Um Estudo de Álgebra Elementar com Balança de Dois Pratos

A Study about Elementary Algebra with Balance Scale

Eveline Vieira Costa*
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, Brasil

Resumo
Opondo-se à idéia de um ensino baseado na memorização mecânica sem compreensão das estratégias utilizadas para a resolução de problemas em sala de aula, este trabalho mostra uma experiência com alunos da sétima série do ensino fundamental no qual foi utilizada uma sequência didática com balança de dois pratos, tendo como respaldo o aporte teórico da escola francesa da didática da matemática. Nele traçamos um panorama geral dos aspectos relevantes desta escola e estabelecemos critérios para julgar os trabalhos de elaboração dos alunos, a fim de avaliar se eles chegaram ou não a compreender o sentido das estratégias aprendidas. Por fim fazemos uma avaliação da utilidade deste artefato cultural aqui utilizado como artefato instrucional.
Palavras-chaves: Didática da Matemática; Sequência didática; Balança de dois pratos.

Abstract
Despite the fact that in Brazil, schools rarely give attention to the importance of properly using strategies applied for mathematics in classroom, there are many works to show the importance of the ability in understanding them. One area of interest related to this issue is the didactic of mathematics in France. Here we give a panoramic vision of this area of study. This paper also analyzes a study of elementary algebra using a didactic sequence with balance scale to see if students make sense of the strategies learned. At the same time the usefulness of this cultural artifact used as an instructional aim is verified.
Keywords: Didactic of Mathematics; Didactic sequence; Balance scale.

Este trabalho tem por objetivo relatar uma pesquisa baseado em da Rocha Falcão (1993, 1995, 1996). Nele, foi criada uma sequência didática que em sua primeira etapa fez uso de uma balança de dois pratos usada na feira, contendo pesos de valores variados e sacos de alimentos de pesos diversos, como arroz, feijão, açúcar, farinha, etc. O objetivo de lidar com a balança real não foi a suposição de que os alunos eram equitativamente familiarizados com este artefato cultural, mas levar o aluno a utilizar seu conhecimento de torque e equilíbrio a fim de fazê-lo compreender posteriormente, a equivalência algébrica e a operação com incógnitas.

Empreendido sob o enfoque da educação matemática francesa, este trabalho fez uso de todo um aporte teórico peculiar. A pesquisa na área da educação matemática na França é chamada *didática da matemática*. No Brasil, a didática da matemática é confundida com a disciplina pedagógica de didática aplicada ao ensino da matemática.

Pais (2001) produz uma definição própria para significar a tendência francesa da educação matemática no Brasil: a didática da matemática é considerada uma área específica dentro da educação matemática que se prende tanto aos saberes escolares usados na prática pedagógica, quanto aos saberes produzidos na pesquisa acadêmica. Tal área se preocupa com a conexão entre a produção do saber matemático na academia e na sala de aula, vendo o fenômeno educacional como um *sistema didático* onde interatuam o *aluno,* o *professor* e o *saber.*

Brousseau (1996) considera que a vertente francesa não se circunscreve a uma didática generalista que serve a qualquer conteúdo. Ao contrário, propõe uma análise do saber matemático; do trabalho do matemático; do trabalho do professor de matemática e da atividade intelectual do aluno de matemática.

Mas o que é o saber matemático? Segundo esta vertente do estudo da matemática, trata-se, da criação de conceitos, descobertas de teoremas e demonstrações, sistematizados por uma redação validada pela comunidade matemática. A matemática que se produz dentro desta comunidade pode, no entanto, estar ligada a diferentes vertentes, das quais as mais eminentes são o platonismo e o formalismo. Segundo a visão mais radical, do platonismo, os objetos matemáticos são idéias puras e acabadas que pré-existem em uma realidade imaterial. Tais idéias são apenas descobertas e não, produzidas pelo aprendiz. O seu esforço redunda apenas na descoberta do que já existe.

* Endereço para correspondência: Universidade Federal Rural de Pernambuco, Depar-tamento de Educação, Rua Dom Manoel de Medeiros, s/n, Dois Irmãos, Recife, PE, Brasil, CEP 52171-900. E-mail: eveline_costa@uol.com.br

Outra vertente oposta é aquela que considera inadequado falar de uma realidade imaterial pré-existente dos objetos matemáticos. A matemática consiste em um jogo formal de símbolos, envolvendo axiomas, definições, teoremas e regras que permitem a dedução de sequências lógicas no processo produtivo. Os alunos produzem um formalismo que é aplicado aos problemas propostos compreensíveis dentro do contexto de sua produção. Aqui o problema da subjetividade aparece a partir do afastamento e aproximação destes formalismos, do fazer matemático dos matemáticos.

No processo de demonstração, o matemático apresenta sua formulação ao nível mais geral possível, eliminando etapas que não são necessárias para a compreensão final; a subjetividade na sala de aula, da mesma forma, tem o nível de generalização como uma última etapa que o professor deve chegar, partindo sempre dos aspectos específicos dos problemas em seu contexto de origem.

Seria conveniente fazer uma distinção entre o caráter objetivo do saber e o caráter subjetivo do conhecimento. O saber é o resultado de um conhecimento que chegou ao status de cientificidade. Pais (2001) afirma:

> Quando falamos no saber matemático, estamos nos referindo a uma ciência que tem suas teorias estruturadas em um contexto próprio, que não está na dependência de uma validação pessoal e isolada. Além da dimensão subjetiva, existe um processo de elaboração da objetividade, que se traduz por procedimentos valorizados pelo método lógico-dedutivo, que é entendido como uma forma de organizar o discurso matemático, sob o qual deve existir o fundamento de uma posição metodológica, reveladora de uma visão do mundo (p. 36).

Na situação didática, o escopo é passar de uma experiência particular, subjetiva, para uma generalidade prevista pelos paradigmas da área. A situação didática trabalha com a passagem do subjetivo para o objetivo e principalmente com o inverso. A passagem do objetivo para o subjetivo refere-se àquela do saber matemático dos matemáticos para o saber da sala de aula específica, com um professor específico e um conteúdo específico. O estudo desta passagem é chamada *transposição didática* (Chevallard, 1985). Esta se preocupa com questões como: *o que ensinar?* e, principalmente, *Como ensinar?,* bem como com os resultados oriundos destas decisões. É esta relação entre a teoria e a prática que também é estudada por Bachelard (1977) quando fala em *racionalismo aplicado*. Do estudo da relação entre o formalismo racional e o plano experimental advém o estudo dos *obstáculos epistemológicos* (Bachelard 1977, 1978, 1996), dificuldades relativas aos obstáculos gerados na construção do saber matemático pelo matemático. Por outro lado, existe o estudo dos *obstáculos didáticos* relativo às dificuldades oriundas da compreensão deste saber pelo aluno. A compreensão dos obstáculos didáticos facilita a superação dos conflitos cognitivos na formação dos conceitos.

Na formação dos conceitos matemáticos há que se considerar a teoria dos *campos conceituais* de Vergnaud (1988, 1992; Vergnaud & Cortes, 1986) que envolve simultaneamente as especificidades conceituais da epistemologia da matemática e da educação matemática. Disto advém o estudo das *situações didáticas* (Brousseau 1996). As situações didáticas se instauram a partir do que se chama de *contrato didático* que começa pela explicitação de suas regras na relação professor/aluno. Aquelas situações que fogem ao estabelecido são chamadas por ele de *efeitos didáticos* (Brousseau 1996). Para deixar mais claro os termos acima assinalados que fazem parte deste arcabouço teórico da didática francesa, fundamento do nosso estudo, vamos abordar cada um deles de forma a deixar explícita a sua importância dentro desta área de estudo.

Campos Conceituais

O saber escolar localiza-se entre o saber espontâneo (Vygotsky 1984, 1991, 1993), cotidiano do aluno e o saber científico. Dada uma situação de compra e venda, por exemplo, entende-se, a partir do saber científico, que nela estão relacionadas áreas de estudo como os números naturais e racionais, as estruturas aditivas e multiplicativas, etc. Cada uma destas áreas de estudo é chamada por Vergnaud (1988, 1992; Vergnaud & Cortes, 1986) de campo conceitual. Campo conceitual pode ser entendido como uma área determinada de conhecimento que se relaciona com uma atividade ou problema. Os campos conceituais relacionados com esta atividade ou problema se interpenetram devendo ser explicitados na situação didática, pois em cada um deles a criança percorre uma verdadeira construção com dificuldades específicas a serem superadas.

Para considerar a aquisição de um conceito relativo a um campo conceitual, segundo o autor em pauta, é preciso não desprezar as situações pelas quais a criança passa que tornam o conceito significativo para ela. É preciso também não desprezar, conforme o autor, os invariantes que permitem a transferência de velhos conhecimentos dos quais a criança tenta lançar mão na aquisição de novos conhecimentos. Os invariantes seriam assim como estruturas mentais comuns a um domínio específico. Este domínio pode estar situado na vida cotidiana ou na aprendizagem instrucional da sala de aula. Ainda é preciso não desprezar a representação lingüística ou não lingüística que é usada para apresentar o problema, discuti-lo e trabalhá-lo.

Os invariantes aos quais o autor se refere estão relacionados aos esquemas congnitivos piagetianos. No entanto, quando recorre a esquemas, o autor indica a maneira corriqueira que o indivíduo atua junto a uma classe de situações, fora ou dentro da escola, referente a campos conceituais comuns. Os esquemas para o autor comporta: (a) Os invariantes que permitem a transferência de uma situação à outra; (b) As inferências que permitem adaptar o esquema às características de uma nova situação; (c) As antecipações que permitem que o esquema passe a ter uma função na nova situação; (d) As regras de ação que permitem que o indivíduo atue adequadamente na nova situação.

Portanto para Vergnaud (1988, 1992; Vergnaud & Cortes, 1986) é importante conhecer os invariantes operatórios necessários à solução de problemas como aqueles necessários à resolução de equações do tipo ay + b = c, sendo c-b negativo, porque o professor estará de posse das dificuldades de adaptação de esquemas pré-existentes para esta nova situação. Estes esquemas pré-existentes relacionam-se com campos conceituais já assimilados. No caso, a passagem dos números inteiros positivos para os números racionais. É quando há a necessidade de superação destas passagens que a didática da matemática afirma que o sujeito precisa vencer um obstáculo epistemológico, ou mais propriamente falando da sala de aula, um obstáculo didático.

Obstáculos Epistemológicos e Obstáculos Didáticos

Os obstáculos epistemológicos são aqueles pelos quais se passa quando da evolução de um conhecimento pré-científico ao nível de reconhecimento científico. Estes obstáculos não ocorrem pela falta de conhecimento, mas, porque os conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem o detém. Para explicitar os obstáculos Bachelard (1996) analisou detalhadamente o desenvolvimento científico dos séculos XVIII e XIX comparados com a ciência moderna do século XX marcada pelo surgimento de diversos novos paradigmas, criando o que foi chamado de crise de fundamentos. Esta crise exigiu rupturas com as velhas formas de pensamento que caracterizavam as ciências dos séculos XVIII e XIX. No caso da matemática em particular não ocorreu rupturas com o saber estabelecido anteriormente. Sabemos, no entanto, por Lakatos (1978) que as rupturas parciais dos argumentos estabelecidos ocorrem abundantemente nos manuscritos dos matemáticos, ou seja, na fase de elaboração de um saber e não na apresentação final deste saber.

Obstáculos didáticos são aqueles por que passam os alunos na formulação dos conceitos matemáticos. É conveniente entender que os obstáculos epistemológicos por que passam os matemáticos podem se constituir obstáculos didáticos por que passam os alunos. O problema conforme indica Miguel e Miorim (2004) e Schubring (2000) é quando ocorre um falseamento do obstáculo, quando são forjadas pelo professor as mesmas dificuldades epistemológicas na formulação histórico-filosó-fica do conceito, na sala de aula, falseando uma dificuldade. Por isso mesmo, os obstáculos epistemológicos quando ocorrem na sala de aula devem ser chamados de obstáculos didáticos, indicando que são inerentes ao aprendiz na subjetividade da sua ocorrência. De fato, é interessante observar que a sala de aula é permeada por uma dimensão social e cultural, muitas vezes desdobrada no imaginário cognitivo do aluno. O avanço das idéias científicas pode ser ameaçado ou obstaculizado por concepções que predominam no imaginário cognitivo e que já não se aproximam mais da verdade reinante em outro momento e impedem a compreensão de um novo saber. O conhecimento antigo atua como uma força contrária à realização de uma nova aprendizagem. Neste caso, haverá a necessidade de uma ruptura epistemológica com os conhecimentos anteriores. Um exemplo de obstáculo didático pode ser a passagem da compreensão de números inteiros positivos para a compreensão de números racionais, ou ainda a divisão de um número inteiro positivo racional por um número racional menor do que um, que produz um resultado menor que o dividendo. A tarefa do professor passa a ser a compreensão dos obstáculos didáticos aos quais os alunos estão sujeitos, e a melhor forma de superá-los a partir de uma transposição didática adequada.

Transposição Didática

É a passagem dos campos conceituais tal qual estão elaborados nos textos científicos para a sala de aula. A transposição didática busca adequar o conhecimento científico ao nível do aluno, a fim de que este possa compreender de forma adequada um conhecimento que se mostra mais complexo do que a forma como é focado em sala de aula. Em outras palavras, pode-se dizer que a transposição didática é a transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar.

A transposição didática e a própria seleção dos conteúdos escolares ocorrem em um ambiente chamado de *noosfera* (Chevallard 1985) que sofre a influência de cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes. A *noosfera* influencia totalmente o sistema didático, portanto, os professores, os alunos e o saber. Em relação a este último, a influência abrange a escolha dos livros, softwares educativos, conteúdos escolares, etc.

A princípio há dois tipos de saberes a considerar: o científico e o escolar. O científico está presente nos centros de pesquisa e na academia e possui uma linguagem codificada, diferente da linguagem escolar. No ensino, ocorre exatamente a transformação da linguagem codificada em linguagem de sala de aula. Nela, muitas vezes necessita-se de recursos didáticos a fim de clarear e adequar o saber acadêmico a este ambiente. Por vezes ainda há a necessidade de criações didáticas específicas que requerem a simulação das descobertas acadêmicas já realizadas anteriormente.

Enquanto o saber científico é apresentado em livros, palestras científicas, teses, artigos e relatórios, o saber escolar é apresentado em livros didáticos, programas, criações didáticas, softwares educativos, etc.; enquanto o saber científico possui uma linguagem codificada, o saber escolar busca uma linguagem mais compreensível para o aluno. A transposição didática se preocupa com a passagem de um tipo de linguagem a outra.

Na questão da transposição do saber científico para o saber escolar, deve-se ter uma vigilância didática a fim de não deslocar a teoria original de sua formulação epistemológica. O cientista olha predominantemente para a fidelidade das questões epistemológicas com relação aos fatos científicos; o educador busca uma forma de tornar cognoscível o saber científico, transformando-o em saber escolar. O problema é quando o saber escolar perde o caráter filosófico-epistemológico do qual se originou. A transposição didática, ou seja, a passagem ou transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar está relacionada com o conhecimento do professor e também como o conhecimento que o aluno traz para a sala de aula, seu conhecimento prévio. Ela é a responsável pela dinâmica do que, nesta perspectiva, se chama de situações didáticas, onde interatuam o professor, o aluno e o conteúdo didático que será menos ou mais fiel ao seu caráter epistemológico.

Situações Didáticas

As situações didáticas são estruturadas a partir de campos conceituais e devem utilizar diversos instrumentos e estratégias de ensino diversificadas que influem no funcionamento do sistema didático. Um sistema didático é caracterizado fundamentalmente por um conteúdo específico, pelos alunos e pelo professor. O conteúdo da situação didática é o elemento que mais diferencia uma situação didática de outra. A forma de apresentação do conteúdo por si só se constitui um problema específico a ser considerado nas situações didáticas.

O objetivo de uma situação didática dentro de uma filosofia que privilegia a atitude ativa do aluno é desenvolver a sua autonomia intelectual (Piaget, 1880-1986/ 2006). Porém, mesmo que o professor programe exaustivamente sua aula há muitas situações que permanecem fora do controle pedagógico.

Brousseau (1996) chama de aprendizagem por adaptação a capacidade do professor de fazer o aluno assimilar e acomodar o saber, reformulando seus conhecimentos anteriores e adaptando-os à resolução de novos problemas. Na resolução de problemas o aluno passa por diversas situações classificadas como situação de ação; de formulação; de validação e de institucionalização.

Na situação de ação predomina o aspecto experimental e o aluno ainda não sabe justificar suas tomadas de decisões em relação à resolução do problema que são baseadas na intuição. Na situação de formulação ainda não há justificativas, mas tentativas de explicação sem a preocupação com a validação lógica das proposições. Na situação de validação há, então, uma preocupação com a veracidade das proposições apresentadas que gera o problema sobre a fundamentação filosófica na qual o aluno está fundamentado. É claro que esta validação lógica não tem o status de uma validação científica própria da comunidade matemática e deve-se restringir ao estabelecido no contrato didático com base na especificidade escolar. Porém, uma metodologia que incentiva o trabalho intelectual de refutação e justificação leva à elevação do nível intelectual dos alunos.

Por fim, a situação de institucionalização tem por objetivo chegar ao caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Neste nível, as subjetividades dão lugar ao saber histórico-social acordado pela comunidade científica. Não que elas devam ser negadas ou desprezadas, mas reestruturadas como resultado das etapas anteriores. Aqui o saber atinge o estatuto de convenções sociais reconhecidas pela comunidade acadêmica.

Todas estas situações didáticas podem se tornar infrutíferas caso não haja um cuidado por parte do professor em promover um contrato didático explícito a fim de expor as condições de trabalho a desenvolver com os alunos e garantir, desta forma, o comprometimento deste na passagem das situações de ação, mais próximas do senso comum, até a situação de institucionalização quando o conteúdo relacionado à situação didática atinge o nível desejado pela escolarização. É o contrato didático, no mais das vezes, que enseja uma boa situação didática.

Contrato Didático

O contrato didático diz respeito às regras e condições que regem o sistema didático e que são estabelecidas previamente. Porém, há regra e condições que surgem durante o processo. Ainda há quebra das regras e condições que evidenciam o contrato didático. Além disso, é importante lembrar que o conteúdo específico também condiciona o contrato didático. Por exemplo, o saber matemático possui uma especificidade própria como o formalismo, as regras, as refutações, provas e demonstrações que condicionam o contrato didático no ensino da matemática. As características próprias de cada professor também são fatores relevantes no estabelecimento do contrato.

A didática da matemática recomenda que as regras do contrato devam ser explicitadas no início de cada disciplina, porém Brousseau (1996) afirma que o estabelecimento da totalidade das regras é impossível e que o mais importante é perceber quando há rupturas. No desenrolar do trabalho estas regras podem estar esquecidas e surgem em meio às quebras do que foi anteriormente combinado entre o professor e os alunos. A ruptura do contrato pode se manifestar como o desinteresse dos alunos; quando o professor propõe problemas acima do nível de capacidade dos alunos; quando o professor aplica uma punição, etc.

Brousseau (1996) especifica três tipos de contratos didáticos. O primeiro se refere ao modelo tradicional de ensino. O professor detém o monopólio do conhecimento. O segundo tipo se refere à educação não diretiva. Nele, a ênfase é mais direcionada à relação entre o aluno e o saber; o aluno é o próprio agente de seu desenvolvimento; as aulas giram mais em torno de trabalhos em grupos e o professor procura não fazer muitas intervenções a fim de não atrapalhar. Como resultado, podem ocorrer confusões entre o conhecimento cotidiano e o saber escolar e a sistematização do conhecimento fica prejudicada. Ocorre ainda o caso intermediário no qual há forte ênfase no relacionamento do aluno com o saber, porém, o professor não deixa de estabelecer uma intervenção eficaz. É a partir destes tipos de intervenções que ocorrem os efeitos didáticos não esperados.

Efeitos Didáticos

Brousseau (1996) identifica cinco efeitos didáticos indesejáveis em sala de aula: o *efeito topázio,* o *efeito jourdain*, o *deslize metacognitivo*, o *efeito dienes* e o *efeito da analogia*. O *efeito topázio* refere-se à postura do professor em dar a solução do problema ao invés de levar o aluno à descoberta. O *efeito jourdain* diz respeito ao fato do professor supervalorizar a fala do aluno dando a entender que este já está de posse do conhecimento requerido. O *deslize metacognitivo* ocorre quando o professor dá uma explicação pessoal, não científica, a uma dificuldade posta pelo aluno, colocando esta explicação como científica. *Efeito dienes* refere-se à abrangência desta postura para a disciplina ensinada, quando esta se objetifica a partir da visão subjetiva do professor. Por fim, o *efeito da analogia,* que, como o próprio nome já afirma, advém da utilização de uma analogia a um fenômeno já conhecido pelo aluno dentro ou fora da escola. O uso de analogias é feito para facilitar o aprendizado, porém, ocorre muitas vezes uma super simplificação do que se quer aludir tendo em vista o artefato material, como no nosso caso utilizado. O artefato que utilizamos tinha por objetivo realçar um aspecto a ser ensinado. O problema com este tipo de efeito didático é a redução do que se quer enfatizar com a analogia apresentada. Neste trabalho vamos analisar se isto de fato ocorreu.

Relato da Pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública da rede metropolitana do Recife e contou com um grupo de 19 alunos da 7ª série do ensino fundamental com idades entre 12 e 15 anos, não iniciados em álgebra, que se constituiu o grupo experimental da pesquisa original (Costa, 1998). Foi ministrada uma sequência didática baseada em da Rocha Falcão (1993, 1995, 1996) constituída de sete etapas. A transposição didática instaurou situações didáticas específicas, porém, iremos relatar a uma das etapas após o uso de uma balança de dois pratos de feira como recurso didático, que se refere aos formalismos esquemáticos de equações com base na experiência com a balança referente à etapas anteriores.

Nas etapas anteriores os alunos foram levados a entender o sentido de torque e equilíbrio, quando da colocação e retirada de pesos e sacos de alimentos na balança. Este recurso didático teve o objetivo de fazer entender o sentido de equivalência algébrica entre os membros de uma equação e a retirada equivalente de termos de ambos os membros. Por esta ocasião, foi-lhes dado folhas com o desenho esquemático de uma balança, a fim de que os alunos configurassem as equações com uma e duas incógnitas apresentadas com a balança real. Foi pedido, então, que os alunos tentassem resolver as equações esquematizadas nestas folhas conforme o jogo de colocação e retirada de objetos na balança real. Em seguida, foi pedido que os alunos resolvessem as equações esquematizadas.

Antes do próximo encontro, foi constatado pela examinadora que os alunos pareciam não compreender o sentido da estratégia de ir retirando os termos dos membros da equação. Por este motivo, o estabelecimento de uma situação canônica, na qual uma incógnita deve ser equacionada a um valor encontrado, foi apresentada na reelaboração coletiva destes exercícios anteriormente realizados pelos alunos individualmente nas folhas esquematizadas.

Com a transcrição da videografia deste momento de reelaboração, ficou claro que o contrato didático explicitado pela examinadora era encontrar o valor de cada incógnita, tirando valores conhecidos iguais de cada membro das equações (pesos em gramas ou quilos), ou valores iguais desconhecidos (incógnitas representadas por figuras geométricas como quadrados, triângulos ou círculos, que, por sua vez, representavam os sacos de alimentos na balança real), até encontrar os valores referentes às incógnitas.

Para clarificar a nossa análise da videografia, estabelecemos, em seguida, perguntas a serem respondidas, que têm por objetivo saber se o alunos compreenderam a estratégia utilizada de retirar termos da equação, a fim de chegar a uma situação canônica, achando sua solução: (a) Este objetivo foi expresso pela examinadora no decorrer da sua fala?; (b) O que efetivamente ela fez?; (c) O que os alunos mostraram entender através das suas falas (analisada como um conjunto); (d) O que efetivamente eles realizam no papel?

Estes parâmetros serão analisados daqui para frente, até o estabelecimento de diversas relações possíveis entre eles, a fim de chegarmos a uma conclusão plausível.

Para começar, pode-se observar que a examinadora está preocupada com muitas outras coisas necessárias à resolução das equações, algumas das quais podem ser destacadas:

Mostrar a Diferença entre Coeficiente da Incógnita e um Valor Conhecido Qualquer

O episódio abaixo mostra claramente esta preocupação:

Equação $2Kg = \blacksquare + \blacksquare$

EXA: Olha gente, prestem atenção, prestem atenção aqui. Quando vocês têm assim, sacos de arroz, dois símbolos, duas incógnitas, uma mais a outra (apontando para os quadrados) é a mesma coisa de vocês terem assim, por exemplo 3 mais 3, por que? Porque é o mesmo símbolo, né? Então digamos que esse quadrado valesse 3, 3 + 3, isso não seria a mesma coisa? ... quanto é 3 + 3?

V/A: seis

EXA: Isso não seria a mesma coisa de dizer é 2 x 3? Quanto é 2 x 3?

V/A: Seis

EXA: Então, para não copiar o símbolo tantas vezes ele apareça, a gente pode indicar o número de vezes em que ele aparece, como 2 x 3.

Figura 1. Diferença entre coeficiente da incógnita e um valor conhecido qualquer

Notas. Legenda: EXA = examinadora; A = um aluno apenas; V/A = vários alunos; ... indica murmúrio indecifrável e as palavras em parênteses referem-se à ação dos sujeitos, ou comentários para exemplificar o ocorrido.

Mostrar que para Retirar os Termos dos Membros da Equação é Necessário Realizar Operações Inversas

Como mostra o episódio abaixo:

Equação: $500 = \blacksquare + 200$

EXA: O que a gente tá fazendo? A gente tá subtraindo daqui (aponta para o quinhentos) e daqui (aponta para os duzentos). Por que? Porque aqui está somando! Para vocês entenderem o que a gente fez eu vou escrever isso aqui. (Escrevendo no quadro $500\,(-200) = \blacksquare + 200(-200)$ Esse corta, corta é isso aqui (apontando para o quadro). 200 - 200 fica quanto?

V/A: Nada, zero.

EXA: 500 - 200 é quanto?

V/A: Trezentos.

EXA: Então (escrevendo no quadro $300 = \blacksquare$.

Figura 2. Realizar operações inversas para retirar os termos dos membros da equação

Mostrar que a Ordem dos Fatores Não Altera o Produto, mas a Retirada dos Fatores em Um Membro e Não em Outro, Altera a equivalência da Equação

Como mostra o episódio abaixo:

Equação: $\blacksquare + \blacksquare = 100 + \blacksquare$

EXA: Agora outro exemplo

A: Dois quadrados igual a cem mais quadrado

EXA: (escreve no quadro dois quadrados mais quadrado mais cem)

V/A: Não, é dois quadrados mais 100 mais quadrado.

EXA: Vejam aqui. Olhem bem! Tanto faz a gente somar 3 + 1 como 1 + 3, não é tudo 4? O que você não pode é mexer num lado da equação sem mexer no outro da mesma forma. Como é que a gente vai fazer isso aqui agora para achar o valor do quadrado?

A: tira 100 de um lado e um quadrado do outro.

EXA: por que?

A: porque cada quadrado tem cem gramas

EXA: Como é que você sabe de antemão que esse quadrado tem 100 gramas? Você primeiro precisa saber quanto vale este quadrado. Você está adivinhando! E se você não pudesse calcular assim de cabeça, você não poderia saber que ele tem 100g!

A: Tira os dois quadrados

EXA: Ela está dizendo que tira os dois quadrados, vocês concordam?

V/A: Concorda

EXA: Por que?

V/A:.. ... .
EXA: Porque eles são iguais e não vai alterar a equação, não é? É um valor igual de um lado e um valor igual do outro. A gente não sabe qual é o valor, mas sabe que ele é igual, porque é o mesmo símbolo. É um símbolo do mesmo valor, por isso a gente sabe que ele não vai alterar. É como na balança concreta, todo mundo concorda?
V/A: Sim
EXA: Então a gente vai subtrair ou dividir?
A: Subtrair
EXA: Por que? Porque está somando. A gente vai subtrair, vai tirar um quadradinho de cada lado. Então como é que fica?
V/A: quadrado igual a cem

Figura 3. Retirada dos fatores em um membro e não em outro, altera a equivalência da equação

Notamos que a examinadora começa a se aproximar do estabelecido verbalmente com a turma antes da resolução dos problemas no contrato didático inicial, ou seja, o estabelecimento da situação canônica, quando diz "*como é que a gente vai fazer isso agora para achar o valor do quadrado?*", no início do exercício. No entanto, a aluna encontra o valor do quadrado sem o estabelecimento da estratégia de equivalência, devido à simplicidade da equação, mas corresponde ao objetivo almejado que é encontrar o valor da incógnita, embora demonstrando não precisar da estratégia, quando diz "*tira cem de um lado e um quadrado do outro*". Desta forma, a examinadora segue ainda voltando a estabelecer a necessidade da compreensão de tal estratégia para o estabelecimento do resultado da equação (*Você primeiro precisa saber quanto vale este quadrado).* No final do episódio a examinadora volta a explicitar a necessidade da resolução da equação para achar o valor da incógnita, perguntando "*Então como é que fica?*", sinalizando a finalização do exercício de uma forma específica, quando os alunos respondem "*quadrado igual a cem*", estabelecendo a situação canônica.

Podemos dizer então, que, a partir deste episódio se estabelece, na resolução dos exercícios, a necessidade de mostrar que o objetivo é achar o valor das incógnitas, e segundo, que a estratégia de retirada dos termos é a estratégia que pode ser adotada para tal fim.

No episódio seguinte notamos mais uma vez a preocupação da examinadora em ressaltar o motivo da estratégia que parece difícil de perceber e de ser compreendida pelos alunos, no entanto, nele, já vemos uma autonomia dos alunos neste sentido:

Equação: $50 + \blacksquare = 20 + \blacksquare + \blacksquare$
EXA: (Anota o exemplo no quadro) O que a gente vai fazer aqui agora?
A: Tirar um quadrado de cada lado.
EXA: Ela está dizendo que a gente vai tirar os dois quadrados, vocês concordam? Hein? Vocês aí da galera?
V/A: Concorda
EXA: (Corta um quadrado de cada lado e copia em baixo $50 = 20 + \blacksquare$. Agora o que a gente vai fazer?
A: Já não equilibrou? Não era para equilibrar a balança?
EXA: Equilibrou, mas a gente quer saber quanto é que vale esses quadradinhos aqui (apontando para os quadradinhos)... E a equação ainda não se resolveu. A gente tem de tirar tudo que puder em cada lado da equação até chegar ao resultado, ou seja para saber quanto vale o quadrado, entendeu?

Figura 4. Objetivo último da estratégia

Quando observamos o esforço da examinadora em fazer entender o objetivo último da estratégia, os alunos se mostram ainda com dificuldade de transpor a manipulação real com a balança para a manipulação formal. Neste caso, vemos perfeitamente os alunos darem um passo adiante, compreendendo esta transposição, mas ainda sem a compreensão da necessidade de estabelecimento da situação canônica. Na fala da aluna, "*já não equilibrou? Não era para equilibrar a balança?*", esta parece regerse pelo objetivo único de equilibrar a balança real, anteriormente manipulada no começo da sequência didática. A situação de retirada dos termos para a resolução da equação parece ainda sem sentido para a aluna. Isto pode ser um exemplo do efeito de analogia provocado pelo uso da balança.

No decorrer do episódio, vemos a examinadora sempre um passo a frente de onde os alunos estão a partir da sua fala:

Equilibrou, mas a gente quer saber quanto é que vale esses quadradinhos aqui [apontando para os quadradinhos]... *E a equação ainda não se resolveu. A gente tem de tirar tudo que puder em cada lado da equação até chegar ao resultado, ou seja para saber quanto vale o quadrado, entendeu?.*

Podemos perceber que o episódio serviu para levá-la a explicitar mais uma vez que é preciso ir tirando tudo de um lado e do outro, a fim de conhecermos o valor do *quadrado*, deixando claro que é necessário isolar a incógnita de um lado igualando-a com o valor correspondente do outro.

Com o decorrer do processo, a partir do momento em que as equações vão se tornando mais complexas, os alunos passam realmente a sentir a necessidade da estratégia de tirar termos iguais de ambos os membros da equação para a resolução da tarefa:

Equação: $200 + 20 + \Delta + \blacksquare = \blacksquare + \Delta + \Delta + 10 + 100$
EXA: E agora gente?
V/A: Tira um triângulo de cada lado.
EXA: Só isso?
V/A: Tira um quadrado de cada lado
EXA: (Escreve no quadro $200 + 20 = \Delta + 10 + 100$ Posso tirar mais alguma coisa?
V/A: Tira 10 de cada lado
EXA: (Escreve no quadro $200 + 10 = \Delta + 100$. Posso tirar mais alguma coisa?
V/A: Tira 100 de cada lado
EXA: Cem e cem aqui (Escreve $100 + 10 = \Delta$) Cem com dez?
V/A: 110
EXA: Então 110 igual a triângulo.

Figura 5. Necessidade da estratégia de tirar termos iguais de ambos os membros da equação para a resolução da tarefa

É importante pontuar aqui que o exercício de explicitação continua subjacente durante o final do processo, fazendo-nos responder afirmativamente sim, às três perguntas que serviu de parâmetro de nossa análise: (a) a examinadora deixou explícito que o objetivo era a resolução das equações; (b) ela realmente agiu com base neste objetivo como mostram os episódios da série; (c) os alunos mostraram que de fato compreenderam a estratégia, conseguindo transpor a situação real para a situação formal e entenderam o motivo subjacente, ou seja, o estabelecimento da situação canônica, como mostrado abaixo:

Equação: $200 + \blacksquare + \blacksquare = \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare + 100$
EXA: Como é esse agora, gente?
V/A: Tira um quadrado de cada lado.
EXA: Um quadrado de cada lado, só?
V/A: Dois
EXA: Como é que ficou?
V/A: $200 = 100 + \blacksquare$
EXA: Agora eu faço o que, agora?
V/A: Tira 100 de cada lado
EXA: Fica como?
V/A: Cem igual a quadrado

Figura 6. Estabelecimento da situação canônica

Realçamos em sua fala as expressões "*Como é que ficou*?", e no final "*Fica como*?", mostrando uma preocupação, não só com a estratégia, como também com o objetivo dela. A pergunta "*Como é que ficou*?" poderia ser efetuada no final; bem como a pergunta "*Fica como*?" poderia ser efetuada no meio do processo, sem prejuízo do sentido da fala.

O que se observa é que os alunos estão aprendendo a realizar uma estratégia eficaz que só finaliza quando é achado o valor da incógnita. Nada indica que eles estejam utilizando esta estratégia de uma maneira mecânica, só porque a professora disse que daria certo. Mas seria este o caso? Apenas através desta análise do vídeo poder-se-ia dizer que eles estejam vendo o *como* se faz para chegar à solução final, mas será que eles estão entendendo que este *como* leva à solução final, ou seja, ao valor da incógnita? Pode-se dizer que eles sabem que é preciso tirar termos iguais de cada membro da equação porque uma equação indica uma equalização de termos? Será que eles sabem, por exemplo, que para achar o valor da incógnita sem adivinhar a resposta, é necessário agir desta maneira? Pode-se dizer que eles aprenderam analogicamente a noção de equivalência e a operar com incógnitas quando enfatizam o equilíbrio na balança e a retirada dos mesmos valores de cada membro da equação?

Vale à pena salientar que o fato de deixar explícito o objetivo da estratégia utilizada (estabelecer a situação canônica) não garante que os alunos soubessem chegar sozinhos aos mesmos resultados. Para certificar-nos disso foi transcorrida uma etapa final que consistiu em uma série de equações e problemas de igualdades, cuja modelização indicava dificuldades do mesmo nível de equações. O campo conceitual continuou a ser restrito a equações com uma e duas incógnitas.

A análise foi feita para saber se os alunos resolviam sozinhos as equações e problemas chegando a um resultado final, isolando a incógnita de um lado e equacionando-a a um valor encontrado do outro lado. Ou seja, para contrastar a fala dos alunos – que ora podiam indicar a falta de compreensão do sentido do processo, ora indicar que eles poderiam estar sendo guiados pela examinadora – e o que efetivamente eles realizavam no papel.

Muitos exemplos poderiam ser dados de respostas que indicam tal situação como esta:

10) $64 + \cancel{y} = \cancel{9}y$

$64 = 8y$

$y = 8$

Figura 7. Protocolo de um sujeito na resolução de uma equação com uma incógnita

Ou este, relativo a um problema mais complexo com duas incógnitas:

$10^{\underline{o}}$ $25\cancel{0}g + x = \cancel{200}g + 3x$

$50g + \cancel{x} = 3\cancel{x}$

$50g = 2x$

$25g = x$

Figura 8. Protocolo de um sujeito na resolução de uma equação com duas incógnitas

A partir destes exemplos, pode-se perceber que os alunos conseguiram chegar sozinhos aos resultados esperados, no entanto, se eles não mostram que conseguiram inferir o sentido do processo, muito menos o contrário, ou seja, que eles não conseguiram.

Considerações Finais

Este trabalho analisou parte de uma sequência didática com balança de dois pratos realizada em sala de aula com alunos não iniciados em álgebra. O objetivo desta análise era saber se os alunos de fato compreenderam o motivo pelo qual estava sendo-lhes ensinada uma estratégia para a resolução de equações. Entendemos que sim, dado que o objetivo último de uma avaliação como a que empreendemos, e seja ela qual for, é a autonomia dos alunos.

Os exemplos escolhidos para mostrar que os alunos aprenderam o sentido da estratégia utilizada no final do artigo foram bastante representativos. O motivo é que estamos diante de um tipo de resposta dada pela maioria deles. As situações subjetivas que indicaram dificuldades não foram o propósito destas ilustrações.

Para lidar com a questão voltada para a quantificação dos dados temos de nos referir ao trabalho original (Costa, 1998), no qual foi desenhada uma pesquisa com dois grupos: um grupo controle e um experimental. Foi realizado um pré-teste, onde o grupo experimental em questão estabeleceu uma situação desejável em torno de 85%, somadas equações e problemas *com uma única incógnita*. O gratificante foi que após a transposição didática referida neste trabalho, o grupo apresentou no pós-teste também em torno dos mesmos 85% de respostas satisfatórias, *agora com até duas incógnitas*.

A porcentagem de acertos de 85%, por si só, já é um número elevado, e isso nos leva a realçar a utilidade da balança de dois pratos. Será que ela nos ajuda na compreensão de conceitos? Mas amplamente falando, será possível nos utilizar de analogias que sejam compatíveis com os conceitos que se quer ensinar? Será que podemos driblar a situação embaraçosa, que estas analogias trazem, quando o aluno não sabe o que fazer com elas, quando não consegue chegar a um novo conceito que se almeja? Não parece que o caso da balança de dois pratos traga consigo uma dificuldade intransponível: olhando para o estudo original (Costa, 1998), no grupo controle a porcentagem de acertos antes da transposição didática foi de aproximadamente 92%, *com uma única incógnita*, com a transposição usual, a porcentagem de acertos do pós-teste, *com até duas incógnitas*, foi de aproximadamente 63%. A conclusão final a que se pode chegar é que, certamente, este artefato cultural pode levar a dificuldades na ultrapassagem do que ele é útil para o formalismo algébrico, mas não chega, ele próprio, a gerar um obstáculo epistemológico no sentido proposto por Bachelard (1996), mas, ao contrário, facilita a compreensão da equivalência algébrica a partir da noção de equilíbrio e torque.

Referências

Da Rocha Falcão, J. T. (1993). A álgebra como ferramenta de representação de problemas. In A. D. Schliemann, D. W. Carraher, A. G. Spinillo, L. L. Meira, & J. T. Da Rocha Falcão, *Estudos em psicologia da educação matemática* (pp. 85-107). Recife, PE: Editora da Universidade Federal de Pernambuco.

Da Rocha Falcão, J. T. (1995). A case study of algebraic scaffolding: From balance scale to algebraic notation. In *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 66-73). Recife, PE: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Da Rocha Falcão, J. T. (1996). *Proposições de sequências didáticas para o ensino de conceitos matemáticos: O caso da álgebra elementar*. Paper presented at the VI Simpósio da Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia, Friburgo, RJ.

Bachelard, G. (1977). *O racionalismo aplicado*. Rio de Janeiro, RJ: Zahar.

Bachelard, G (1978). *Os pensadores*: *A filosofia do não* (J. J. M. Ramos, Trad.). São Paulo, SP: Abril.

Bachelard, G (1996). *A formação do espírito científico*. São Paulo, SP: Contra-ponto.

Brousseau, G. (1996). Os diferentes papéis do professor. In G. Galvez, G. Brousseau, L. A. Santaló, P. Sadovsky, & R. Charnay (Eds.), *Didática da matemática: Reflexões psicopedagógicas* (pp. 48-72). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble, France: La pensée Sauvage.

Costa, E. V. (1998). *Ensino introdutório de álgebra elementar: Comparação entre um fragmento de sequência usual e uma sequência didática com balança de dois pratos para atividade em sala-de-aula.* Dissertação de Mestrado não-publicada, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento matemático*. Rio de Janeiro, RJ: Zahar.

Miguel, A., & Miorim, M. A. (2004). *Tendências em educação matemática: Vol. 10. História na educação matemática: Propostas e desafios*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Pais, L. C. (2001). *Tendências em educação matemática: Vol. 3. Didática da matemática: Uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Piaget, J. (2006). *Psicologia e Pedagogia* (9. ed., D. A. Lindoso & R. M. Silva, Trads.). Rio de Janeiro, RJ: Forense Universitária. (Original publicado entre 1980-1986)

Schubring, F. (2000). *Sobre o conceito de obstáculo epistemológico.* Paper presented at the I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Serra Negra, SP.

Vergnaud, G. (1988). Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.), *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education* (pp. 39-41). Budapest, Hungary: János Bolyai Mathematical Society.

Vergnaud, G. (1992). *The theory of conceptual fields.* Paper presented at the meeting of the 7th International Congress on Mathematical Education, Québec, Canada.

Vergnaud, G., & Cortes, A. (1986). Introducing algebra to "low-level" eighth and nineth graders. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 10th International Conference Psychology of Mathematics Education* (pp. 319-324). London: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Vygotsky, L. S. (1984). *A formação social da mente*. São Paulo, SP: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (1991). *Pensamento e linguagem*. São Paulo, SP: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (1993). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo, SP: Martins Fontes.

Recebido: 13/03/2009
1ª revisão: 01/07/2009
Aceite final: 06/08/2009