2 – Funções distância de *inputs* com RVE.

A VETP pode ainda ser decomposta se se relaxar a propriedade de SDI. Neste caso, admite-se a sobreutilização (S) de *inputs* (ou congestão ou *weak disposability* de *inputs*), ou seja, permite-se que o nível de produção possa diminuir quando aumenta um dos factores de produção ou, de outra forma, que quando alguns factores de produção decrescem o nível de *outputs* possa ainda ser aumentado. Formalmente, diz-se que $L^t(y^t)$ satisfaz a propriedade de SDI de *inputs* se $x \geq x' \in L(y) \Rightarrow x \in L(y)$ e que cumpre a propriedade de S se $x \in L(y)$, $\lambda \geq 1 \Rightarrow \lambda x \in L(y)$ (Färe *et al.*, 1985; Färe *et al.*, 1994). Deste modo, a VETP, pode ser subdividida na variação da eficiência de sobreutilização (VES) e na “verdadeira” variação da eficiência técnica pura (VETPS). O declive positivo da fronteira de produção da Figura 3 elucida a parcela da VES. A VES pode ser expressa da seguinte forma, onde S significa que há sobreutilização de *inputs*:

$$VES = (D_i^t(y^t, x^t | RVE, S) / D_i^t(y^t, x^t | RVE)) \times (D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1} | RVE) / D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1} | RVE, S)) \quad (12)$$

Da Figura 3, obtém-se:

$$VES = ((oh / oc) / (oh / ob)) \times ((og / oe) / (og / of)) = (ob / oc) \times (of / oe)$$

$$VETPS = (og / of) / (oh / oc) = (og / of) \times (oc / oh)$$

A VET será equivalente ao produto entre as três parcelas mutuamente exclusivas, VEE, VETPS e VES, isto é, tendo em consideração a Figura 3 e determinando VEE (nesta figura), será:

$$VET = VEE \times VETPS \times VES = (oa / ob) \times (oe / od) \times (og / of) \times (oc / oh) \times (ob / oc) \times (of / oe) = (oa / oh) \times (og / od)$$

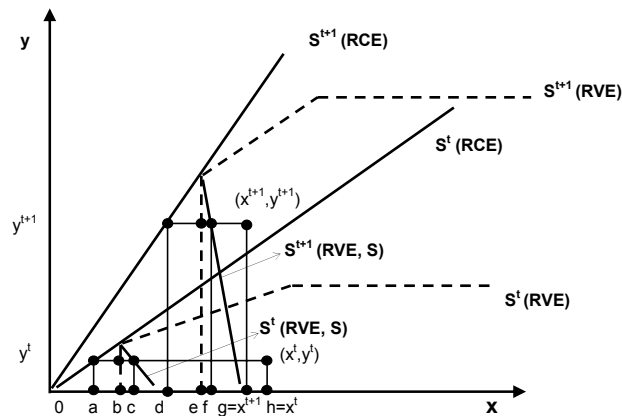


Figura 3 – Funções distância de *inputs* com RVE e S.

A metodologia aqui seguida assenta num IPM baseado em RCE, cuja componente da VET é decomposta na VEE e na VETP, sendo esta última, por sua vez, dividida na VETPS e na VES, o que apresenta múltiplas vantagens, entre as quais evitar problemas computacionais de convergência, comuns quando se adopta RVE e S directamente (Grosskopf, 2003).

3.3 Decomposição da variação da tecnologia de produção

No que concerne à VTP, a presença de RVE não é relevante, uma vez que esta parcela constitui, em geral, um fenómeno de longo prazo (Färe *et al.*, 1998). Logo, sem perda de rigor, pode adoptar-se RCE. Esta constatação é contudo contrariada por diversos autores (Bjurek, 1994; Grifell-Tatjé & Lovell, 1995; Ray & Desli, 1997; Lovell, 2003). Por outro lado, quando a tecnologia de produção não é caracterizada pela neutralidade à Hicks, ou seja, quando a alteração da tecnologia ocasiona mudança na combinação dos *inputs* e *outputs*, a VTP é enviesada. Desta forma, a VTP pode ser decomposta em três parcelas (índices), a saber, a magnitude da variação da tecnologia de produção (MVTP), a variação da tecnologia de produção enviesada de *inputs* (VTPEI) e a variação da tecnologia de produção enviesada de *outputs* (VTPEO) (Färe & Grosskopf, 1996).

A MVTP contabiliza a distância relativa entre as fronteiras nas datas t e $t+1$ na observação na data t . No caso de existir neutralidade à Hicks, o deslocamento das fronteiras é paralelo. A expressão de cálculo será:

$$MVTP = \left(D_i^t(x^t, y^t | RCE) / D_i^{t+1}(x^t, y^t | RCE) \right) \quad (13)$$

A VTPEI mede a mudança relativa da alteração da fronteira nas datas t e $t+1$ para os vectores de *inputs* e de *outputs* observados na data t e a distância entre as fronteiras nas datas t e $t+1$ para o vector de *inputs* observado na data $t+1$. A VTPEI é igual a 1 quando existe neutralidade à Hicks de *inputs*. A equação que representa a VTPEI consiste em:

$$VTPEI = \left[\left(D_i^{t+1}(y^t, x^t | RCE) / D_i^t(y^t, x^t | RCE) \right) \times \left(D_i^t(y^t, x^{t+1} | RCE) / D_i^{t+1}(y^t, x^{t+1} | RCE) \right) \right]^{1/2} \quad (14)$$

Finalmente, a parcela remanescente da VTPEO representa a mudança relativa na distância entre as duas fronteiras t e $t+1$ da observação dos vectores de *inputs* e de *outputs* e da alteração da fronteira para o vector de *outputs* observados na data t . De igual modo, a VTPEO será igual à unidade, no cenário de neutralidade à Hicks de *outputs*. A fórmula de cálculo da VTPEO será:

$$VTPEO = \left[\left(D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1} | RCE) / D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1} | RCE) \right) \times \left(D_o^t(x^{t+1}, y^t | RCE) / D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^t | RCE) \right) \right]^{1/2} \quad (15)$$

Desta forma, a VTP será equivalente ao produto das três parcelas apontadas, mormente, da MVTP, da VTPEI e da VTPEO, o que, exprimindo todas as entidades em *inputs* (ou *outputs*), será equivalente à expressão 8.

3.4 Alternativas ao IPM

Em 1992, foi sugerida uma abordagem alternativa ao IPM tradicional (Diewert, 1992) utilizando funções distância, mas como rácios dos índices de quantidades de Malmquist de *input* e de *output*, sem uma orientação preferencial (*input* ou *output*). Diewert designou este índice de produtividade por Hicks-Moorsteen (IPHM). Em meados dos anos 90, Hans Bjurek desenvolveu e aplicou, pela primeira vez, empiricamente o IPHM, ao qual designou por índice de produtividade total dos factores de Malmquist (Bjurek, 1994 e 1996). Nesta perspectiva, o índice de quantidade de Malmquist de *output* (IQ_o) na data t será igual a:

$$IQ_o^t = \left(D_o^t(x^t, y^{t+1}) / D_o^t(x^t, y^t) \right) \quad (16)$$

Na vertente *input*, o índice de quantidade de Malmquist de *input* (IQ_i) na data t será idêntico a:

$$IQ_i^t = (D_i^t(y^t, x^{t+1}) / D_i^t(y^t, x^t)) \quad (17)$$

Logo, o IPHM para a data t será dado por:

$$IPHM^t = (IQ_o^t / IQ_i^t) = (D_o^t(x^t, y^{t+1}) / D_o^t(x^t, y^t)) / (D_i^t(y^t, x^{t+1}) / D_i^t(y^t, x^t)) \quad (18)$$

O IPHM é simultaneamente orientado na vertente *input* e *output*, devendo adoptar-se RVE, ainda que a doutrina não seja convergente (Lovell, 2003). Se o IPHM é maior, menor ou igual a um, ocorre progresso, regressão ou estagnação da produtividade. O IPM coincide com o IPHM, se e só se a tecnologia for inversamente homotética e exibir RCE (Färe *et al.*, 1998).

As alternativas ao IPM tradicional, tal como aqui exposto, surgem pelo facto de este índice apenas coincidir com o conceito de produtividade total dos factores (PTF) nas circunstâncias de RCE e de presença de um único *input* e *output* (Berg *et al.*, 1992; Grifell-Tatjé & Lovell, 1995; Bjurek *et al.*, 1998; Lovell, 2003). Como tal, para tecnologias com RVE surgiram várias alternativas à definição do IPM tradicional onde se inclui o IPHM. Outras formulações do IPM foram desenvolvidas por Ray e Desli, Prieto e Balk, todas assentes na inserção de uma parcela que incluísse a determinação da VTP para RVE e que captasse a influência da VEE na VTP (Lovell, 2003), limitando o enviesamento do IPM em relação à PTF. De facto, a VTP, determinada por 8, é definida em relação a uma tecnologia em cone (RCE), não sendo rigorosa quando ocorrem RVE (Ray & Desli, 1997; Prieto, 2001; Balk, 2001). De qualquer forma, ambas as alternativas fornecem, em geral, medidas seguras e fiáveis da produtividade, não apresentando diferenças significativas em termos de resultados numéricos da PTF, até porque ambas determinam a VET segundo RVE (Bjurek *et al.*, 1998; Balk, 1998; Lovell, 2003). Embora, *stricto sensu*, não se deva falar de PTF para o IPM tradicional, este último índice tem prevalecido por diferentes razões, desde logo, a facilidade e facilidade de decomposição, a menor complexidade de cálculo e a existência de vários *softwares* disponíveis que permitem o seu cálculo (Lovell, 2003). No futuro, com mais aplicações práticas e maiores desenvolvimentos, este cenário pode mudar (Grosskopf, 2003; Lovell, 2003).

3.5 Cálculo dos índices de produtividade de Malmquist

Os IPM podem ser obtidos por meio de diferentes técnicas. Estas são hierarquizadas em consonância com o tipo de abordagem seguido, se paramétrico ou não paramétrico. A técnica aqui adoptada insere-se nas fronteiras não paramétricas determinísticas aplicando o modelo de análise da actividade (Färe *et al.*, 1985). Esta técnica tem como base o facto de a função distância de *inputs* ou de *outputs* ser idêntica ao inverso da medida de eficiência técnica de Farrell de *inputs* ou *outputs*, respectivamente (Farrell, 1957). Em concreto, esta metodologia calcula as diversas funções distância que constituem o IPM como soluções de problemas de programação linear (Charnes *et al.*, 1978). Estes algoritmos de programação matemática não requerem a minimização de custos ou a maximização de proveitos, nem elementos sobre custos e nem ainda a especificação de uma forma particular para a função distância. Assuma-se que há $k = 1, 2, \dots, K$ UO, com $n = 1, 2, \dots, N$ *inputs* $x_n^{k,t}$ e que são usados para produzir $m = 1, 2, \dots, M$ *outputs* $y_m^{k,t}$, numa dada data $t = 1, 2, \dots, T$ e que a tecnologia exibe RCE e possui SDI (Färe *et al.*, 1985). A tecnologia de produção em t é construída a partir das seguintes observações:

$$S^t = \left\{ (x^t, y^t) : y_m^t \leq \sum_{k=1}^K z^{k,t} y_m^{k,t}, m = 1, \dots, M, \sum_{k=1}^K z^{k,t} x_n^{k,t} \leq x_n^t, n = 1, \dots, N, z^{k,t} \geq 0, k = 1, \dots, K \right\} \quad (19)$$

onde $z^{k,t}$ é uma variável de intensidade não negativa, indicando em que intensidade uma certa actividade ou observação (UO) pode ser empregue na produção. Estas variáveis, que servem para construir a tecnologia de produção a partir dos dados e da sua combinação linear, assim como da sua expansão e contracção, formam o menor cone convexo de *inputs* e de *outputs* observados no período em análise. Para calcular a produtividade da observação k' entre t e $t+1$ é necessário resolver quatro problemas de programação linear, a saber, $D_i^t(y^t, x^t)$, $D_i^t(y^{t+1}, x^{t+1})$, $D_i^{t+1}(y^t, x^t)$ e $D_i^{t+1}(y^{t+1}, x^{t+1})$. Assim, para $D_i^t(y^t, x^t)$ e para cada observação $k = 1, \dots, K$, virá:

$$\begin{aligned}
 [D_i^t(y^{k',t}, x^{k',t})]^{-1} &= \min \lambda^* \\
 \text{s.a.} \\
 y_m^{k',t} &\leq \sum_{k=1}^K z^{k,t} y_m^{k,t} & m = 1, \dots, M \\
 \sum_{k=1}^K z^{k,t} x_n^{k,t} &\leq \lambda x_n^{k',t} & n = 1, \dots, N \\
 z^{k,t} &\geq 0 & k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{20}$$

Ao observar-se a formulação 20 podem ser tecidos alguns comentários. Em primeiro lugar, o problema de minimização é um problema de programação linear. Em segundo, a fronteira de produção consiste num cone convexo satisfazendo RCE e SDI. Além disso, a solução existe se os *inputs* e os *outputs* são não negativos, se cada UO utiliza, pelo menos, um *input* e cada *input* é utilizado, no mínimo, numa UO, e ainda se cada UO produz, no mínimo, um *output* e cada *output* é utilizado, pelo menos, numa UO (Färe & Grosskopf, 1996). O valor da solução para este modelo (λ^*) é igual à relação entre o *input* observado e o *input* mínimo admissível, ou seja, $\|x^{k',t}\| / \|\lambda^* x^{k',t}\|$, medindo a máxima redução proporcional no vector de *inputs* que pode ser conseguida pela UO k' em avaliação. Realce-se ainda que como $(y^{k',t}, x^{k',t}) \in S^t$, $D_i^t(y^{k',t}, x^{k',t}) \geq 1$. A determinação de $D_i^{t+1}(y^{k',t+1}, x^{k',t+1})$ é semelhante a 20, substituindo a data t pela data $t+1$. As restantes duas funções distância necessárias à construção do IPM envolvem elementos das datas t e $t+1$. Deste modo, por exemplo para $D_i^t(y^{k',t+1}, x^{k',t+1})$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
 [D_i^t(y^{k',t+1}, x^{k',t+1})]^{-1} &= \min \lambda^* \\
 \text{s.a.} \\
 y_m^{k',t+1} &\leq \sum_{k=1}^K z^{k,t} y_m^{k,t} & m = 1, \dots, M \\
 \sum_{k=1}^K z^{k,t} x_n^{k,t} &\leq \lambda x_n^{k',t+1} & n = 1, \dots, N \\
 z^{k,t} &\geq 0 & k = 1, \dots, K
 \end{aligned} \tag{21}$$

Nesta formulação $(y^{k',t+1}, x^{k',t+1})$ pode $\notin S^t$, o que implica que $D_i^t(y^{k',t+1}, x^{k',t+1})$ pode ser ≤ 1 .

A exibição de RVE implica a consideração de uma restrição adicional nos modelos apresentados (Banker *et al.*, 1984), designadamente:

$$\sum_{k=1}^K z^k = 1 \tag{22}$$

A adopção de 22 pode não ser recomendada, dado que a opção por RVE, nos períodos mistos (t e t+1), para além da dificuldade de interpretação acrescida, pode conduzir a valores inexistentes da produtividade, não convergindo, isto é, não permitindo satisfazer simultaneamente todas as restrições (Färe *et al.*, 1989; Färe & Grosskopf, 1996). A consideração de RVE implica a integração de mais dois problemas de programação linear, respeitantes à resolução das formulações nas próprias datas t e t+1, com a restrição 22.

A relaxação da SDI ocorre se se trocarem as desigualdades das restrições dos *inputs* (*outputs*) por igualdades, obtendo-se uma envolvente que satisfaz S, mas não necessariamente SDI. Os modelos podem ainda considerar parte das variáveis como não discricionárias, isto é, fixas, impedindo que estas façam parte da função objectivo (Banker & Morey, 1986). Deste modo, a restrição dos *inputs* (*outputs*) será dividida em duas, uma para os *inputs* discricionários e outra para os não discricionários. Assim, os modelos integram variáveis cujo valor não depende da gestão, mas, sim, de características intrínsecas às UO não controláveis a curto prazo. Por fim, refira-se que as formulações de programação linear devem ser resolvidas para cada UO. Assim, se há N UO, carecem de ser solucionados $N \times (3T-2)$ algoritmos, onde T representa o período de tempo. Caso se pretenda determinar a VEE, ter-se-á de acrescentar a restrição da convexidade, o que implica a resolução de $N \times (4T-2)$ algoritmos. Ou seja, por exemplo, para 45 UO e 8 anos (caso de estudo) serão necessários resolver 1350 algoritmos.

4. Caso de Estudo

4.1 Nota introdutória

Nesta secção efectua-se o cálculo da produtividade dos SAAR portugueses entre 1994 e 2001, através dos IPM, procurando também determinar qual a sua origem. O estudo dos IPM envolveu 45 UO, abrangendo cerca de 48 % da população portuguesa. O período adoptado foi caracterizado por mudanças significativas nestes sectores em Portugal motivadas pelo investimento elevado efectuado, maioritariamente proveniente de fundos da União Europeia.

4.2 Recolha de informação

A informação utilizada foi recolhida junto das entidades gestoras portuguesas através da consulta dos seus relatórios de actividades e contas. As Figuras 4 e 5 representam as 45 UO do caso de estudo em função da sua forma organizatória e da sua dimensão populacional.

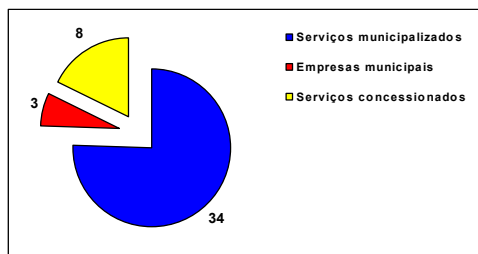


Figura 4 – UO por forma organizatória.

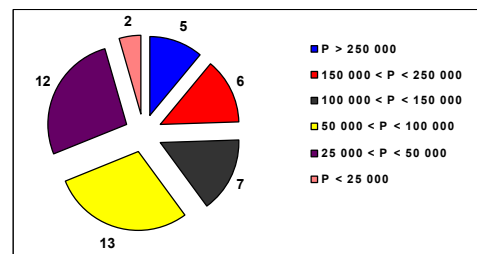


Figura 5 – UO por intervalo populacional.

4.3 Modelos de cálculo

A concepção dos modelos dos IPM procura contemplar, tanto quanto possível, os aspectos que caracterizam a função de produção, ou seja, todos os recursos consumidos e todos os produtos e serviços produzidos pelos SAAR relacionados com a sua missão. Além disso, os *inputs* e os *outputs* devem ser quantificáveis e consistentes entre UO. Na especificação do modelo tem ainda de ser definida qual a orientação a dar ao modelo, quais as variáveis a adoptar e o seu nível de desagregação, e qual a natureza das variáveis em que estas deverão ser medidas.

A orientação do modelo pode ser a de minimização de *inputs* ou a de maximização de *outputs*, ou ambas, caso se adoptassem, por exemplo, os IPHM. Aqui, e por se pretender determinar a produtividade dos SAAR, seguiu-se a vertente minimização de *inputs*. Esta torna-se a mais adequada nestes sectores que estão sujeitos a obrigações de serviço público (entre as quais, a universalidade) e a políticas de gestão da procura (*demand side management*), e que não têm como primeiro objectivo a obtenção de lucros. Isto é, nestes sectores o papel dos gestores não incide sobre o lado da procura, estimulando o crescimento dos *outputs*, mas, sim, sobre o lado da contenção de despesas, minimizando os *inputs*.

O número de variáveis a definir deve ser equilibrado, tendo em conta o número de UO da amostra e os elementos-chave da produção que as variáveis representam. Quanto maior for a relação entre o número de UO e o número de variáveis, mais eficaz será o método, evitando-se que as UO sejam todas tecnicamente eficientes ou próximo disso. Quanto maior for o número de UO, maior será o número de variáveis que poderá ser incluído e tendencialmente a fronteira de eficiência relativa estará mais próxima da absoluta. As variáveis explanatórias (e. g. qualidade de serviço e dimensão), que interpretam e que podem justificar os resultados, devem ser contempladas numa segunda fase (ou na primeira, se a dimensão da amostra o permitir).

As variáveis podem ser representadas em unidades monetárias ou em quantidades, apresentando, cada uma das opções, vantagens e desvantagens. Comummente, os *outputs* são medidos em quantidades, dado que estas unidades são mais intuitivas e mais fiáveis, não necessitando de actualizações e de conversões monetárias, nem dependendo das políticas de tarifação de cada UO, ainda que não exista diferenciação da qualidade dos bens (ou dos serviços) fornecidos. Em relação aos *inputs* a situação é mais controversa. Medir os *inputs* em quantidades possui como principal vantagem evitar as diferenças de contabilização de custos entre as UO (e. g. amortizações), mas, noutra perspectiva, não reflecte as diferenças na qualidade dos *inputs* (e. g. idade dos activos) e torna muito complicada a inclusão de todos os *inputs* (e. g. veículos, canetas e computadores). Por outro lado, a contabilização em unidades monetárias permite capturar todos os *inputs* e a sua qualidade. Porém, pode levantar problemas de equidade. Como tal, adoptaram-se dois modelos, um cujos *inputs* são baseados em unidades monetárias (A) e outro em quantidades (B).

Os modelos aplicados compreendem sempre três *outputs* e três *inputs*. Os *outputs* dizem respeito ao volume de água facturado, ao número de consumidores do serviço de água (SAA) e ao número de utilizadores do serviço de saneamento (SAR). Todos os *outputs* são medidos em quantidades, designadamente, em m³ e em número de consumidores/utilizadores. Os *inputs* do modelo A são expressos em unidades monetárias e consistem nos custos de pessoal, nos outros OPEX e nos custos de capital. Os valores são actualizados a preços de referência de 2001 e são extraídos directamente da informação contabilística das UO analisadas. No modelo A os custos de capital dizem respeito ao somatório dos encargos financeiros com as amortizações. O modelo B compreende os *inputs* relativos ao pessoal e ao capital expressos em quantidades, nomeadamente, o primeiro em número de funcionários (FTE) e o segundo pela extensão das

redes de água e de águas residuais em km. O terceiro *input* consiste no outro OPEX e é integrado em unidades monetárias, visto a sua consideração em quantidades ser inviável.

O Quadro 1 sistematiza as variáveis de cálculo para os dois modelos adoptados e evidencia os seus valores médios para o período (1994-2001) para a amostra estudada (45 UO). Verifica-se que os *inputs* e os *outputs*, principalmente os primeiros, cresceram substancialmente.

Quadro 1 – Valores médios para as variáveis dos diferentes modelos para os anos 1994 e 2001.

	1994	2001	Variação (%)
Outputs Modelos (A e B)			
Água facturada (m ³)	5 263 796	6 554 357	24,5
Consumidores do SAA (n.º)	36 992	47 269	27,8
Utilizadores do SAR (n.º)	22 254	31 308	40,7
Inputs Modelo A			
Custos de pessoal (10 ³ €)*	2387	3010	26,1
Outro OPEX (10 ³ €)*	2507	4204	67,7
Custos de capital (10 ³ €)*	1011	1633	61,5
Inputs Modelo B			
Funcionários (n.º)	184	198	7,6
Outro OPEX (10 ³ €)*	2507	4204	67,7
Extensão das redes de água e de águas residuais (km)	660	906	37,3

* actualizado a preços de 2001

4.4 Resultados

As Figuras 6 e 11 evidenciam o valor médio e o valor acumulado dos IPM para os dois modelos definidos por UO. As linhas horizontais a cheio representam os valores médios da amostra (dos valores médios e acumulados por UO). Nos Quadros 2 e 3 expõem-se os resultados do cálculo dos IPM, incluindo a sua decomposição na VTP e na VET, e a VET na VETPS, na VEE e na VES para os dois modelos. Os resultados patenteados dizem respeito à variação do IPM no período de 8 anos, para as 45 UO da amostra. Os Quadros 2 e 3 ordenam as UO por ordem decrescente da população abrangida. As últimas linhas dos quadros referidos representam os valores médios acumulados, simples e ponderados (pela população servida), da variação do IPM. Foram consideradas e retiradas da amostra (*outliers*) as UO 18 e 26, referentes a situações especiais de mudança de titularidade e de atribuições no período estudado. As Figuras 7, 8, 12 e 13 mostram a variação anual e acumulada dos IPM e das componentes da VET. As Figuras 9, 10, 14 e 15 representam a variação anual e acumulada dos IPM e das componentes da VTP.

O cálculo foi efectuado através de um código desenvolvido na linguagem de programação matemática GAMS, tendo-se usado o MINOS como *solver*. Na resolução dos algoritmos e apenas em relação aos modelos com *inputs* não discricionários, e num número muito reduzido de UO, verificou-se que os resultados não convergiam, isto é, não havia solução porque alguma das restrições não era satisfeita. Isto sucedeu porque, nos períodos mistos, as UO que estavam sob análise não eram incluídas na amostra que servia para construção da tecnologia de produção. Por isso, efectuou-se o seguinte artifício para ultrapassar o problema. Criou-se uma variável auxiliar que, embora não conduzisse à solução óptima, possibilitava a convergência dos resultados, garantindo uma solução muito próxima da óptima. A variável auxiliar permitiu que, em relação aos *inputs* não discricionários, as distâncias previamente

fixadas não fossem rígidas, possibilitando que elas pudessem variar, por via da função objectivo, procurando-se, no entanto, a sua minimização. Além disso, como cada algoritmo é calculado separadamente, o efeito dessa variável só se faz sentir num número limitado de UO. A sua intensidade permite averiguar em que medida as restrições não estão a ser respeitadas. Esta variável evidencia um valor não desprezível apenas em relação à UO 5.

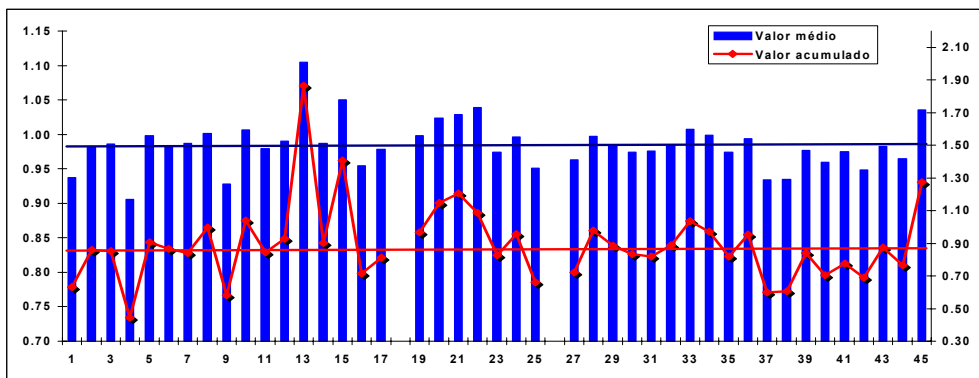


Figura 6 – Valores médios e acumulados do IPM por entidade gestora (modelo A).

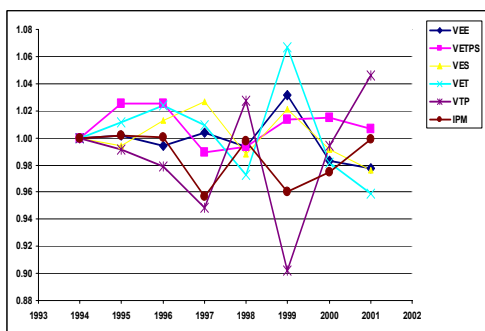


Figura 7 – IPM médio e componentes da VET (A).

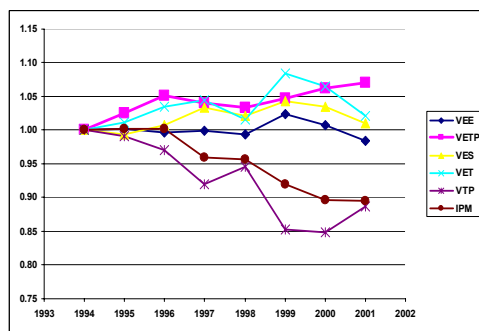


Figura 8 – IPM acumulado e componentes da VET (A).

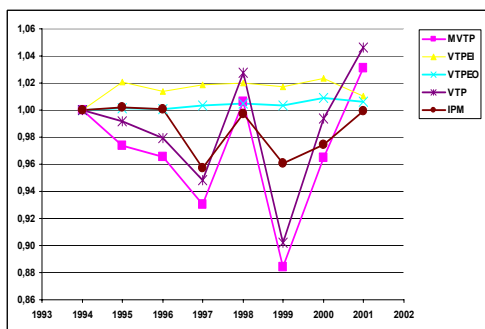


Figura 9 – IPM médio e componentes da VTP (A).

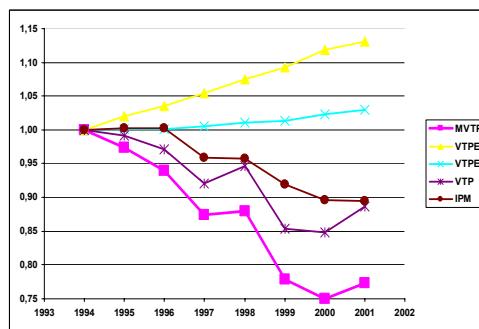


Figura 10 – IPM acumulado e componentes da VTP (A).

Quadro 2 – Variação média e acumulada dos IPM, e das suas componentes para o modelo A.

UO	Modelo A (valores médios)						Modelo A (valores acumulados)					
	VEE	VETPS	VES	VET	VTP	IPM	VEE	VETPS	VES	VET	VTP	IPM
1	1,000	1,000	1,000	1,000	0,938	0,9376	1,000	1,000	1,000	1,000	0,633	0,6332
2	1,008	1,000	1,000	1,008	0,973	0,9807	1,055	1,000	1,000	1,055	0,815	0,8605
3	0,980	1,050	0,997	1,020	0,977	0,9859	0,838	1,347	0,900	1,017	0,836	0,8502
4	0,965	1,000	0,983	0,951	0,951	0,9055	0,722	1,000	0,883	0,638	0,695	0,4432
5	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,9984	1,000	1,000	1,000	1,000	0,904	0,9040
6	0,984	1,029	1,006	1,017	0,967	0,9833	0,888	1,216	1,030	1,113	0,777	0,8648
7	1,003	1,055	0,994	1,044	0,946	0,9873	0,987	1,350	0,954	1,271	0,662	0,8418
8	0,989	1,017	1,001	1,006	0,998	1,0016	0,917	1,119	1,006	1,032	0,966	0,9966
9	0,962	1,000	1,001	0,963	0,968	0,9276	0,749	1,000	1,000	0,749	0,777	0,5821
10	1,005	1,023	1,000	1,028	0,981	1,0067	1,035	1,169	0,996	1,205	0,862	1,0382
11	1,018	1,000	1,000	1,018	0,971	0,9790	1,076	1,000	1,000	1,076	0,783	0,8434
12	1,014	1,000	1,000	1,014	0,983	0,9900	1,070	1,000	1,000	1,070	0,868	0,9284
13	1,035	1,175	1,062	1,143	0,967	1,1047	1,268	1,889	0,994	2,381	0,784	1,8655
14	0,998	0,973	1,023	0,993	0,995	0,9872	0,980	0,822	1,167	0,939	0,961	0,9025
15	0,991	1,000	1,058	1,049	1,005	1,0505	0,935	1,000	1,467	1,372	1,026	1,4070
16	0,969	1,005	1,003	0,970	0,990	0,9544	0,775	0,999	1,019	0,789	0,907	0,7155
17	1,041	0,942	1,019	1,002	0,980	0,9787	1,299	0,643	1,136	0,948	0,857	0,8124
19	0,999	0,998	1,000	0,997	1,003	0,9978	0,987	0,989	1,000	0,976	0,992	0,9675
20	1,009	1,000	1,003	1,013	1,011	1,0234	1,065	1,000	1,024	1,091	1,052	1,1478
21	0,990	1,070	0,974	1,024	1,007	1,0289	0,929	1,536	0,810	1,156	1,042	1,2054
22	1,069	1,018	1,009	1,075	0,972	1,0393	1,465	1,000	0,911	1,334	0,813	1,0843
23	1,000	0,988	0,994	0,983	0,998	0,9745	1,001	0,896	0,959	0,860	0,961	0,8271
24	0,986	1,034	1,000	1,019	0,983	0,9961	0,900	1,238	1,000	1,114	0,858	0,9562
25	0,983	1,000	1,000	0,983	0,966	0,9506	0,875	1,000	1,000	0,875	0,757	0,6622
27	0,998	0,990	1,000	0,987	0,975	0,9627	0,983	0,927	1,000	0,911	0,793	0,7225
28	1,004	1,000	1,000	1,005	0,993	0,9969	1,029	1,000	1,000	1,029	0,949	0,9767
29	0,996	1,005	0,990	0,989	0,999	0,9838	0,971	1,036	0,897	0,903	0,980	0,8842
30	1,000	1,000	1,000	1,000	0,975	0,9744	1,000	1,000	1,000	1,000	0,832	0,8319
31	0,999	0,977	1,003	0,978	1,002	0,9761	0,994	0,817	1,015	0,825	0,993	0,8187
32	1,004	1,000	1,000	1,004	0,981	0,9851	1,027	1,000	1,000	1,027	0,864	0,8870
33	0,977	1,094	0,961	1,015	0,997	1,0078	0,838	1,787	0,723	1,083	0,957	1,0368
34	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,9992	1,000	1,000	1,000	1,000	0,970	0,9705
35	1,010	0,980	1,000	0,989	0,985	0,9737	1,057	0,865	1,000	0,915	0,897	0,8204
36	1,000	0,998	0,999	0,997	0,996	0,9934	1,000	0,983	0,996	0,978	0,972	0,9510
37	0,999	0,970	1,000	0,971	0,974	0,9343	0,987	0,753	0,999	0,742	0,806	0,5984
38	0,982	1,000	0,981	0,966	0,974	0,9348	0,876	1,000	0,868	0,761	0,799	0,6078
39	0,998	0,986	0,999	0,984	0,999	0,9763	0,986	0,892	0,995	0,875	0,962	0,8415
40	0,992	0,999	1,015	1,006	0,953	0,9594	0,929	0,995	1,095	1,012	0,695	0,7028
41	0,998	1,030	1,018	0,999	0,982	0,9746	0,948	0,939	1,014	0,902	0,861	0,7760
42	1,000	1,000	1,000	1,000	0,949	0,9488	1,000	1,000	1,000	1,000	0,689	0,6886
43	0,990	1,018	0,974	0,978	1,007	0,9828	0,933	1,108	0,811	0,839	1,043	0,8749
44	0,963	1,000	1,000	0,963	1,013	0,9644	0,730	1,000	1,000	0,730	1,047	0,7640
45	1,003	1,000	1,000	1,003	1,032	1,0352	1,024	1,000	1,000	1,024	1,244	1,2731
Média simples	0,998	1,010	1,002	1,004	0,984	0,9845	0,980	1,054	0,992	1,014	0,882	0,8922
M. ponderada	0,997	1,013	1,002	1,007	0,977	0,9813	0,972	1,081	0,995	1,038	0,840	0,8724

Quadro 3 – Variação média e acumulada dos IPM, e das suas componentes para o modelo B.

UO	Modelo B (valores médios)						Modelo B (valores acumulados)					
	VEE	VETPS	VES	VET	VTP	IPM	VEE	VETPS	VES	VET	VTP	IPM
1	0,997	1,000	1,005	1,002	1,020	1,0215	0,981	1,000	1,033	1,014	1,144	1,1598
2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,004	1,0039	1,000	1,000	1,000	1,000	1,026	1,0264
3	0,995	1,039	0,986	1,015	0,999	0,9987	0,958	1,279	0,901	1,104	0,989	0,9828
4	1,000	1,000	1,000	1,000	0,986	0,9861	1,000	1,000	1,000	1,000	0,892	0,8916
5	1,000	1,000	1,000	1,000	0,956	0,9558	1,000	1,000	1,000	1,000	0,643	0,6427
6	1,002	1,028	1,000	1,029	0,986	1,0154	1,011	1,203	1,000	1,216	0,906	1,1015
7	0,996	1,050	0,978	1,019	0,998	0,9920	0,974	1,372	0,849	1,134	0,979	0,9434
8	0,996	1,013	1,000	1,009	1,001	1,0096	0,971	1,087	1,000	1,056	1,006	1,0623
9	1,019	1,001	0,989	1,008	0,958	0,9546	1,133	1,000	0,926	1,049	0,740	0,7190
10	1,008	1,004	1,000	1,012	0,988	0,9988	1,053	1,025	1,000	1,079	0,916	0,9883
11	1,003	1,000	1,000	1,003	1,006	1,0088	1,020	1,000	1,000	1,020	1,040	1,0608
12	1,018	1,000	1,001	1,018	0,978	0,9938	1,123	1,000	1,000	1,123	0,850	0,9546
13	1,055	1,048	0,999	1,100	1,005	1,1093	1,440	1,355	0,985	1,923	1,035	2,0137
14	1,008	0,999	1,006	1,012	0,992	1,0046	1,055	0,990	1,041	1,088	0,946	1,0311
15	1,002	1,035	1,000	1,038	1,000	1,0381	1,017	1,270	1,000	1,291	1,001	1,2924
16	0,995	1,005	0,995	0,988	0,995	0,9760	0,947	0,998	0,964	0,910	0,959	0,8414
17	0,998	1,000	1,000	0,998	0,993	0,9933	0,982	1,000	1,000	0,982	0,949	0,9466
19	1,012	1,004	1,005	1,024	1,003	1,0294	1,081	1,024	1,030	1,140	1,005	1,1727
20	1,001	1,000	1,000	1,001	1,008	1,0089	1,010	1,000	1,000	1,010	1,034	1,0445
21	0,989	1,037	1,000	1,023	1,008	1,0319	0,918	1,271	1,000	1,167	1,060	1,2361
22	1,054	1,000	1,000	1,054	0,966	1,0129	1,084	1,000	1,000	1,084	0,770	0,8354
23	0,994	1,029	1,000	1,022	0,980	1,0021	0,957	1,211	1,000	1,159	0,867	1,0051
24	1,000	1,051	1,000	1,050	0,996	1,0434	0,996	1,388	1,000	1,382	0,966	1,3358
25	1,001	1,000	1,000	1,001	0,968	0,9697	1,000	1,000	1,000	1,000	0,772	0,7723
27	1,000	1,000	1,000	1,000	1,023	1,0231	1,002	1,000	1,000	1,002	1,157	1,1587
28	1,000	1,000	1,000	1,000	1,022	1,0223	1,000	1,000	1,000	1,000	1,164	1,1641
29	1,000	1,025	1,000	1,024	1,012	1,0376	1,000	1,167	0,996	1,163	1,082	1,2767
30	0,995	1,000	0,989	0,985	0,978	0,9474	0,942	1,000	0,926	0,872	0,835	0,6751
31	1,002	0,968	1,000	0,970	0,985	0,9532	1,016	0,775	1,000	0,787	0,890	0,7011
32	1,000	1,000	1,000	1,000	0,959	0,9594	1,000	1,000	1,000	1,000	0,743	0,7425
33	0,986	1,026	1,000	1,011	1,008	1,0176	0,899	1,196	1,000	1,075	1,045	1,1231
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,021	1,0209	1,000	1,000	1,000	1,000	1,143	1,1433
35	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	0,9993	0,995	1,000	1,000	0,995	0,990	0,9842
36	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,9957	1,000	1,000	1,000	1,000	0,963	0,9624
37	0,996	0,990	1,000	0,986	1,003	0,9871	0,971	0,926	0,997	0,896	1,015	0,9072
38	0,976	1,000	1,000	0,976	0,957	0,9330	0,831	1,000	1,000	0,831	0,717	0,5960
39	0,980	1,004	0,999	0,983	1,003	0,9854	0,864	1,026	0,994	0,881	1,017	0,8975
40	1,000	1,021	1,000	1,021	0,944	0,9675	0,988	1,147	1,001	1,134	0,653	0,7407
41	0,988	1,013	1,000	1,002	0,990	0,9915	0,904	1,048	1,000	0,948	0,922	0,8741
42	1,000	1,000	1,000	1,000	0,969	0,9689	1,000	1,000	1,000	1,000	0,795	0,7952
43	0,982	1,000	1,000	0,982	1,009	0,9909	0,873	1,000	1,000	0,873	1,066	0,9307
44	0,999	1,000	1,000	0,999	0,987	0,9817	0,949	1,000	1,000	0,949	0,901	0,8546
45	1,000	1,000	1,000	1,000	1,018	1,0187	1,000	1,000	1,000	1,000	1,124	1,1238
Média simples	1,001	1,009	0,999	1,009	0,992	0,9991	0,999	1,064	0,992	1,054	0,947	0,9933
M. ponderada	1,003	1,011	0,998	1,011	0,993	1,0013	1,013	1,079	0,987	1,077	0,949	1,0102

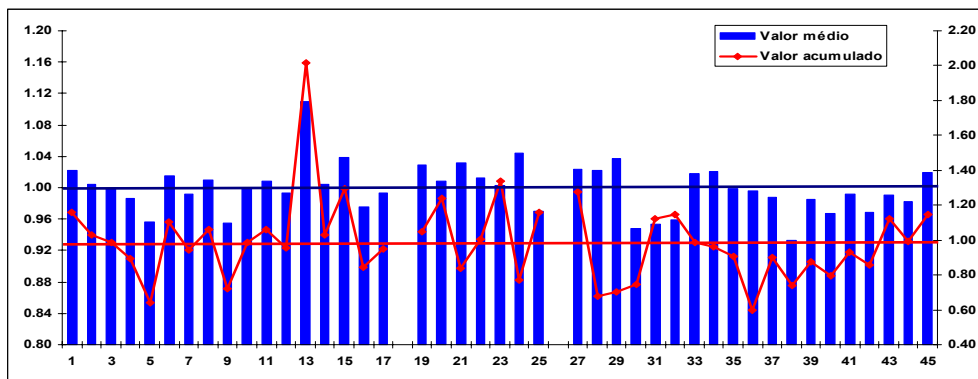


Figura 11 – Valores médios e acumulados do IPM por entidade gestora (modelo B).

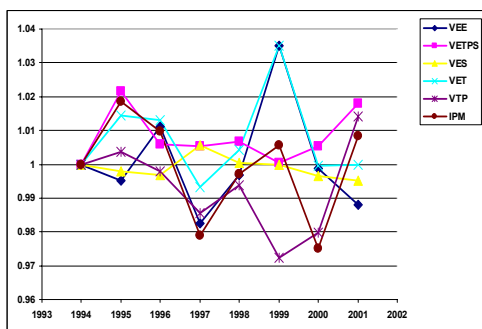


Figura 12 – IPM anual e componentes da VET (B).

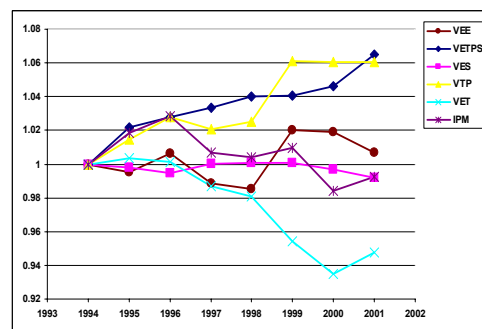


Figura 13 – IPM acumulado e componentes da VET (B).

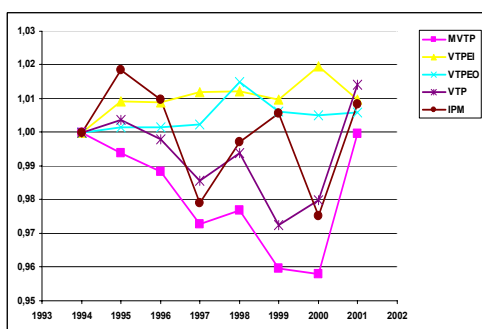


Figura 14 – IPM anual e componentes da VTP (B).

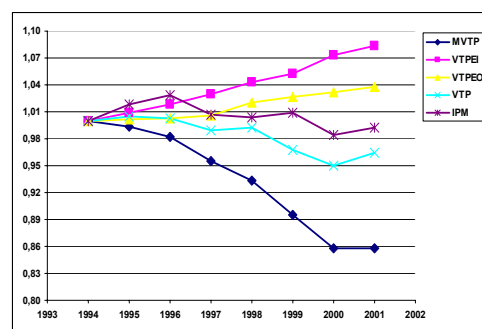


Figura 15 – IPM acumulado e componentes da VTP (B).

4.5 Análise dos resultados

No período 1994-2001, o valor médio anual do IPM para a amostra estudada foi ligeiramente inferior a 1 para o modelo A com valor de 0,9845 e próximo da unidade (0,9991) para o modelo B. Os valores acumulados respectivos foram de 0,8922 e 0,9933. Os resultados favorecem o modelo especificado em quantidades, em relação ao de unidades monetárias, aliás, como seria de esperar. Por exemplo, a deterioração do *input* pessoal, expresso em quantidades, é pouco significativa, o mesmo não se passando quando este é representado em unidades monetárias (*vide* Quadro 1). No período considerado, a produtividade média acumulada caiu 10,8 % para o modelo A e 0,7 % para o modelo B. Ponderando a população abrangida, as produtividades médias e as acumuladas tomam valores semelhantes. O modelo A é penalizado, enquanto o modelo B é beneficiado, o que pode estar relacionado com o facto de as UO de maior dimensão terem, em geral, desenvolvido esforços no sentido de controlar o crescimento do número de funcionários mas não terem conseguido a correspondente redução de custos. A UO 2, por exemplo, reflecte essa constatação. Os valores extremos do IPM correspondem às UO 4 e 13 para o modelo A e às UO 38 e 13 para o modelo B. Para o modelo A, e para os valores acumulados, a produtividade regrediu em 35 UO, ao passo que em 8 UO ocorreu progresso. Para o modelo B registaram-se 24 UO com valores da produtividade inferiores a 1 e 19 UO com valores superiores a 1. O Quadro 4 destaca as características estatísticas mais importantes da amostra examinada. O Quadro 5 mostra a distribuição das UO por gama do IPM.

Quadro 4 – Caracterização estatística dos resultados para os diferentes modelos.

	Modelo	Média	Desvio padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
Modelo A	(valores médios)	0,9845	0,0353	0,9833	0,9055	1,1047
	(valores acumulados)	0,8922	0,2404	0,8605	0,4432	1,8655
Modelo B	(valores médios)	0,9991	0,0315	0,9988	0,9330	1,1093
	(valores acumulados)	0,9933	0,2422	0,9828	0,5960	2,0137

Quadro 5 – Distribuição das UO por gama de produtividade (valores acumulados).

Intervalo	Modelo A	Modelo B
< 0,5	4	
0,5 – 0,6	1, 9, 37	38
0,6 – 0,7	25, 38, 42, 44	5, 30
0,7 – 0,8	16, 27, 40, 41	9, 25, 31, 32, 40, 42
0,8 – 0,9	2, 3, 6, 7, 11, 17, 23, 29, 30, 31, 32, 35, 39, 43	4, 11, 16, 22, 39, 41, 44
0,9 – 1	5, 8, 12, 14, 19, 24, 28, 34, 36	3, 7, 12, 10, 17, 35, 36, 37, 43
1 – 1,1	10, 22, 33	2, 8, 11, 14, 20, 23
1,1 – 1,2	20	1, 6, 19, 27, 28, 33, 34, 45
1,2 – 1,3	21, 45	15, 21, 29
1,3 – 1,4		24
1,4 – 1,5	15	
> 1,5	13	13

Considerando os valores médios dos modelos, no período em análise, a perda de produtividade deveu-se, sobretudo, à variação negativa da VTP (cerca de 8,6 %), isto é, à menor taxa de transformação em *outputs* pelos *inputs* consumidos. Este agravamento pode ser justificado à luz do incremento de alguns parâmetros da qualidade, como, por exemplo, do tratamento de águas residuais, que não foi contabilizado nos *outputs*. A contribuição da VEE foi também negativa no período estudado. A VEE declinou 1,1 %, ou seja, foram despendidos, proporcionalmente, mais 1,1 % de *inputs* para a mesma produção de *outputs* (na mesma proporção) em 2001 do que em 1994. A VETPS concorre positivamente para a variação da produtividade, com um incremento de cerca de 5,9 %, o que significa que as UO estudadas, globalmente, estavam em 2001 mais próximas da fronteira eficiente do que em 1994. A parcela VES teve reduzida influência em termos médios no IPM, aproximadamente, 0,8 % no sentido regressivo e só se fez sentir num número reduzido de UO. No Quadro 6 sintetizam-se os resultados da decomposição do IPM e da VET para os modelos estudados. No Quadro 7 evidencia-se a decomposição da VTP. Verifica-se que o maior contributo para a VTP tem origem na MVTP. A VTPEI e o VTPEO influenciam positivamente a VTP com maior relevância da VTPEI.

Quadro 6 – Decomposição dos IPM e da VET por modelo adoptado.

	Modelo	VEE	VETPS	VES	VET	VTP
Modelo A	(valores médios)	0,998	1,010	1,002	1,004	0,984
	(valores acumulados)	0,980	1,054	0,992	1,014	0,882
Modelo B	(valores médios)	1,001	1,009	0,999	1,009	0,992
	(valores acumulados)	0,999	1,064	0,992	1,054	0,947
Média global	(valores médios)	0,9995	1,0095	1,0005	1,0065	0,9880
	(valores acumulados)	0,9895	1,0590	0,9920	1,0340	0,9145

Quadro 7 – Decomposição dos IPM e da VTP por modelo adoptado.

	Modelo	MVTP	VTPEI	VTPEO	VET	VTP
Modelo A	(valores médios)	0,965	1,018	1,004	1,004	0,984
	(valores acumulados)	0,774	1,131	1,030	1,014	0,882
Modelo B	(valores médios)	0,978	1,012	1,005	1,009	0,992
	(valores acumulados)	0,858	1,084	1,038	1,054	0,947
Média global	(valores médios)	0,9717	1,0146	1,0048	1,0065	0,9880
	(valores acumulados)	0,8156	1,1071	1,0338	1,0340	0,9145

Por fim, os IPM foram também calculados, considerando os *inputs* respeitantes ao capital (custos de capital e extensão de redes), como não discricionários (IPMND). Desta forma, pressupõe-se que esses *inputs* são fixos, isto é, que não são controláveis pelas UO, o que é perfeitamente razoável. Os valores obtidos estão na linha dos IPM discricionários com as diferenças naturais pelo facto de incluírem menos um *input* manuseável e, com isso, muito embora as restrições associadas a esse input se tornem mais limitadas conduzindo até às dificuldades de convergência referidas, as variáveis a otimizar estão presentes em menos restrições podendo assumir uma gama de valores mais dispersa. Por conseguinte, há também

mais flutuação e os valores limite são mais extremos. Nos Quadros 8 e 9 apresentam-se os principais resultados relativos aos IPMND.

A justificação dos valores do IPM obtidos para os SAAR portugueses, isto é, da queda da produtividade, assenta em várias razões, sobretudo relacionadas como o elevado investimento em infra-estruturas efectuado neste período e com a melhoria da qualidade de serviço (Marques, 2005). Na análise da produtividade de UO deve, por isso, ser contemplada a variação da qualidade de serviço e os níveis inicial de desenvolvimento e de desempenho apresentados pelas UO, para além de possíveis variáveis relacionáveis e correlacionáveis com a variação da produtividade, como a dimensão, a forma organizatória e o aumento do grau de cobertura. Com a ressalva que a qualidade dos dados não era, por vezes, a melhor, no estudo referido foi evidenciado estatisticamente, por intermédio de testes de hipóteses (T, Mann-Whitney, mediana, análise da variância e Kruskal-Wallis), que a variação da produtividade não era indiferente à forma organizatória (público/privado), à qualidade do serviço e à dimensão quando representada pela densidade de clientes. Deste modo, os serviços de natureza privada (concessionados), as empresas com menor densidade de clientes (rurais) e as que evidenciavam padrões de qualidade mais altos eram aquelas com maiores produtividades (Marques, 2005).

Quadro 8 – Distribuição das UO por gama de produtividade (valores acumulados dos IPMND).

Intervalo	Modelo A	Modelo B
< 0,5	4, 9, 38, 42	
0,5 – 0,6	25, 27	5, 32, 38
0,6 – 0,7	1, 16, 37, 45	9, 25
0,7 – 0,8	30, 31, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 44	4, 17, 30, 31, 40, 42
0,8 – 0,9	3, 5, 6, 29	16, 22, 37, 39, 43, 44
0,9 – 1	2, 8, 10, 12, 14, 17, 21, 22, 23, 28, 36, 39	3, 10, 12, 35, 36, 41
1 – 1,1	11, 19	2, 6, 7, 8, 20
1,1 – 1,2	24	1, 14, 19, 23, 27, 28, 33, 45
1,2 – 1,3		29, 34
1,3 – 1,4	7, 45	11
1,4 – 1,5		21
> 1,5	13, 15, 20	13, 15, 24

Quadro 9 – Caracterização estatística dos resultados dos IPMND por modelo.

	Modelo	Média	Desvio padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
Modelo A	(valores médios)	0,988	0,066	0,986	0,844	1,233
	(valores acumulados)	0,910	0,420	0,866	0,274	2,663
Modelo B	(valores médios)	1,0022	0,0421	1,0066	0,9124	1,1431
	(valores acumulados)	1,0233	0,3387	0,9758	0,5108	2,4754

5. Conclusões Finais

O objectivo deste artigo consistiu em analisar e discutir o IPM e aplicá-lo ao sector da água em Portugal. Começou-se por realçar as vantagens do IPM quando comparadas com outros métodos de cálculo da produtividade. Após este intróito, deslindou-se o conceito de função distância, o qual constitui a base dos IPM. Seguiu-se a enunciação dos IPM, em consonância com o que CCD haviam feito em 1982. Depois, deduziu-se a decomposição dos IPM na VET e na VTP, e, subsequentemente, a VET, na VEE, na VETPS e na VES, e a VTP, na MVTP, na VTPEI e na VTPEO. Após a decomposição dos IPM, abordaram-se os índices alternativos ao IPM, como o IPHM. Por fim, discutiu-se o processo de cálculo dos IPM, baseado no modelo da análise da actividade apoiado em programação linear. O artigo termina com o caso de estudo que consistiu na especificação e na resolução de vários modelos de cálculo dos IPM para os SAAR portugueses. Como conclusões capitais deste artigo salientam-se as seguintes:

- Os IPM não requerem um comportamento da função de produção estabelecido e nem necessitam de conhecer os valores dos *inputs* e *outputs* em unidades monetárias, nem da sua ponderação. Este método possibilita a decomposição da origem da produtividade e pode ser relacionado com outros índices. Todavia, exige um número significativo de UO;
- O IPM baseia-se no conceito de função distância, que é equivalente ao inverso da medida de eficiência técnica de Farrell. A função distância de *inputs* consiste na redução máxima proporcional (radial) do vector de *inputs*, dado um nível de *outputs* pré-determinado. Os IPM são estabelecidos como o quociente entre funções distância de datas distintas;
- O IPM foi decomposto na VET e na VTP. A VET contabiliza a mudança da distância a que os *inputs* observados estão dos *inputs* mínimos que ainda produzem os *outputs* desejados para um certo intervalo temporal. A VTP evidencia a variação da tecnologia de produção entre duas datas. A VET foi ainda separada numa componente, devido à mudança da eficiência de escala (VEE), noutra, com origem na mudança da eficiência técnica propriamente dita (VETPS) e numa terceira, devido à variação da eficiência de sobreutilização (VES). Por sua vez, a VTP pode ser decomposta na magnitude da variação da tecnologia de produção (MVTP), na variação da tecnologia de produção enviesada de *inputs* (VTPEI) e na variação da tecnologia de produção enviesada de *outputs* (VTPEO);
- Nos últimos anos, das várias alternativas ao IPM tradicional proposto, apenas a baseada no IPHM tem ganho algum destaque. Este índice, simultaneamente orientado nas vertentes *input* e *output*, que tem a vantagem de considerar os efeitos de escala na tecnologia de produção, carece, porém, de maior maturação. Os resultados das aplicações práticas do IPHM até 2004 (menos de meia dúzia) diferem pouco dos obtidos pelo IPM;
- O modelo de análise da actividade resolvido por programação linear constitui uma das formas mais expeditas de calcular o IPM. Contudo, a resolução dos modelos pode não ser convergente (quando integra datas mistas), exclusivamente, se for resolvido impondo RVE ou S directamente, ou quando se impõem *inputs* não discricionários;
- O caso de estudo incidiu sobre 45 UO SAAR. Foram individualizados dois modelos segundo uma orientação *input*. A diferença entre os modelos foi apenas a natureza das variáveis utilizadas nos *inputs* (quantidades ou unidades monetárias). Adicionalmente, foram aplicados modelos assumindo a hipótese da não discricionarieidade do *input* capital;

- Os resultados dos modelos revelaram uma variação da produtividade negativa dos SAAR portugueses. Assim, a queda da produtividade média, por ano, foi de cerca 1,5 e 0,1 % para os modelos A e B e a queda acumulada média respectiva foi de próximo 10,8 e 0,7 %;
- Os resultados negativos deveram-se, sobretudo, à VTP, ou seja, à maior quantidade (taxa) de *inputs* gasta na produção dos mesmos *outputs*. A VEE foi também negativa neste período, mas com menor importância, tal como a VES, embora esta última, de contributo irrelevante. Por outro lado, a VETPS foi positiva, significando que as UO estavam, na generalidade, mais próximas da fronteira eficiente em 2001 do que em 1994.

Referências Bibliográficas

- (1) Balk, B. (1998). *Industrial price, quantity, and productivity indices: the micro-economic theory and an application*. Kluwer Academic Publishers, Boston, EUA.
- (2) Balk, B. (2001). Scale efficiency and productivity change. *Journal of Productivity Analysis*, **15**(3), 159-183.
- (3) Banker, R.; Charnes, A. & Cooper, W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, **30**(9), 1078-1092.
- (4) Berg, A.; Førsund, F. & Jansen, E. (1992). Malmquist indices of productivity growth during the deregulation of Norwegian banking. *Scandinavian Journal of Economics*, **94**, 211-228.
- (5) Bjurek, H. (1994). Essays on efficiency and productivity change with applications to public service production. Dissertação submetida para obtenção do grau de Doutor. Universidade de Gotemburgo, Suécia.
- (6) Bjurek, H. (1996). The Malmquist total factor productivity index. *Scandinavian Journal of Economics*, **98**(2), 303-313.
- (7) Bjurek, H.; Førsund, F. & Hjalmarsson, L. (1998). Malmquist productivity indexes: an empirical comparison. In: *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist* [editado por R. Färe, S. Grosskopf e R. Russell], Kluwer Academic Publishers, 217-239.
- (8) Byrnes, P.; Färe, R. & Grosskopf, S. (1984). Measuring productive efficiency: an application to Illinois strip mines. *Management Science*, **30**(6), 671-681.
- (9) Caves, D.; Christensen, L. & Diewert, E. (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity. *Econometrica*, **50**(6), 393-1414.
- (10) Charnes, A.; Cooper, W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**(6), 429-444.
- (11) Diewert, E. (1992). Fisher ideal output, input, and productivity indexes revisited. *Journal of Productivity Analysis*, **3**(3), 211-248.

- (12) Farrell, M. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, **120A**(3), 253-290,
- (13) Färe, R. & Grosskopf, S. (1996). *Intertemporal production frontiers: with dynamic DEA*. Kluwer Academic Publishers, Boston, EUA.
- (14) Färe, R.; Grosskopf, S.; Lindgren, B. & Roos, P. (1989). Productivity developments in Swedish hospitals: a Malmquist output index approach. *Discussion Paper Series*, **89**, Southern Illinois University.
- (15) Färe, R.; Grosskopf, S. & Lovell, K. (1985). *The measurement of efficiency of production*. Kluwer Nijhoff Publishing, Boston, EUA.
- (16) Färe, R.; Grosskopf, S. & Lovell, K. (1994). *Production frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge, EUA.
- (17) Färe, R.; Grosskopf, S. & Roos, P. (1998). Malmquist productivity indexes: a survey of theory and practice. **In:** *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist* [editado por R. Färe, S. Grosskopf e R. Russell], Kluwer Academic Publishers, 127-190.
- (18) Färe, R. & Primont, D. (1995). *Multi-output production and duality: theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, EUA.
- (19) Grifell-Tatjé, E. & Lovell, K. (1995). A note on the Malmquist productivity growth index. *Economic Letters*, **47**(2), 169-175.
- (20) Grosskopf, S. (2003). Some remarks on productivity and its decomposition. *Journal of Productivity Analysis*, **20**(3), 459-474.
- (21) Lovell, K. (1993). Production frontiers and productive efficiency. **In:** *The measurement of productive efficiency: techniques and applications* [editado por H. Fried, K. Lovell e S. Schmidt]. Oxford University Press, 3-67.
- (22) Lovell, K. (2003). The decomposition of Malmquist productivity indexes. *Journal of Productivity Analysis*, **20**(3), 437-458.
- (23) Malmquist, S. (1953). Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de Estadística*, **4**(1), 209-242.
- (24) Marques, R. (2005). A regulação dos serviços de água e de águas residuais. A aplicação de métodos não paramétricos de benchmarking. Dissertação submetida para obtenção do grau de Doutor. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal.
- (25) Nishimizu, M. & Page, J. (1982). Total factor productivity growth, technological progress, and technical efficiency change: dimensions of productivity change in Yugoslavia, 1965-78. *Economic Journal*, **92**(368), 920-936.
- (26) Prieto, J. (2001). La evaluación de la productividad com índices de Malmquist. **In:** *La medición de la eficiencia y la productividad* [coordenado por A. Álvarez], Ediciones Pirámide, 167-196.

- (27) Ray, S. & Desli, E. (1997). Productivity growth, technical progress and efficiency change in industrialized countries: a comment. *American Economic Review*, **87**(5), 1033-1039.
- (28) Shephard, R. (1953). *Cost and production functions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, EUA.
- (29) Shephard, R. (1970). *Theory of cost and production functions*. Princeton University Press Princeton, New Jersey, EUA.