

**AMOSTRAGEM DESCRITIVA NO APREÇAMENTO DE
OPÇÕES EUROPÉIAS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO:
O EFEITO DA DIMENSIONALIDADE E DA PROBABILIDADE DE
EXERCÍCIO NO GANHO DE PRECISÃO**

Eduardo Saliby *

Instituto COPPEAD de Administração / UFRJ

Rio de Janeiro – RJ

saliby@coppead.ufrj.br ; Eduardo.Saliby@brunel.ac.uk

Sergio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa

Jaqueline Terra Moura Marins

Instituto COPPEAD de Administração / UFRJ e

Banco Central do Brasil

Rio de Janeiro – RJ

sgouvea@coppead.ufrj.br ; jaqueline.terra@bcb.gov.br

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 03/2005; aceito em 08/2006

Received March 2005; accepted August 2006

Resumo

O objetivo deste trabalho é o de avaliar o efeito da dimensionalidade e da probabilidade de exercício de uma opção de compra européia, no ganho de precisão obtido com o uso da Amostragem Descritiva no apuração destas opções através de Simulação Monte Carlo, em lugar da abordagem tradicional da Amostragem Aleatória Simples. Após confirmar a ausência de viés nas estimativas, sua precisão foi avaliada pelo erro padrão destas estimativas. Os resultados obtidos mostram que a eficiência estatística das duas técnicas não é afetada pelo aumento da dimensionalidade do problema, não sofrendo perda de precisão com esta variação. No entanto, em relação ao preço de exercício, embora a Amostragem Descritiva tenha se mostrado mais eficiente do que a Amostragem Aleatória Simples, observou-se uma redução do ganho de precisão à medida que a probabilidade de exercício diminuiu. Embora os resultados aqui apresentados se atenham ao caso particular de uma opção européia, há evidências de que o mesmo tipo de comportamento em relação à dimensionalidade do problema e à probabilidade de exercício também se manifeste nos demais tipos de opção.

Palavras-chave: simulação de *Monte Carlo*; amostragem descritiva; opção.

Abstract

The purpose of this paper is to evaluate the effect of dimensionality and probability of exercise of a European call option on the precision improvements obtained by the usage of Descriptive Sampling on a Monte Carlo Simulation to price such derivative as opposed to the use of traditional Simple Random Sampling. After verifying the absence of bias, the precision of the estimates was assessed by their standard error. The results show that the statistical efficiency of both techniques is unaffected by an increase of dimensionality and maintain their level of precision. However, as to the exercise price, although Descriptive Sampling proved to be more efficient than Simple Random Sampling, the improvement weakens as the option's exercise probability declines. Although this work relates to European options, other options should behave similarly in regard to dimensionality and exercise price.

Keywords: Monte Carlo simulation; descriptive sampling; option.

1. Introdução

Freqüentemente, problemas estudados através de simulação de Monte Carlo fazem uso de modelos probabilísticos envolvendo um elevado número de dimensões, correspondendo cada dimensão a um componente aleatório do modelo. Isso é particularmente observado em problemas na área de finanças. Mesmo no caso do apreçamento de um único derivativo, a dimensionalidade pode assumir valores muito elevados. Em estudo recente de Marins, Santos & Saliby (2003), no qual foram avaliadas diferentes técnicas de redução de variância no apreçamento de uma opção asiática, foi identificada a necessidade de um melhor entendimento dos efeitos da dimensionalidade na precisão dos resultados de simulações por Monte Carlo.

O apreçamento de opções por meio de simulação foi inicialmente proposto por Boyle (1977), que sugeriu um modelo de *Monte Carlo* para simular o processo de geração de preços do ativo-objeto, baseado na premissa de neutralidade ao risco. Esta modelagem, bem como suas sucessoras, manteve como base a abordagem tradicional da simulação Monte Carlo, utilizando-se da Amostragem Aleatória Simples (AAS) para a geração dos componentes aleatórios do modelo. Uma reconhecida consequência desta abordagem amostral é o baixo nível de precisão das estimativas, que pode ser em parte contornada com o uso das técnicas de redução de variância (Charnes, 2000). Vista como uma técnica de redução de variância de caráter geral em simulação de Monte Carlo, a Amostragem Descritiva (Saliby, 1990) tem proporcionado melhores resultados, tanto do ponto de vista da precisão estatística como da velocidade de obtenção das estimativas, em relação àqueles obtidos através das demais técnicas de redução de variância e, conseqüentemente, em relação àqueles obtidos através da abordagem tradicional: AAS (Moreira, 2001; Araújo, 2001; Saliby & Moreira, 2002).

Cabe notar que, embora o uso de simulação para apreçar opções européias dentro das premissas do Modelo de Black & Scholes (1973) seja desnecessária, por se dispor de uma solução analítica, é justamente este fato que faz deste problema um referencial na simulação aplicada ao estudo de opções, da mesma forma que o modelo de filas M/M/1 é utilizado como referência na simulação de filas de espera. Outra vantagem deste seu uso foi o fato da trajetória do ativo-objeto, modelada segundo um movimento geométrico browniano, poder ser gerada com diferentes números de pontos ou eventos, permitindo assim variar a dimensionalidade do problema de simulação ainda que preservando o mesmo caso em estudo.

Este trabalho tem por finalidade comparar o desempenho relativo, em termos de precisão das estimativas, da Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples, quando de alterações na dimensionalidade do problema (número de variáveis aleatórias por tentativa de simulação) e da variação na probabilidade de exercício da opção. Foi estudado o caso de uma opção de compra européia, com a expectativa já em parte confirmada de que o mesmo padrão de comportamento também se observe em outros tipos de opções.

O trabalho está organizado da seguinte forma: a segunda seção descreve a metodologia utilizada, apresentando as técnicas de amostragem empregadas; na seção 3, são apresentados e discutidos os principais resultados obtidos. Por fim, na seção 4, são apresentadas as principais conclusões do estudo.

2. Metodologia

2.1 Opções europeias

Uma opção de compra europeia apresenta uma função *payoff* bastante simples, definido pelo máximo entre zero e a diferença entre o preço do ativo-objeto na data de exercício e o preço de exercício da opção:

$$\text{Payoff} = \max(0; S - K) = (S - K)^+ \quad (1).$$

Onde:

S = preço do ativo-objeto na data de vencimento da opção;

K = preço de exercício da opção.

O preço de uma opção de compra europeia, também chamado de prêmio, representa o valor presente do *payoff* esperado; ele pode ser estimado por simulação de *Monte Carlo* através da média dos *payoffs* simulados trazidos a valor presente. Como as opções de compra europeias dispõem de uma solução analítica fechada para os seus prêmios, dada pelo Modelo de Black & Scholes (1973), esta solução será usada para verificar as estimativas de prêmios obtidas por simulação. O modelo também fornece a probabilidade de exercício, que será usada para verificar as probabilidades de exercício também estimadas por simulação. A fórmula de Black & Scholes para o prêmio de uma opção de compra europeia (c) é:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-R_f T/252} N(d_2) \quad \text{equação (2)}.$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \frac{T}{252}}{\sigma \sqrt{\frac{T}{252}}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \frac{T}{252}}{\sigma \sqrt{\frac{T}{252}}} = d_1 - \sigma \sqrt{\frac{T}{252}};$$

R_f = taxa de juro livre de risco anual;

T = prazo de vencimento da opção em dias úteis;

$N(d_i)$ = área sob a curva normal padrão à esquerda de d_i , $i=1$ e 2 ;

S_0 = o preço do ativo no instante inicial; e

σ = a volatilidade anualizada dos retornos.

A probabilidade de exercício da opção, sob este modelo, é fornecida pela expressão $N(d_2)$.

2.2 O modelo de simulação de Monte Carlo

Para se obter uma estimativa do prêmio de uma opção europeia, utilizou-se um modelo de simulação de *Monte Carlo* para a geração da trajetória do preço do ativo-objeto ao longo de um período de tempo. Assim como no modelo de Black & Scholes (1973), admitimos que a trajetória de preços do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano, representado pela equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad (3).$$

Onde:

- S = preço do ativo;
- μ = retorno do ativo;
- σ = volatilidade do ativo;
- dW = processo de *Wiener*.

Com a discretização da equação (3), a adoção da hipótese de neutralidade ao risco (retorno do ativo sendo igual à taxa de juros livre de risco) e o uso do Lema de Itô, é possível chegar à seguinte expressão para o preço do ativo na data t , considerando o intervalo de tempo dt (vide por exemplo Hull, 1999):

$$S_t = S_{t-1} e^{[(R_f - \sigma^2 / 2) * dt + \sigma * \sqrt{dt} * z_t]}, \quad (4)$$

Onde:

- S_t = preço do ativo na data t ;
- S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;
- dt = intervalo de tempo;
- z_t = variável aleatória normal padrão referente à data t .

Os preços do ativo-objeto foram simulados para 42 dias, com base na expressão (4). O intervalo de tempo dt foi obtido pela divisão do prazo de vencimento (42 dias) pela quantidade de pontos simulados por trajetória, ou equivalentemente, a quantidade de dimensões aleatórias (variando de 1 a 100). Em cada corrida de simulação, foram geradas 1000 trajetórias para o preço do ativo-objeto. Cada experimento de simulação totalizou 40 corridas para cada valor de dimensionalidade considerado. Em cada corrida, obteve-se uma estimativa de prêmio, dada pela média dos 1000 *payoffs* trazidos a valor presente. O prêmio final estimado em cada experimento foi dado pela média das 40 estimativas e o erro padrão foi o desvio padrão das 40 estimativas. Esses mesmos cálculos foram feitos para a probabilidade de exercício das opções, cuja solução analítica dentro do modelo de Black & Scholes é dada pelo termo $N(d_2)$ na equação (2).

As simulações foram desenvolvidas utilizando o *software* Matlab 6.5.

Os demais parâmetros utilizados em (4) são listados no Quadro 1:

Quadro 1 – Síntese dos dados considerados nas simulações.

S_0	Preço inicial ativo-objeto da opção (em $t=0$)	\$55
R_f	Taxa anual de juros livre de risco	3%
K	Preços de exercício (\$)	5, 15, 25, ..., 85
σ	Volatilidade anual do ativo	40%
Dim	Nº de dimensões aleatórias	1, 2, ..., 100
T	Prazo de vencimento das opções (dias úteis)	42
dt	Intervalo de tempo simulado	(T/252)/Dim
	Nº de observações por corrida (trajetórias)	1000
	Nº de corridas	40

Cada valor de K , combinado com os demais parâmetros, define uma única opção européia a ser apreçada.

2.3 Técnicas de amostragem utilizadas

A simulação de *Monte Carlo* utiliza a Amostragem Aleatória Simples (AAS) como método padrão amostral. Em geral, mas não necessariamente, a AAS faz uso do método da transformada inversa para gerar valores aleatórios para uma determinada distribuição de probabilidade, a partir de valores gerados segundo uma distribuição uniforme padrão $U(0, 1)$ (Banks, Carson & Nelson, 1996).

A Amostragem Descritiva (AD), proposta por Saliby (1990), diferencia-se da AAS por não mais utilizar a geração aleatória (ou pseudo-aleatória) dos valores uniformes. Ela se baseia numa seleção totalmente determinística dos valores amostrais das variáveis aleatórias de entrada do modelo, de modo a não se incorrer em erros amostrais desnecessários no processo de simulação. Esses valores, uma vez deterministicamente selecionados, são permutados aleatoriamente. No processo de seleção dos valores, os momentos das amostras de entrada são determinados de modo a serem praticamente iguais aos respectivos valores teóricos, não mais variando entre diferentes corridas. Dado que a variação de conjunto e a variação de seqüência são as fontes de variabilidade das estimativas de simulação (Saliby, 1989), este procedimento de amostragem elimina uma destas fontes: o conjunto, identificado como espúrio pelo proponente, levando assim a estimativas mais precisas.

A fórmula usada para a geração do conjunto de valores descritivos, a serem depois permutados aleatoriamente, é:

$$xd_i = F^{-1}\left(\frac{i-1+0.5}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i-0.5)}{n}\right], \quad (5)$$

Onde:

n = tamanho da amostra descritiva;

i = 1,2,3, ..., n ;

xd_i = i -ésimo elemento do conjunto de valores da amostra descritiva;

F^{-1} = inversa da função de distribuição acumulada da variável de entrada X .

No caso de problemas multidimensionais com k dimensões, a variável de entrada passa a ser um vetor de tamanho k . Neste caso, a composição da amostra descritiva fará com que sejam gerados k conjuntos descritivos, segundo a expressão (5), usando a inversa da função de probabilidade acumulada apropriada a cada dimensão. Em seguida, cada conjunto de valores descritivos xd_i é permutado aleatoriamente de forma separada e independente da permutação dos demais $(k-1)$ conjuntos. O j -ésimo valor da variável de entrada será o vetor formado pelos j -ésimos valores de cada conjunto permutado.

3. Resultados e sua Análise

As Tabelas 1 e 2 apresentam os valores analíticos dos prêmios e das probabilidades de exercício das opções estudadas, obtidos pela solução de Black & Scholes (B&S), assim como a média e os respectivos erros padrões das estimativas dos prêmios e das probabilidades de exercício, obtidas pelos dois métodos de amostragem testados: AAS e AD. Salienta-se que, tanto nas Tabelas 1 e 2 quanto nos gráficos apresentados adiante, o erro padrão para a Amostragem Descritiva no caso de uma dimensão é zero pois, neste caso, a permutação dos valores de entrada não altera o resultado da corrida de simulação, ao contrário do que ocorre

nos demais casos com duas ou mais dimensões. Observa-se ainda que para valores baixos de K (5, 15 e 25), para os quais a probabilidade de exercício é praticamente 100%, a variação nos prêmios é praticamente constante e igual ao valor presente da variação de K, ou seja, $9,95 = 10 \cdot \exp(-42/252 \cdot 0,03)$.

Os resultados mostram que as estimativas de prêmio e da probabilidade de exercício das opções foram muito próximas aos respectivos valores teóricos, independente da dimensionalidade ou do preço de exercício, conforme ilustram os Gráficos 1 e 2 referentes ao caso do preço de exercício $K = 55$.

Já a Tabela 3 retrata, para uma amostra de valores da dimensionalidade, o efeito conjunto da dimensionalidade e da probabilidade de exercício nos ganhos obtidos com o uso da Amostragem Descritiva: os ganhos são estáveis com a variação da dimensionalidade, porém caem com a redução da probabilidade de exercício.

Tabela 1 – Prêmios das opções de compra européia para diferentes preços de exercício obtidos pelo modelo de Black e Scholes e estimados por simulação Monte Carlo com diferentes dimensionalidades utilizando as Amostragens Aleatória Simples e Descritiva acompanhados pelos erros padrões de cada estimativa.

K	B&S	Dimensão = 1				Dimensão = 50				Dimensão = 100			
		AAS		AD		AAS		AD		AAS		AD	
		Prêmio	Erro Padrão	Prêmio	Erro Padrão	Prêmio	Erro Padrão	Prêmio	Erro Padrão	Prêmio	Erro Padrão	Prêmio	Erro Padrão
5	50,0249	50,0861	0,2928	50,0239	-	50,1122	0,3121	50,0199	0,0317	49,9992	0,2991	50,0330	0,0325
15	40,0748	40,1359	0,2928	40,0738	-	40,1621	0,3121	40,0698	0,0317	40,0490	0,2991	40,0829	0,0325
25	30,1247	30,1858	0,2928	30,1237	-	30,2119	0,3121	30,1197	0,0317	30,0989	0,2991	30,1328	0,0325
35	20,1800	20,2411	0,2922	20,1786	-	20,2663	0,3112	20,1750	0,0327	20,1548	0,2980	20,1879	0,0341
45	10,6254	10,6783	0,2702	10,6240	-	10,7051	0,2867	10,6186	0,0616	10,6010	0,2679	10,6336	0,0712
55	3,7090	3,7272	0,1967	3,7076	-	3,7525	0,2035	3,7005	0,1016	3,7050	0,1795	3,7365	0,0999
65	0,8216	0,8232	0,0972	0,8201	-	0,8264	0,0937	0,8143	0,0673	0,8264	0,0853	0,8448	0,0669
75	0,1251	0,1250	0,0377	0,1236	-	0,1267	0,0361	0,1269	0,0266	0,1226	0,0375	0,1334	0,0277
85	0,0145	0,0136	0,0107	0,0131	-	0,0144	0,0098	0,0182	0,0082	0,0143	0,0106	0,0146	0,0091

Tabela 2 – Probabilidade de exercício das opções de compra européia para diferentes preços de exercício obtidos pelo modelo de Black e Scholes e estimados por simulação Monte Carlo com diferentes dimensionalidades utilizando as Amostragens Aleatória Simples e Descritiva acompanhados pelos erros padrões de cada estimativa.

K	B&S	Dimensão = 1				Dimensão = 50				Dimensão = 100			
		AAS		AD		AAS		AD		AAS		AD	
		Proba- bilidade	Erro Padrão										
5	100,000%	100,000%	0,000%	100,000%	-	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%
15	100,000%	100,000%	0,000%	100,000%	-	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%
25	100,000%	100,000%	0,000%	100,000%	-	99,998%	0,016%	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%	100,000%	0,000%
35	99,670%	99,660%	0,177%	99,700%	-	99,683%	0,163%	99,655%	0,183%	99,640%	0,223%	99,683%	0,166%
45	88,057%	88,178%	1,231%	88,100%	-	88,233%	0,820%	88,275%	0,883%	87,990%	1,096%	88,058%	0,824%
55	47,965%	48,340%	1,392%	48,000%	-	48,540%	1,552%	48,338%	0,949%	47,708%	1,515%	47,950%	0,855%
65	14,141%	14,243%	1,102%	14,100%	-	14,190%	1,093%	14,038%	0,813%	14,363%	1,020%	14,353%	0,807%
75	2,557%	2,588%	0,648%	2,600%	-	2,563%	0,523%	2,590%	0,507%	2,518%	0,495%	2,720%	0,461%
85	0,330%	0,323%	0,190%	0,300%	-	0,325%	0,160%	0,280%	0,149%	0,335%	0,182%	0,328%	0,143%

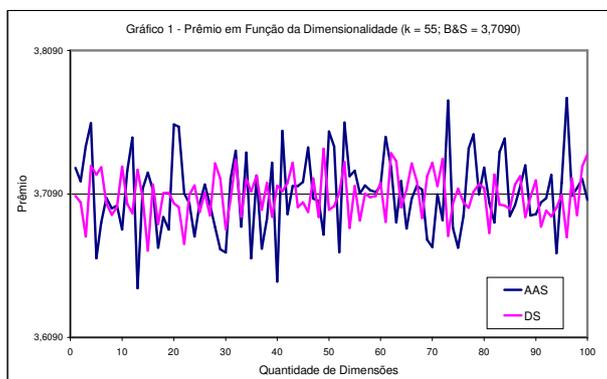


Gráfico 1.

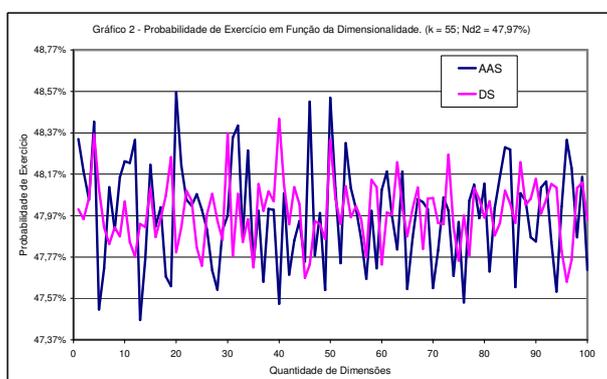


Gráfico 2.

Tabela 3 – Razão entre os erros padrões das estimativas obtidas com Amostragem Descritiva e com Amostragem Aleatória Simples, para diferentes dimensionalidades e preços de exercício (K).

K	Dim = 1	Dim = 10	Dim = 25	Dim = 50	Dim = 75	Dim = 100
5	-	0,1185	0,1237	0,1015	0,0994	0,1088
15	-	0,1185	0,1237	0,1015	0,0994	0,1088
25	-	0,1185	0,1237	0,1015	0,0994	0,1088
35	-	0,1235	0,1286	0,1051	0,1038	0,1146
45	-	0,2710	0,2351	0,2150	0,2161	0,2657
55	-	0,4786	0,5949	0,4994	0,4651	0,5563
65	-	0,7745	1,0260	0,7181	0,7370	0,7838
75	-	0,9015	1,1001	0,7365	1,2163	0,7392
85	-	0,6734	1,0183	0,8344	1,0801	0,8580

Já nos Gráficos 3, 4 e 5 são apresentados os erros padrões das estimativas dos prêmios das opções para três diferentes preços de exercício (K): 35, 55 e 75, correspondentes a probabilidades de exercício $N(d_2)$: 99,67%, 47,96% e 2,56%. Esses gráficos mais uma vez evidenciam que o erro padrão das estimativas não é influenciado pelo aumento da

dimensionalidade. Nota-se ainda que a Amostragem Descritiva gera melhores estimativas do que a Amostragem Aleatória Simples para os valores mais baixos de K (maior probabilidade de exercício); porém, este ganho torna-se cada vez menor à medida que K aumenta, sendo praticamente nulo para os casos mais extremos, $K \geq 75$.

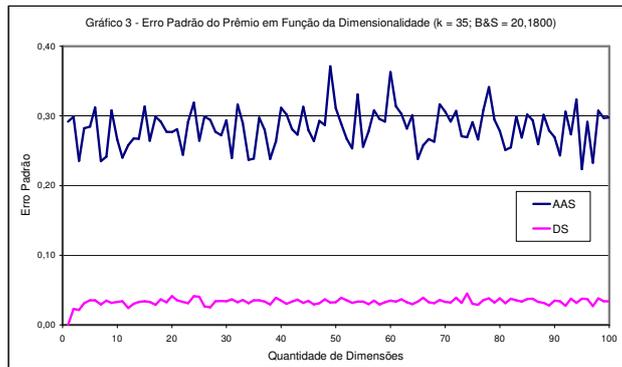


Gráfico 3.

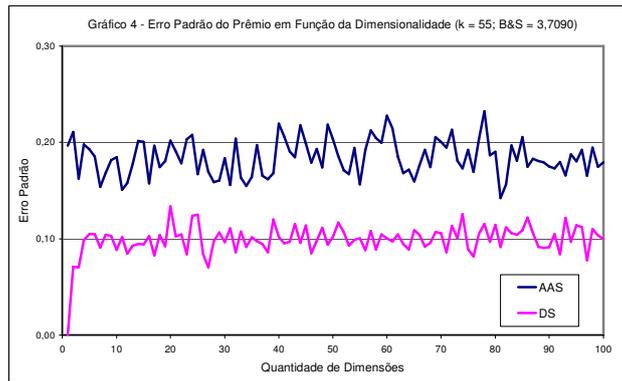


Gráfico 4.

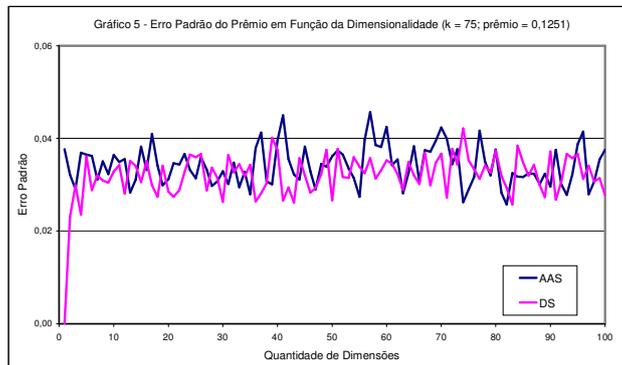
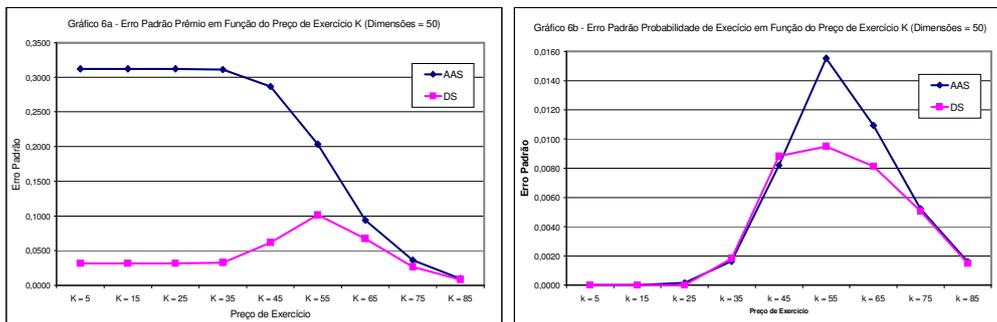


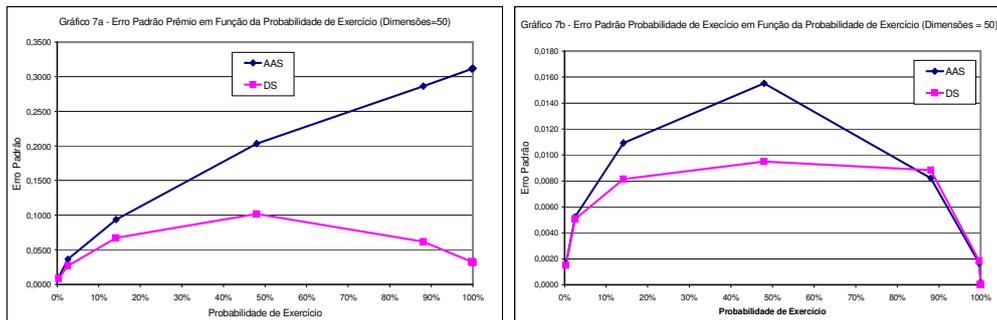
Gráfico 5.

Uma melhor visualização deste efeito é proporcionada pelo Gráfico 6a, que mostra a influência do preço de exercício na precisão das estimativas de prêmio para o caso com 50 dimensões (resultados similares são também observados para outros níveis de dimensionalidade). Já o Gráfico 6b apresenta o erro padrão das estimativas das probabilidades de exercício $N(d_2)$ para os diferentes preços de exercício.

Os Gráficos 7a e 7b são semelhantes aos anteriores, porém relacionando agora os erros padrões com as probabilidades de exercício $N(d_2)$, em lugar do preço de exercício K. Cabe notar que as opções com preços de exercício $K = 5, 15, 25$ e 35 têm probabilidades de exercício virtualmente iguais a 100%, confundindo-se num único ponto nestes gráficos.



Gráficos 6a e 6b.



Gráficos 7a e 7b.

Nos Gráficos 6b e 7b pode ser visto que tanto para valores baixos ou elevados de K, ou equivalentemente, para probabilidades de exercício elevadas ou baixas, as estimativas da probabilidade de exercício são mais precisas, com os erros padrões para ambas as técnicas amostrais convergindo em valor. Também pode ser observado nos Gráficos 6a e 7a que, com a redução da probabilidade de exercício (K's altos), o erro padrão das estimativas do prêmio também se reduz para ambos os métodos amostrais. Uma explicação para este resultado é o fato de que o *payoff* da opção não exercida é zero e, à medida que a probabilidade de exercício diminui, aumenta a proporção de *payoffs* nulos no cálculo da média usada como estimativa do prêmio. Este aumento do número de *payoffs* nulos tende a tornar a estimativa do prêmio independente do método de amostragem utilizado; no limite, para valores de K muito altos e, conseqüentemente, probabilidades de exercício muito reduzidas, a variância das estimativas tende a zero. No entanto, efeito similar não se observa no caso de valores

muito baixos de K , com probabilidades de exercício praticamente 100%. Neste caso, embora ambas as técnicas de amostragem produzam estimativas de igual precisão para a probabilidade de exercício, as distribuições dos preços finais para o ativo objeto gerados com a Amostragem Descritiva são bem mais estáveis e precisas do que as obtidas com o uso da Amostragem Aleatória Simples.

Tanto o Gráfico 6a quanto a Tabela 1 mostram que, conforme o preço de exercício K aumenta, o erro padrão das estimativas diminui. Contudo, é necessário observar que o prêmio também cai fortemente com o aumento do preço de exercício, tornando mais adequada uma medida de precisão relativa.

Para melhor se avaliar a conveniência desta medida relativa, consideremos um erro padrão da ordem de \$ 0,10. Este erro poderia ser aceitável na compra de uma opção com valor da ordem de \$ 10,00, mas não o seria na compra de uma opção com valor da ordem de \$ 1,00. Por exemplo, ao se negociar \$ 1.000.000 da opção de \$ 10,00, uma precisão da ordem de 1% acarretaria num prejuízo potencial da ordem de \$ 10.000, ao passo que, uma precisão de 10% envolveria um prejuízo potencial da ordem de \$ 100.000. Esta consequência não é facilmente notada com medidas absolutas de erro. Como alternativa, uma medida adequada seria dada pelo coeficiente de variação, definido aqui como a razão entre o erro padrão e o valor do prêmio calculado analiticamente.

O Gráfico 8 apresenta o coeficiente de variação em função do preço de exercício para a modelagem com 50 dimensões (resultados similares são observados para outros níveis de dimensionalidade). Este gráfico deixa claro que a precisão relativa cai rapidamente com o aumento do preço de exercício (redução da probabilidade de exercício) e que, para valores de K razoavelmente baixos (a partir de 55 ou probabilidade de exercício menor ou igual a 50%), estimar o prêmio da opção com apenas 1000 observações não seria viável para a maioria das aplicações práticas. Convém aqui destacar que a maioria dos textos relativos ao apreçamento de opções através de simulação Monte Carlo sugerem um mínimo de 10000 observações por corrida de simulação.

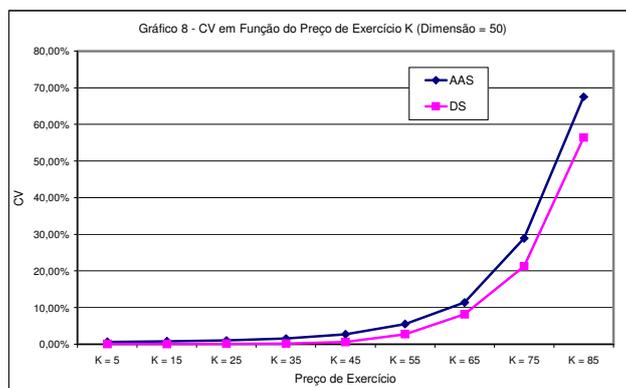


Gráfico 8.

Finalmente, para melhor avaliar o ganho da Amostragem Descritiva em relação à Amostragem Aleatória Simples em função da probabilidade de exercício, a Tabela 4 apresenta a razão entre o erro padrão das estimativas obtidas pela AD e pela AAS, para cada uma das nove opções, junto com a respectiva probabilidade de exercício dada por $N(d_2)$. Para

eliminar o efeito das modelagens com dimensões mais baixas ($dim \leq 5$), foi utilizada a média dos erros padrões para as modelagens de 6 até 100 dimensões. Os dados desta tabela foram traduzidos no Gráfico 9.

Tabela 4 – Valor de exercício (K), Probabilidade de exercício (Nd2) e a Relação entre os erros padrões das estimativas com a Amostragem Descritiva e a Amostragem Aleatória Simples.

K	Pr(Exercício)	E.P. da AD / E.P. da AAS
5	100,00%	11,4%
15	100,00%	11,4%
25	100,00%	11,4%
35	99,67%	11,9%
45	88,06%	24,5%
55	47,97%	54,7%
65	14,14%	82,1%
75	2,56%	95,1%
85	0,33%	96,6%

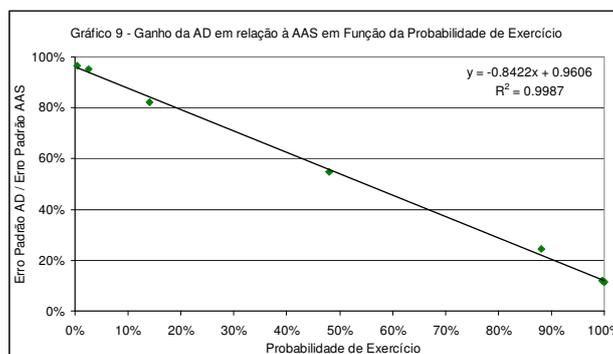


Gráfico 9.

O Gráfico 9 mostra que os ganhos da AD em relação à AAS dependem de forma aparentemente linear da probabilidade de exercício, sendo maiores (menor relação entre erros padrões) à medida que esta probabilidade aumenta. Uma possível explicação para este comportamento seria o fato de que, à medida que a probabilidade de exercício diminui, são utilizados menos pontos da amostra de preços finais gerados e, com isso, perde-se a vantagem do controle do conjunto que a Amostragem Descritiva proporciona. Neste caso, a taxa de perda de valores finais e a redução da probabilidade de exercício estão diretamente relacionadas, ou seja, com 50% de probabilidade de exercício só são utilizados 50% dos valores finais simulados.

4. Conclusões

Embora o uso de técnicas de redução de variância seja fortemente recomendado no apreçamento de opções por Monte Carlo (Charnes, 2000), desconhecemos estudos objetivando uma melhor compreensão de como estas técnicas de fato atuam e, principalmente, em que condições o seu uso é mais favorável. Neste aspecto, o presente

estudo chegou a dois importantes resultados que julgamos inéditos no caso de técnicas voltadas para o controle amostral, como é o caso da AD e da Amostragem por Hipercubos Latinos (AHL):

- a dimensionalidade do problema, exceto no caso mais simples com uma dimensão, não afeta os ganhos decorrentes do uso de técnicas que impõem um maior controle amostral, como é o caso da amostragem descritiva e, por extensão, da Amostragem por Hipercubos Latinos (Saliby, 1997);
- por outro lado, a probabilidade de exercício da opção tem forte influência no ganho de precisão a ser obtido com o uso destas técnicas de redução de variância, proporcionando elevados ganhos quando esta probabilidade é elevada (>0.50), porém com ganhos pouco expressivos quando esta probabilidade é baixa. Embora não relatado no presente trabalho, podemos antecipar que este comportamento se estende a outras opções que não as européias, como por exemplo as com barreiras e as asiáticas.

Desta forma, já sabemos que o uso das técnicas de redução de variância é vantajoso quando a probabilidade de exercício é elevada, mas o que fazer quando isto não ocorre?

Esta é uma nova linha de investigação a seguir, mas situações envolvendo eventos de baixa probabilidade ou mesmo raros são propícias ao uso de um outro tipo de técnica de redução de variância: a amostragem por importância, que direciona o esforço amostral nos pontos de maior interesse, forçando a ocorrência destes eventos e depois corrigindo adequadamente o resultado. Incidentalmente, é possível combinar o uso da amostragem por importância com a amostragem descritiva (Saliby & Gomes, 1994), proporcionando assim “o melhor dos dois mundos”. Esta linha de investigação será objeto de trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- (1) Araújo, M. (2001). Simulação de *Monte Carlo* para Cálculo do Var: o Uso da Amostragem Descritiva. 120p. Dissertação (Mestrado em Administração) – Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- (2) Banks, J.; Carson, J.S.II. & Nelson, B.L. (1996). *Discrete-Event System Simulation*. 2nd Edition. Prentice Hall.
- (3) Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**(3), 637-59, May.
- (4) Boyle, P.P. (1977). Options: A *Monte Carlo* approach. *Journal of Financial Economics*, **4**, 323-338.
- (5) Charnes, J.M. (2000). Using Simulation for Option Pricing. **In: Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference** [edited by J.A. Joines, R.R. Barton, K. Kang and P.A. Fishwick].
- (6) Hull, J.C. (1999). *Options, Futures and Other Derivatives*. Fourth Edition. Prentice Hall.
- (7) Marins, J.; Santos, J. & Saliby, E. (2003). Avaliação de Técnicas de Redução de Variância na Estimação do Prêmio de Opções de Compra do Tipo Asiática. *Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.

- (8) Moreira, F.F.P. (2001). Estudo Comparativo dos Métodos de Quasi-*Monte Carlo*, Amostragem Descritiva, Hipercubo Latino e *Monte Carlo* Clássico na Análise de Risco. 155p. Dissertação (Mestrado em Administração) – Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- (9) Saliby, E. (1997). Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling. **In:** *Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference* [edited by S. Andradóttir, K.J. Healy, D.H. Withers and B.L. Nelson].
- (10) _____ (1989). *Repensando a Simulação: A Amostragem Descritiva*. Ed. Atlas.
- (11) _____ (1990). Descriptive Sampling: A Better Approach to *Monte Carlo* Simulation. *Journal of the Operational Research Society*, **41**(12), 1133-1142.
- (12) Saliby, E. & Gomes, G.C. (1994). Sobre o Uso Conjunto da Amostragem por Importância e da Amostragem Descritiva em Simulação por Monte Carlo. **In:** *Anais do VII Congreso Latino-Ibero Americano de Investigación Operativa e Ingeniería de Sistemas* (VII CLAIO) [edited by M. Bosch and C. Ortiz, Universidad de Chile].
- (13) Saliby, E. & Moreira, F.F.P. (2002). An Empirical Evaluation of Sampling Methods in Risk Analysis Simulation: Quasi-*Monte Carlo*, Descriptive Sampling and Latin Hypercube Sampling. **In:** *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference* [edited by E. Yucesan, C-H Chen, J.L. Snowdon and J.M.Charnes].