

IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS NÃO-LINEARES DE SÉRIES TEMPORAIS ATRAVÉS DE REGRESSÃO LINEAR LOCAL E MODELOS ADITIVOS

Rosane M. Kirchner *

Departamento de Física, Estatística e Matemática
Univ. do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUI)
Ijuí – RS, Brasil
rosanek@unijui.edu.br

Reinaldo C. Souza

Departamento de Engenharia Elétrica
Pontifícia Universidade Católica (PUC-Rio)
Rio de Janeiro – RJ, Brasil
reinaldo@ele.puc-rio.br

Flávio A. Ziegelmann

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Porto Alegre – RS, Brasil
flavioz@ufrgs.br

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 07/2006; aceito em 02/2008 após 1 revisão

Received July 2006; accepted February 2008 after one revision

Resumo

Este estudo trata da utilização de uma metodologia para identificação da estrutura de séries temporais não lineares (ou lineares) baseada na estimação não e semi-paramétrica de curvas em modelos do tipo $Y_t = E(Y_t | X_t) + \varepsilon_t$, onde $X_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-d})$, $d=1, 2, \dots$. Aqui, a esperança condicional é estimada de modo totalmente não-paramétrico ou através de um modelo (semi-paramétrico) aditivo. Especificamente, a função desconhecida será estimada através de regressões lineares locais, via estimadores núcleo. Com a metodologia proposta, verificamos que a “função de dependência da defasagem” (FDD) e a “função de dependência parcial da defasagem” (FDPD) conseguem captar estruturas não-lineares em séries temporais, generalizando as tradicionais funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). Os estudos de simulação foram conduzidos de forma a avaliar e comparar a metodologia proposta com metodologias já existentes. Para dados reais a metodologia proposta foi exemplificada com uma série diária de preços da ação Petrobras PN.

Palavras-chave: séries temporais; regressão não-paramétrica; estimadores núcleo.

Abstract

This paper suggests an approach for the identification of the structure of both linear and non-linear time series through semi-parametric estimation of the unknown curves in models of the type $Y_t = E(Y_t | X_t) + \varepsilon_t$, where $X_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-d})$, $d=1, 2, \dots$. The conditional expectation is estimated either in a fully nonparametric fashion or via additive (semi-parametric) models. Specifically, the unknown function will be estimated by local linear regression, with kernel estimators. Under the proposed methodology, it was verified that the Lag Dependence Function (LDF) and the Partial Lag Dependence Function (PLDF) are capable of identifying non-linear structures in time series, generalizing the traditional autocorrelation and partial autocorrelation functions. The simulation studies were conducted to evaluate and compare the proposed methodology to traditional ones. The approach was illustrated with the study of the structure of a time series of prices of Petrobras PN'S shares.

Keywords: time series; nonparametric regression; kernel smoothing.

1. Introdução

Séries temporais são utilizadas como fonte de informação para o conhecimento da realidade e para a pesquisa científica por diversos setores da sociedade. Como exemplo podemos citar séries de finanças, demanda de energia, índice de produção, custo de vida, etc. A análise de séries temporais supõe que o conjunto de observações esteja sendo gerado por um processo estocástico e, como tal, possui uma estrutura probabilística que possa ser caracterizada e descrita. Logo, o estudo de séries temporais proporciona a descrição da natureza estocástica do processo que gerou a amostra de observações em estudo. Sendo assim, sua análise supõe que cada ocorrência $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_T$ da série seja obtida aleatoriamente com base em uma estrutura probabilística. As funções de autocorrelação (FAC) e de autocorrelação parcial (FACP) na análise clássica de séries temporais têm obtido grande aceitação na sua aplicação para identificação de estruturas lineares de séries temporais. Entretanto, para a identificação de estruturas não-lineares, esta metodologia não é suficiente. Um grande número de procedimentos tem sido sugerido para esta identificação. Granger & Lin (1994) usaram o coeficiente Kendall, τ , na generalização do coeficiente de correlação parcial; Chen & Tsay (1993) consideraram os algoritmos ACE e BRUTO para identificar modelos autorregressivos não-lineares aditivos; Friedman (1991) introduziu regressões multivariadas adaptativas também para modelagem de séries temporais autoregressivas não lineares. Há ainda muitos outros trabalhos, paramétricos e não paramétricos, focando em diversos tipos de não-linearidade: Tong (1990) faz uma revisão de vários modelos paramétricos, Fan & Yao (2003) oferecem uma revisão mais ampla, incluindo modelos não e semi-paramétricos, Ziegelmann (2002) sugere um estimador não-paramétrico de funções de volatilidade, etc.

O método deste estudo tem por objetivo contribuir para o aprimoramento de metodologias de identificação de estruturas de uma série temporal, tendo sido utilizado previamente em Nielsen & Madsen (2000). Sua vantagem é a de poder ser empregado para identificação de modelos lineares ou não lineares. Isto é feito através do uso de duas funções, a função de dependência da defasagem” (FDD) e a “função de dependência parcial da defasagem (FDPD)”, que de alguma forma generalizam as tradicionais funções FAC e FACP. A construção dos intervalos de confiança são via *bootstrap* (segundo Franco & Souza, 1998).

Neste artigo serão apresentados tópicos da fundamentação teórica das metodologias aplicadas para identificação da estrutura de séries temporais. Implementações numéricas serão apresentadas para um modelo ARMA (1,1) linear e para um modelo GARCH(1,1) não-linear, comparando os resultados com aqueles obtidos por metodologias já existentes. Este desenvolver-se-á do seguinte modo: a teoria sobre estimadores não e semi-paramétricos será apresentada na Seção 2; na Seção 3 a metodologia proposta de identificação é apresentada, enquanto na Seção 4 é feita a aplicação do método. Para finalizar, na Seção 5 será feito um resumo dos principais resultados deste estudo.

2. Estimação Não-Paramétrica: Regressão Polinomial Local

A abordagem de regressão não-paramétrica é uma alternativa menos restritiva para a estimação de uma curva desconhecida, pois permite maior flexibilidade do modelo subjacente. Um método amplamente utilizado para estes fins é o de regressão polinomial local, baseado em estimadores núcleo (ou *kernels*). Segundo este método, a função desconhecida é estimada através de uma regressão local. Neste caso, a função de interesse é aproximada localmente, via expansão de Taylor, até a ordem desejada. Em termos de

estimação, as observações mais próximas do ponto onde se deseja estimar a curva receberão um peso maior e as mais afastadas um peso menor.

Considere um processo estocástico bidimensional estritamente estacionário $\{(X_t, Y_t)\}$, onde X_t e Y_t são variáveis aleatórias unidimensionais em \mathfrak{R} . Para modelar a relação entre X_t e Y_t , considere a esperança condicional $m(x) = E(Y_t | X_t = x)$. Assim, podemos definir

$$Y_t = m(X_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

onde ε_t é uma variável aleatória com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$.

A idéia de ajuste da curva de regressão polinomial local é em cada ponto x encontrar a curva de regressão local (na vizinhança de x) de mínimos quadrados, isto é, encontrar $\hat{m}(x) = \hat{b}_0$, onde \hat{b}_0 resulta da solução do seguinte problema de minimização:

$$(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p) = \arg \min_{b_0, b_1, \dots, b_p} \sum_{t=1}^T \left\{ Y_t - \sum_{i=0}^p b_i (X_t - x)^i \right\}^2 K_h(X_t - x), \quad (2.2)$$

com $K_h(z) = \frac{1}{h} K(z/h)$, e $K(z)$ normalmente representando uma função densidade de probabilidade simétrica. No caso em que $p=1$, o qual é usado em nossas implementações numéricas, obtemos o chamado estimador *linear* local. A parcela da vizinhança importante para a estimação é determinada pela janela utilizada, ou parâmetro de suavização, denotado por h . Ele determina quão local será a estimação; pequenos valores de h resultarão em uma estimativa não suave, enquanto que valores muito grandes de h produzirão uma estimativa muito suave da curva de regressão. Neste trabalho, o parâmetro de suavização h é escolhido automaticamente com base na amostra, via método de validação cruzada, explicado na próxima seção.

Sob certas condições de regularidade, Fan & Gijbels (Teorema 5.2, p.196, 1996) estabelecem o vício e a variância assintótica de $\hat{m}(x)$, de ordens $O(h^{p+1})$ e $O(\{Th\}^{-1})$, respectivamente, além de derivarem sua normalidade assintótica.

2.1 Escolha da Janela h

A escolha do valor ótimo para o parâmetro de suavização, ou janela, h , é um ponto crucial para a obtenção de uma boa estimativa. Podemos dizer que a escolha de h determina a escolha do estimador, pois as estimativas variam consideravelmente em função de h .

Dentre os métodos de escolha de h propostos na literatura, destacam-se o método “plug-in”, originalmente proposto por Woodroffe (1970), o de validação cruzada, proposto por Rudemo (1982) e Bowman (1984) e as respectivas mudanças propostas por Chiu (1991). Em nosso estudo foi utilizado o método de validação cruzada. Este método é aplicado à regressão local, baseia-se em ignorar o ponto (x_t, y_t) ao estimar o valor da curva neste ponto. Assim, calculam-se erros (do tipo erro de previsão) para cada ponto da amostra, baseado nos $(T-1)$ pontos restantes. Determina-se então a soma dos quadrados dos erros oriundos da validação cruzada, a qual é dada por

$$CV(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ y_t - \hat{m}_h^{-t}(x_t) \right\}^2, \quad (2.3)$$

onde $\hat{m}_h^{-t}(x_t)$ é o estimador da curva de regressão com a t -ésima observação retirada (ver Fan & Gijbels, 1996). Assim o h selecionado é aquele que minimiza os erros de previsão fora da amostra.

3. Estimação Semi-Paramétrica: Modelos Aditivos

Quando o objetivo é usar um modelo não-paramétrico para descrever simultaneamente a dependência de uma variável aleatória Y em relação a d covariáveis, estamos diante de um problema multivariado. Neste sentido, a estimação de uma regressão não-paramétrica multivariada irrestrita é limitada pela característica multidimensional. Isto é devido à falta ou escassez de vizinhança local no espaço multidimensional, fenômeno conhecido na literatura como “curse of dimensionality”. Além de possíveis problemas computacionais, é conhecido na literatura que a taxa de convergência dos estimadores no caso multivariado é mais lenta e ainda aumenta à medida que d aumenta (ver Ruppert & Wand, 1994).

Para evitar este problema, pode-se reduzir o espaço em que se fará a estimação através de restrições na forma da função a ser estimada. Modelos e métodos interessantes têm sido propostos na literatura, tais como: modelos aditivos generalizados descritos extensivamente por Hastie & Tibshirani (1990), o método de Friedman & Tukey (1974), conhecido como *project pursuit regression* (PPR), os procedimentos de redes neurais desenvolvidos por Kuan & White (1994), entre outros. Ziegelmann (2003) explora vários modelos semi-paramétricos no contexto de séries temporais, como, por exemplo, modelos de coeficientes variáveis, modelos de índice único, modelos aditivos e modelos multiplicativos.

Considere $(T-d)$ observações de um processo estritamente estacionário de dimensão $(d+1)$ $\{(X_t, Y_t)\}$, onde $X_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-d})$ é um vetor aleatório de dimensão d em \mathcal{R}^d e Y_t é uma variável aleatória unidimensional em \mathcal{R} . Para modelar a relação entre Y_t e X_t , considere a esperança condicional $m(x) = E(Y_t | X_t = x)$. Assim podemos definir

$$Y_t = m(X_t) + \varepsilon_t, \quad t = d+1, \dots, T, \quad (3.1)$$

onde ε_t é uma variável aleatória com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$.

Em nosso estudo será considerado o modelo aditivo, o qual tem a seguinte forma:

$$Y_t = \alpha + \sum_{k=1}^d m_k(Y_{t-k}), \quad \text{para } t=d, d+1, \dots \quad (3.2)$$

onde $E(Y_t) = \alpha$, e as funções univariadas m_k , $k=1, \dots, d$, obedecem a condição $E[m_k(Y_{t-k})] = 0$, $\forall k$, para identificação.

O modelo aditivo é uma generalização de um modelo linear e, sendo assim, possui uma característica importante, o efeito de uma variável em uma superfície de resposta é aditivo em relação aos efeitos de qualquer outra variável. Em outras palavras, podemos verificar a contribuição individual de cada variável em prever a resposta. Além disso, os modelos

aditivos superam o problema descrito pelo termo “*curse of dimensionality*”, uma vez que o procedimento de estimação é construído sob suavizadores univariados, isto é, cada função m_k é estimada de modo univariado. Logo, o modelo aditivo generaliza o modelo de regressão linear múltipla com a função linear substituída por uma quantidade aditiva de funções univariadas.

Em termos de estimação, como dito acima, cada m_k é estimada não-parametricamente de modo univariado. Entretanto, deve existir uma relação de dependência entre as diversas estimativas individuais das d funções de modo a tornar o processo de estimação consistente. Esta conexão pode ser feita via o algoritmo *Backfitting* (ver Hastie & Tibshirani, 1990), o qual é usado neste trabalho. Outra alternativa encontrada na literatura é a chamada integração marginal, desenvolvida independentemente por Newey (1994), Tjostheim & Auestadt (1994), e Linton & Nielsen (1995). Recentemente, Kim & Linton (2004) desenvolveram o “live method” para a estimação de modelos aditivos generalizados de volatilidade.

4. Metodologia

A FAC e a FACP têm tido grande aplicação na identificação de séries temporais lineares. Como essas funções somente captam relações de linearidade, seu uso não é adequado para modelos não lineares. Assim, é proposto um método utilizando a estimação não-paramétrica de funções similares às FAC e FACP, o qual se adapta às características da amostra de maneira mais efetiva do que a sua contrapartida paramétrica, sendo capaz de captar as possíveis não linearidades do problema.

Considerando as sugestões de Nielsen & Madsen (2000) em definir o valor de cada defasagem, através da extração da raiz quadrada do coeficiente de determinação, resultante da aplicação de metodologias não-paramétricas, no presente estudo, são utilizados suavizadores não-paramétricos, baseados em estimadores núcleo. Deste modo, obtém-se uma transição contínua do caso linear para o não-linear.

Na metodologia, primeiramente deve-se estimar não ou semi-parametricamente a função $m(x) = E(Y_t | X_t = x)$ (ver função 2.2), através de estimadores locais lineares (ou polinomiais, no caso geral). Assim, serão estimadas curvas de regressão linear local através de mínimos quadrados “ponderados pela função núcleo”. O modelo pode representar a relação de Y_t por Y_{t-k} , $k=1, 2, \dots$, resultando em estimadores univariados totalmente não-paramétricos da curva de regressão desconhecida. Caso o modelo represente a relação entre Y_t e o grupo Y_{t-1}, \dots, Y_{t-d} , então utilizaremos modelos aditivos (ver função 3.2), para evitar a dificuldade da estimação não-paramétrica multidimensional, obtendo estimadores semi-paramétricos. Finalmente, na sequência, após a estimação da função desconhecida, seja ela univariada ou multivariada, é calculado o coeficiente de determinação associado à regressão local, cuja raiz representa a dependência, ou correlação não-linear entre as variáveis Y_t e Y_{t-k} . Se a função estimada é univariada, obtemos a FDD, versão não-linear da FAC. Caso ela seja multivariada, após realizarmos duas regressões, uma de Y_t pelo grupo $Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1}$, e outra de Y_t pelo grupo Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k} , obtemos a FDPD, versão não-linear da FACP.

A FDD e a FDPD são capazes de detectar relações não-lineares em uma série temporal, ampliando enormemente o alcance das funções FAC e FACP. Além disso, a FDD e a FDPD fornecem boas aproximações da FAC e da FACP, respectivamente, no caso linear. A representação gráfica também é muito semelhante àquelas usadas para FAC e FACP, apesar de os limites de confiança serem obtidos via *bootstrap* (Franco & Souza, 1998). Para calcular

a FDD pode-se ajustar uma regressão polinomial local univariada, enquanto que para o cálculo da FDPD é utilizado um modelo aditivo, de modo a evitar o “curse of dimensionality” intrínseco à natureza multivariada do suavizador.

4.1 Função de Dependência da Defasagem (FDD)

Sejam Y_1, Y_2, \dots, Y_T os valores observados da particular trajetória do processo estocástico estacionário $\{Y_t\}$. Para a determinação da FDD, realiza-se uma regressão linear local da variável Y_t por cada uma das defasagens, Y_{t-k} , $k=1,2,\dots,d$, obtendo-se um coeficiente de determinação, $R_{0(k)}^2$, para cada regressão. Logo a FDD na defasagem k , ou $FDD_{(k)}$, é calculada por (ver Nielsen & Madsen, 2000)

$$FDD_{(k)} = t\sqrt{R_{0(k)}^2}, \quad (4.1)$$

onde

$$t = \text{sinal}(\hat{m}_k(d) - \hat{m}_k(c)) \quad \text{e} \quad R_{0(k)}^2 = \frac{SQT_0 - SQR_{(k)}}{SQT_0},$$

com c e d representando o mínimo e o máximo, respectivamente, das observações da série temporal, e SQT_0 e $SQR_{(k)}$ representando a soma de quadrados total corrigida pela média e soma de quadrados residual do modelo com a variável Y_{t-k} , respectivamente. O sinal t é incluído para informar sobre a direção da inclinação média. A $FDD_{(k)}$ pode ser interpretada como a variação de Y_t que pode ser explicada por Y_{t-k} .

4.2 Função de Dependência Parcial da Defasagem (FDPD)

Na determinação da FDPD, é usada uma regressão semi-paramétrica através do modelo aditivo, cuja estimação se dá via o algoritmo *Backfitting*. Para uma série temporal $\{Y_1, \dots, Y_T\}$, a FACP amostral na defasagem k é denotada por $FACP_{(k)}$, ou $\hat{\phi}_{kk}$. Se as funções $m_k(\cdot)$, ($k=1, \dots, d$), no modelo aditivo, são restritas a serem lineares, então $\hat{m}_k(x) = \hat{\phi}_{kk}(x)$, e a $FDPD_{(k)}$ pode ser unicamente definida por $\hat{\phi}_{kk}$. Dado que a FACP na defasagem k é a correlação entre $(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-(K-1)})$ e $(Y_{t-k} | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-(K-1)})$, o quadrado da $FACP_{(k)}$ pode ser visto como $R_{0(k)|1, \dots, k-1}^2$.

Analogamente, pode-se então calcular a FDPD na defasagem k como (ver Nielsen & Madsen, 2000)

$$FDPD_{(k)} = t\sqrt{R_{0(k)|1, \dots, k-1}^2}, \quad (4.2)$$

$$\text{onde } t = \text{sinal}(\hat{m}_k(d) - \hat{m}_k(c)) \quad \text{e} \quad R_{0(k)|1, \dots, k-1}^2 = \frac{SQR_{(1, \dots, k-1)} - SQR_{(1, \dots, k)}}{SQR_{(1, \dots, k-1)}}.$$

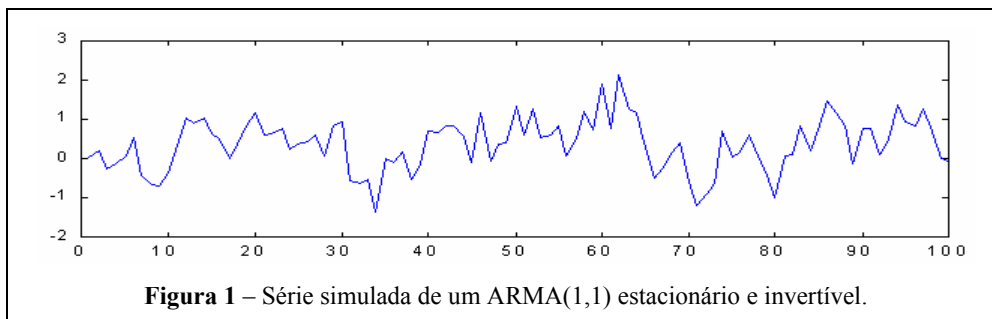
5. Resultados da Metodologia

A identificação da estrutura de modelos paramétricos lineares tem como base a análise da FAC e da FACP. A metodologia aqui proposta, como já citada anteriormente, tem a intenção de identificar modelos lineares ou não-lineares, utilizando modelos semi e não-paramétricos, de modo que a escolha da estrutura do modelo é baseada nos próprios dados. A condução do estudo transcorreu de forma a avaliar e comparar a metodologia proposta com metodologias já existentes. As séries utilizadas para o mesmo foram geradas de acordo com modelos ARMA(1,1) linear e GARGH(1,1) não-linear. Os códigos de programação para geração das observações e estimação das funções FDD e FDPD foram elaborados pelos autores no programa MATLAB (Os algoritmos podem ser disponibilizados quando solicitados aos autores no endereço eletrônico rosanek@unijui.edu.br).

Para o cálculo da FDD e FDPD foram utilizadas as técnicas de suavização não-paramétricas, a saber, regressão linear local, com função núcleo gaussiana. A escolha do valor ótimo para a janela h foi feita via método de Validação Cruzada. Os intervalos de confiança (conforme Franco & Souza, 1998) são de 95%, calculados através da metodologia *bootstrap* padrão, considerando a geração de 200 amostras *bootstrap* para as defasagens.

5.1 Aplicação em uma Série Linear

Consideremos um modelo ARMA(p,q) linear, onde $a_t \sim N(0,1)$ é um ruído branco. O modelo gerador ARMA(1,1) escolhido, dado por $Z_t = 0,8Z_{t-1} + a_t - 0,3a_{t-1}$, onde a_t é um ruído branco, é um modelo estacionário e invertível. A série simulada tem 100 observações e é representada na Figura 1.



Seguindo a análise, construindo os correlogramas através método tradicional e também através da metodologia proposta, constata-se que na FAC e na FDD ocorre um decaimento senoidal semelhante (conforme Figuras 2 e 3).

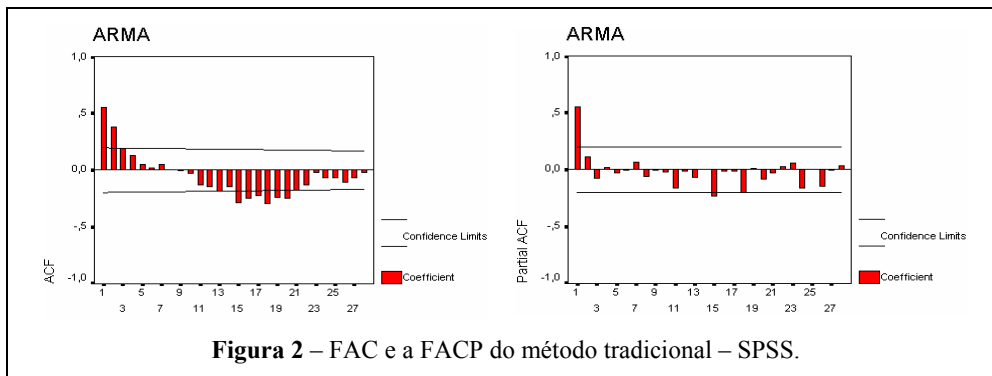


Figura 2 – FAC e a FACP do método tradicional – SPSS.

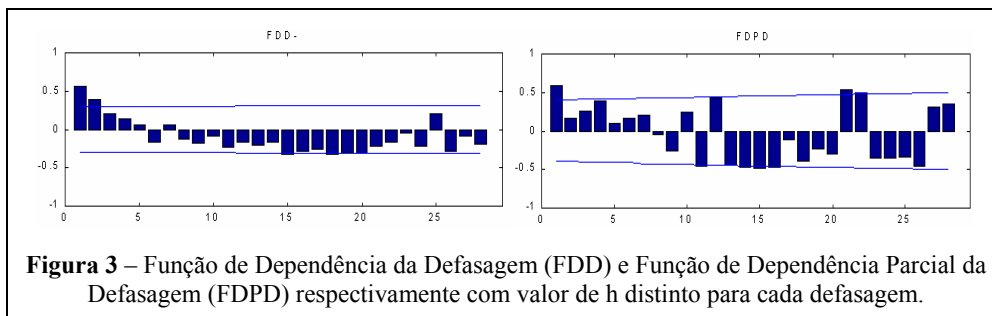


Figura 3 – Função de Dependência da Defasagem (FDD) e Função de Dependência Parcial da Defasagem (FDPD) respectivamente com valor de h distinto para cada defasagem.

Também as funções FACP e FDPD, na Figura 2 e na Figura 3, respectivamente, apresentam comportamento similar, com valores significativamente diferentes de zero para a defasagem de ordem 1, e com a aparente ausência de outras características importantes.

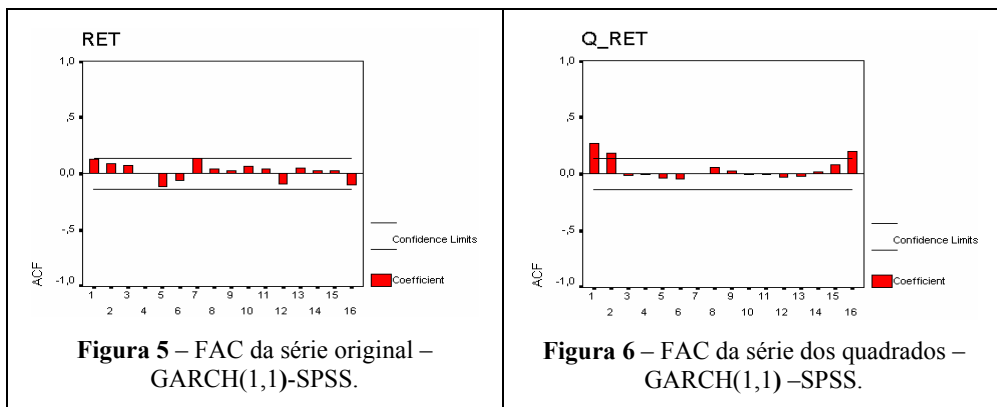
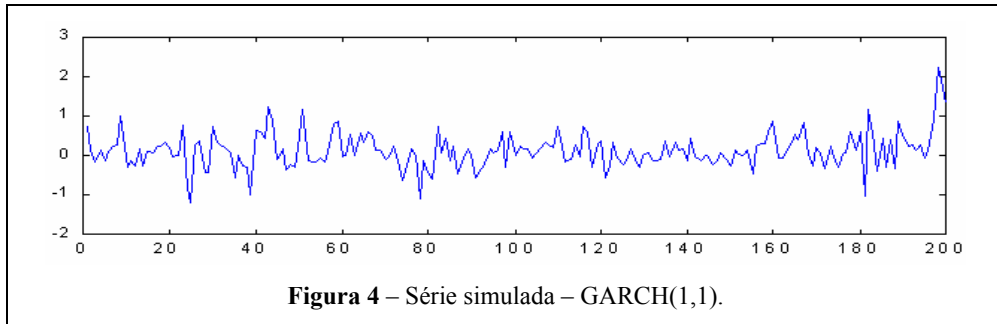
Concluindo, na comparação entre o método tradicional e o método proposto para esta série linear, verifica-se que os resultados são compatíveis. Portanto, pode-se sugerir que a FDD e a FDPD funcionam adequadamente no caso particular mais simples em que não há presença de não-linearidades.

5.2 Aplicação em uma Série Não-Linear

Grande parte do sucesso da gestão de investimentos está associada à habilidade de identificar, antecipadamente, o comportamento do risco. A heteroscedasticidade condicional em séries temporais é um fenômeno comum nas variáveis relacionadas ao mercado financeiro, sendo que a variância não condicional no período (t) passa a ser uma informação irrelevante para a compra ou venda de um ativo no período (t+1). O modelo GARCH (1,1) incorpora heteroscedasticidade condicional e será usado como modelo gerador neste estudo. Note que sua especificação é dada por $y_t = \sigma_t \varepsilon_t$ e $\sigma_t^2 = w + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$, onde y_t normalmente representa o retorno de um ativo. Os particulares valores usados em nossa simulação são os seguintes:

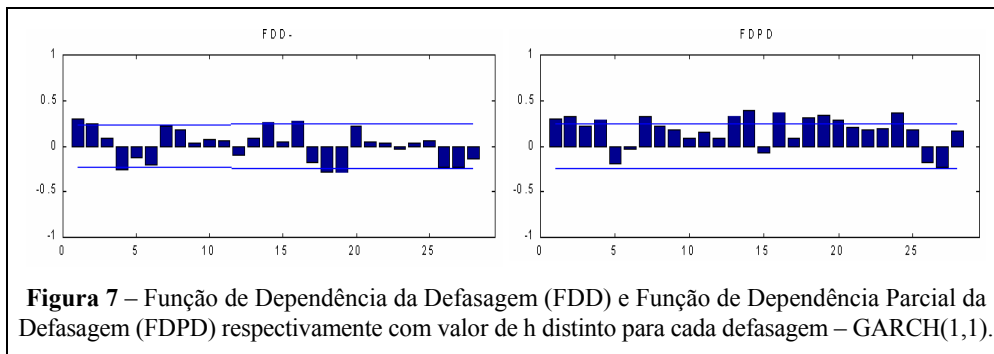
$$w = 0,0000013; \alpha_1 = 0,20; \beta_1 = 0,72. \text{ Foram geradas 200 observações.}$$

A seguir, na Figura 4, pode-se visualizar a série temporal com 200 observações geradas do modelo proposto acima.



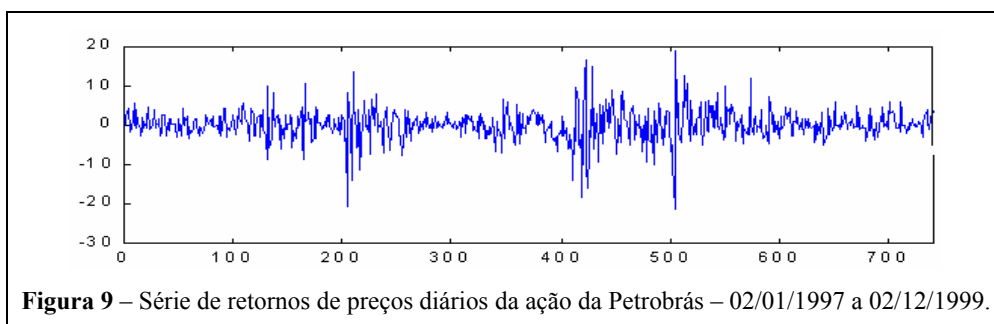
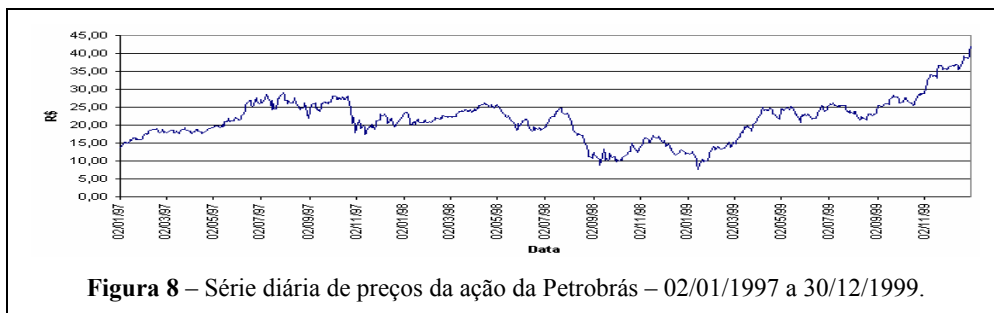
A Figura 5 mostra a FAC da série de retornos, onde todos os valores estão dentro dos intervalos de confiança, sugerindo que os retornos não são correlacionados. Já a Figura 6 mostra a FAC dos quadrados dos retornos, sugerindo que estes são correlacionados. A existência de dependência entre os quadrados dos retornos indica a necessidade de modelos de volatilidade.

Dando prosseguimento a análise, construíram-se as funções FDD e FDPD da série de retornos. Constatou-se a indicação de que a estrutura da série analisada através da metodologia proposta apresenta, dependendo do valor do parâmetro de suavização, uma dependência não linear na série de retornos, visto que o comportamento da FDD difere daquele da FAC. Note que os valores da FDD nas primeiras duas defasagens diferem significativamente de zero. Além disso, a FDPD também tem valores significativamente diferentes de zero para várias defasagens.



6. Aplicação em uma série do mercado financeiro

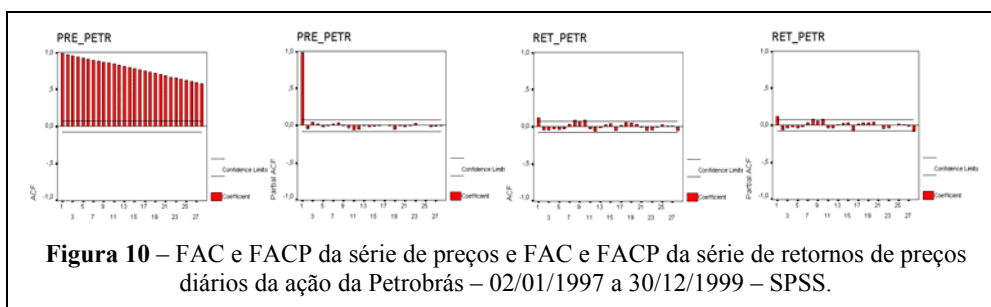
Por fim, é feita a análise da estrutura de uma série diária de preços da ação da Petrobrás PN, no período de 02/01/1997 a 30/12/1999. Os valores da série são em reais já ajustados a proventos e são observados somente nos dias úteis do mesmo período (excluindo-se os finais de semana e feriados). O total de observações é de 741, resultando em 740 retornos, onde o retorno y_t é definido por $y_t = \log(x_t/x_{t-1})$, com x_t representando o preço no instante t . Os gráficos das séries de preços e de retornos são apresentados nas Figuras 8 e 9.



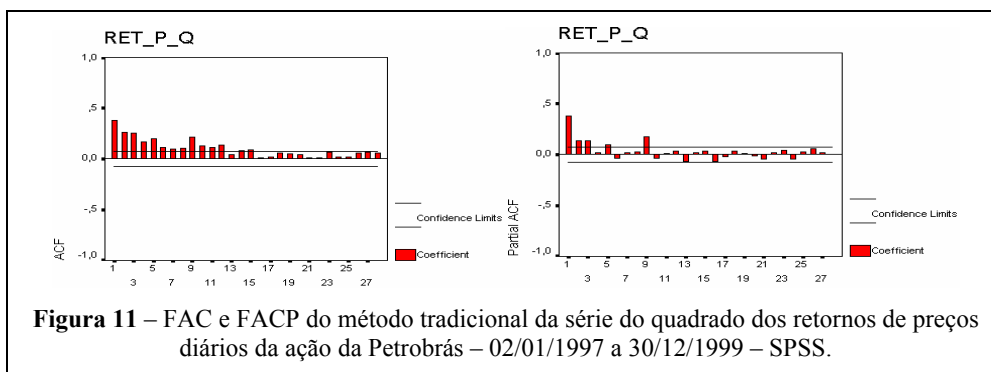
Observando os gráficos, pode-se dizer que a série de retornos parece oscilar em torno de um valor constante próximo de zero, enquanto que a série de preços tem características de um passeio aleatório. Percebe-se que a série de retornos apresenta períodos alternados de altas e

baixas variações, acusando a presença de *clusters* de volatilidade. Isto caracteriza a heteroscedasticidade da série de retornos, ou seja, a variância condicional não é constante ao longo do tempo.

Observando-se os gráficos da FAC e FACP dos preços na Figura 10, é marcante a característica de não-estacionariedade da série. Já, na mesma figura, a FAC e FACP da série de retornos mostram o seu caráter estacionário. A primeira defasagem apresenta autocorrelação significativa. Nas defasagens 8 e 10, os resultados podem ser espúrios. Mesmo com essa primeira defasagem significativa, observa-se que a série de retornos é quase um ruído branco, ou seja, indica a dificuldade de se encontrar uma estrutura linear para essa série.



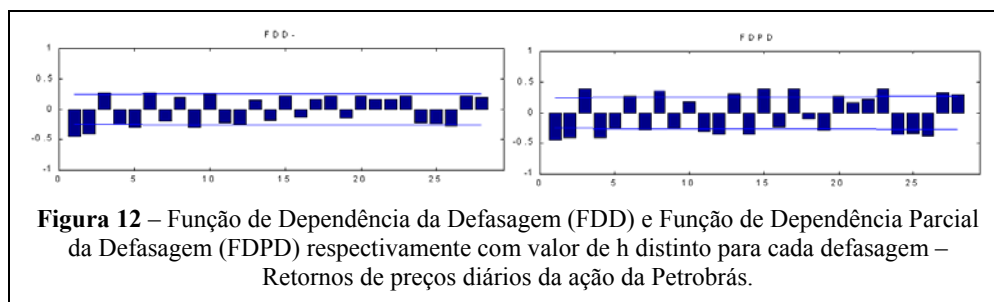
Como o gráfico da série de retornos sugere a ocorrência de *clusters* ou agrupamentos de volatilidade, este fato estilizado de séries financeiras pode ser entendido como um indicador de que a variância condicional dos retornos financeiros não é constante e deve possuir algum tipo de correlação serial, pois retornos altos (em valor absoluto) tendem a ser seguidos de mais retornos altos. Esta é a motivação dos modelos de volatilidade condicional autoregressiva. Na Figura 11, quando são calculadas as FAC e FACP da série de quadrados dos retornos, pode-se observar a indicação de uma dependência não linear.



A variância condicional em cada instante de tempo não é observada, mas assumindo retornos com média nula, é definida por $E_{t-1}(R_t^2)$, onde E_{t-1} indica o valor esperado condicional a toda a informação disponível até o instante $t-1$. Este comportamento das defasagens fornece a intuição necessária para perceber-se que o correlograma da série de quadrados dos retornos contém informações relevantes. Ao contrário da estrutura de dependência dos retornos, a

qual apresenta correlações fracas (apesar de significantes na defasagem 1, nesta série), os quadrados dos retornos são fortemente correlacionados. As autocorrelações, a partir da primeira defasagem, são significantes. A existência de dependência entre os quadrados dos retornos mostra a necessidade de um modelo para a volatilidade.

A seguir, construíram-se as funções FDD e FDPD da série de retornos, com o parâmetro de suavização h podendo assumir valores distintos para cada defasagem, utilizando o método de validação cruzada.



Novamente verifica-se que a estrutura da série analisada através da metodologia proposta indica a presença de uma dependência não-linear na série de retornos, visto que a significância obtida para a FAC parece ter sido amplificada.

A utilização deste método na análise de séries econômicas pode ajudar no processo de modelagem como exploratório ou confirmatório na identificação da estrutura do modelo.

7. Conclusão

Pode-se concluir que as metodologias paramétrica e não-paramétrica representam formas distintas de análise, levando a conclusões também distintas. As funções FDD e FDPD parecem ser capazes de generalizar as tradicionais FAC e FACP. Fazendo isto, estes métodos mostram-se robustos no sentido de captar estruturas não-lineares presentes em uma série temporal. Portanto, muitas vezes será possível obter orientações sobre a complexidade de um modelo simplesmente observando as funções FDD e FDPD. Além disto, técnicas não-paramétricas também podem ser usadas para verificar a validade de um certo modelo paramétrico proposto.

Logo, a metodologia aqui explorada vem a somar na análise da estrutura de séries temporais, porque os procedimentos usados poderão ser o estágio final de uma análise, ou simplesmente um mecanismo confirmatório ou exploratório do processo de modelagem.

Referências Bibliográficas

- (1) Bowman, A.W. (1984). An alternative method of cross-validation for smoothing of density estimates. *Biometrika*, **71**, 353-360.
- (2) Chen, R. & Tsay, R.S. (1993). Nonlinear Additive ARX Models. *Journal of American Statistical Association*, **88**(423), 955-967.

- (3) Chiu, S.T. (1991). Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation. *Ann. Statist.*, **19**, 1528-1546.
- (4) Fan, J. & Yao, Q. (2003). *Non-linear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. Springer-Verlag, New York.
- (5) Fan, J. & Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. Chapman and Hall, London.
- (6) Franco, G. da C. & Souza, R.C. (1998). *Bootstrap em Modelos Estruturais: Construção de intervalos de confiança e teste de hipóteses*. Tese de Doutorado em Eng. Elétrica, PUC-RJ.
- (7) Friedman, J.H. (1991). Multivariate Adaptive Regression Splines. *Annals of Statistics*, **19**(1), 1-67. (Discussion: pp. 67-141).
- (8) Friedman, J.H. & Tukey, J.W. (1974). A Projection Pursuit Algorithm for Exploratory Data Analysis. *IEEE Transactions on Computers*, **C-23**, 881-889.
- (9) Granger, B.C. & Lin, J.-L. (1994). Using the Mutual Information Coefficient to Identify Lags in Nonlinear Models. *Journal of Time Series Analysis*, **15**(4), 371-384.
- (10) Hastie, T.J. & Tibshirani, R.J. (1990). *Generalized Additive Models*. Chapman & Hall, London, New York.
- (11) Kim, W. & Linton, O.B. (2004). The live method for generalized additive volatility models. *Econometric Theory*, **20**, 1094-1139.
- (12) Kuan, C.M. & White, H. (1994). Artificial Neural Networks: An Econometric Perspective. *Econometric Reviews*, **13**, 1-91.
- (13) Linton, O.B. & Nielsen, J. (1995). A kernel method of estimating structured nonparametric regression based on marginal integration. *Biometrika*, **82**, 93-100.
- (14) Nielsen, H.A. & Madsen, M. (2000). A Generalization of Some Classical Time Series Tools. *Computational Statistics & Data Analysis*, **37**, 13-31.
- (15) Newey, W.K. (1994). Kernel estimation of partial means. *Econometric Theory*, **10**, 233-253.
- (16) Tjøstheim, D. & Auestadt, B.H. (1994). Nonparametric identification of nonlinear time series. *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1398-1409.
- (17) Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series*. Oxford University Press, Oxford.
- (18) Rudemo, M. (1982). Empirical Choice of Histograms and Kernel Density Estimators. *Scand. J. Statist.*, **9**, 65-78.
- (19) Ruppert, D. & Wand, M.P. (1994). Multivariate locally weighted least squares regression. *Annals of Statistics*, **22**, 1346-1370.
- (20) Woodroffe, M. (1970). On choosing a Delta-sequence. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 1965-1671.
- (21) Ziegelmann, F.A. (2002). Nonparametric Estimation of volatility functions: the local exponential estimator. *Econometric Theory*, **18**, 985-992.
- (22) Ziegelmann, F.A. (2003). Nonparametric and Semi-Parametric Methods in Time Series. X Escola de Séries Temporais e Econometria, São Pedro, SP.