
ANÁLISE E SÍNTESE \mathcal{H}_∞ PARA SISTEMAS LPV

José de Oliveira*
oliveira@lcmi.ufsc.br

Alexandre Trofino†
trofino@lcmi.ufsc.br

Carlos E. de Souza‡
csouza@lncc.br

* Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, SC, Brasil

† Departamento de Automação e Sistemas
Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Brasil

‡ Departamento de Sistemas e Controle
Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC/CNPq, RJ, Brasil

ABSTRACT

This paper deals with the problem of \mathcal{H}_∞ performance for LPV systems. The \mathcal{H}_∞ performance index is based on a parameter dependent Lyapunov function with quadratic dependence on the parameters as well as on the system state. This stability notion is appropriate to deal with real parameters with magnitude and rate of change which are confined to a given convex region. Sufficient conditions based on LMI are developed for the \mathcal{H}_∞ performance analysis of LPV systems and designs of LPV controllers with guaranteed \mathcal{H}_∞ performance.

KEYWORDS: \mathcal{H}_∞ performance, LPV systems, LPV control, parameter-dependent Lyapunov functions.

RESUMO

Este artigo trata do problema de performance \mathcal{H}_∞ para sistemas LPV. O critério de performance \mathcal{H}_∞ é obtido empregando-se uma função de Lyapunov com dependência quadrática nos parâmetros do sistema. O critério de

performance usado admite que os parâmetros do sistema e suas respectivas taxas de variação sejam confinadas numa região convexa. Sob estas considerações obtém-se LMIs que apresentam condições suficientes destinadas aos casos de análise e síntese de sistemas LPV onde um critério de performance \mathcal{H}_∞ é otimizado.

1 INTRODUÇÃO

Dentro da classe de sistemas lineares variantes no tempo, aquela em que a variação temporal das matrizes do modelo de estado aparece como função de um dado vetor de parâmetros tem sido objeto de muito estudo nos últimos anos. Na literatura esta classe é conhecida como sistema lineares com dependência paramétrica (LPV). Os trabalhos em El Ghaoui e Scorletti (1996), Feron et al. (1996), Haddad e Bernstein (1991), Kapila et al. (1997), Shamma e Xiong (1995), Trofino e de Souza (1999) e Wang e Balakrishnan (1998) tratam desta classe de sistema.

Uma ferramenta usual para o estudo da estabilidade de sistemas LPV tem sido a função de Lyapunov, sendo que esta pode ou não apresentar uma dependência nos parâmetros do sistema. Neste contexto, foram pro-

Artigo submetido em 14/12/00

1a. Revisão em 24/09/01

Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. José Roberto Castilho Piqueira

postas noções de estabilidade tais como *quadrática* e *afim-quadrática* Feron et al. (1996), Haddad e Bernstein (1991), Kapila et al. (1997), Yu e Sideris (1997).

Recentemente em Trofino (1999) e Trofino e de Souza (1999), apresentou-se uma nova noção de estabilidade, chamada de bi-quadrática, onde a função de Lyapunov além de ser quadrática no estado é quadrática também no vetor de parâmetros $\theta(t)$. Esta nova noção de estabilidade mostra-se mais geral, pois engloba estabilidade quadrática e afim-quadrática como casos particulares.

Neste artigo objetiva-se apresentar formulações LMI que permitem tratar o problema de performance \mathcal{H}_∞ para sistemas LPV. O critério de performance \mathcal{H}_∞ será obtido resolvendo-se um problema de otimização convexa onde busca-se um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ . Serão desenvolvidas técnicas de análise e síntese de sistemas de controle \mathcal{H}_∞ e para tanto a noção de estabilidade empregada será a bi-quadrática. Apresentamos métodos de síntese por realimentação de estado onde a técnica proposta permite o projeto de controladores com dependência paramétrica afim, (controlador LPV) bem como controladores com ganhos fixos (controlador robusto), considerando respectivamente o caso de os parâmetros serem ou não disponíveis em tempo real.

Notação. $\mathfrak{R}^{n \times m}$ denota o conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$, I_r é a matriz identidade de dimensão $r \times r$, $X > 0$, onde $X \in \mathfrak{R}^{r \times r}$, indica que X é simétrica e positiva definida, \mathcal{L}_2 é o espaço de funções reais de quadrado integrável e $\|\cdot\|_2$ denota a norma em \mathcal{L}_2 .

2 ANÁLISE \mathcal{H}_∞

Seja o sistema linear variante no tempo descrito pela seguinte equação de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= C(\theta)x(t) + D_w(\theta)w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

com

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_0 + \mathcal{A}\Theta, & B_w(\theta) &= \mathcal{B}_w\Theta_w \\ C(\theta) &= \mathcal{C}\Theta_a, & D_w(\theta) &= \mathcal{D}_w\Theta_w \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1 I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ e $z(t) \in \mathfrak{R}^{n_z}$ são, respectivamente, os vetores de estado, distúrbio e de performance, A_0 , \mathcal{A} , \mathcal{B}_w , \mathcal{C} e \mathcal{D}_w são matrizes dadas de dimensões compatíveis e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \in \mathfrak{R}^{n_\theta}$ é um vetor de parâmetros reais, que podem variar no tempo.

Se supõe que estes parâmetros e suas respectivas taxas de variação possam assumir qualquer valor dentro de um politopo \mathcal{B} cujos vértices são conhecidos *a priori*.

Os resultados que serão apresentados ao longo deste trabalho fazem uso da noção de estabilidade bi-quadrática cuja definição é apresentada a seguir.

Definição 1 (Estabilidade bi-quadrática) Seja \mathcal{B} um politopo de vértices conhecidos representando os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. O sistema $\dot{x}(t) = A(\theta)x(t)$ é bi-quadraticamente estável se existe uma matriz simétrica $\mathcal{P}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ da forma:

$$\mathcal{P}(\theta) = P_0 + P_1\Theta + \Theta'P_1' + \Theta'P_2\Theta = \begin{bmatrix} I \\ \Theta \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I \\ \Theta \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1' & P_2 \end{bmatrix}, \quad P_1 \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x n_\theta}$$

tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\theta) > 0 \\ \dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'(\theta)\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)A(\theta) < 0. \end{cases}$$

Note que estabilidade bi-quadrática implica que o sistema $\dot{x}(t) = A(\theta)x(t)$ é exponencialmente estável para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ e $V(x, \theta) = x'\mathcal{P}(\theta)x$ é uma função de Lyapunov com dependência quadrática nos parâmetros e no estado do sistema.

Definição 2 ($\|G_{zw}\|_\infty$) Admita que o sistema (1) seja exponencialmente estável para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ e seja G_{zw} o operador entrada/saída de $w(t)$ para $z(t)$ de (1). Então define-se a norma \mathcal{H}_∞ do operador G_{zw} , ou do sistema (1), como sendo

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{\substack{w \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0 \\ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}}} \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, x(0) = 0 \right\}.$$

Note que $\|G_{zw}\|_\infty$ representa o ganho induzido pela norma \mathcal{L}_2 de sinais.

Em seguida apresentaremos um teorema que estabelece condições suficientes para a determinação de um limitante superior para $\|G_{zw}\|_\infty$.

Teorema 1 Seja o sistema (1) e \mathcal{B} um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a

notação $\Psi =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\Theta}'_a P & 0 & 0 & C'(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_a P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P\dot{\Theta}_a & P\Theta_a & 0 & 0 & P\Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_a P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -A(\theta) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta_a & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C(\theta) & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -B_w(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -D_w(\theta) \end{bmatrix}$$

$$C_a = [\Theta \quad -I].$$

Então, dado um escalar $\gamma > 0$, o sistema (1) é bi-quadraticamente estável e $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$, se existem matrizes $P' = P$, M e L tais que as LMIs

$$\Psi + M\Phi + \Phi'M' < 0 \quad (4)$$

$$P + LC_a + C'_a L' > 0 \quad (5)$$

são factíveis em todos os vértices do politopo \mathcal{B} . Além disso, $V(x, \theta) = x'\Theta'_a P\Theta_a x$ é uma função de Lyapunov para o sistema (1) com $w \equiv 0$.

Prova: Admita que as LMIs (4) e (5) sejam satisfeitas em todos os vértices do politopo \mathcal{B} . Como estas desigualdades são afins em $(\theta, \dot{\theta})$, elas são satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$.

Visto que $C_a \Theta_a = 0$, então de (5) obtém-se

$$\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a > 0. \quad (6)$$

Agora define

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A(\theta) & 0 \\ \Theta_a & 0 \\ C(\theta) & 0 \\ 0 & B_w(\theta) \\ 0 & D_w(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (7)$$

e note que $\tilde{\Phi}\tilde{\Phi} = 0$. Além disso, de (4) obtém-se

$$\tilde{\Phi}'\Psi\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{12} & a_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'(\theta)\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)A(\theta) + C'(\theta)C(\theta) \\ a_{12} &= \mathcal{P}(\theta)B_w(\theta) + C'(\theta)D_w(\theta) \\ a_{22} &= D'_w(\theta)D_w(\theta) - \gamma^2 I. \end{aligned}$$

Multiplicando (8) à direita por $t = [x' \quad w']'$ e à esquerda por t' , decorre que

$$\begin{aligned} &x'\dot{\mathcal{P}}(\theta)x + [A(\theta)x + B_w(\theta)w]'\mathcal{P}(\theta)x \\ &\quad + x'\mathcal{P}(\theta)[A(\theta)x + B_w(\theta)w] \\ &\quad + [C(\theta)x + D_w(\theta)w]'[C(\theta)x + D_w(\theta)w] - \gamma^2 w'w < 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$\dot{V}(x, \theta) + z'z - \gamma^2 w'w < 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (9)$$

onde $V(x, \theta) = x'\mathcal{P}(\theta)x$ e $\dot{V}(x, \theta)$ é calculado ao longo da trajetória de (1). Fazendo $w \equiv 0$ em (9), segue que $V(x, \theta)$ é uma função de Lyapunov para o sistema (1) com $w \equiv 0$, e, logo, este sistema é bi-quadraticamente estável.

Integrando (9) de 0 à T , com a condição inicial $x(0) = 0$, obtém-se

$$V(x(T), \theta(T)) + \int_0^T (z'z - \gamma^2 w'w) dt < 0.$$

Como $V(x(T), \theta(T)) > 0, \forall T > 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$, conclui-se que

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$$

o que completa a prova. $\nabla\nabla\nabla$

O Teorema 1 permite encontrar o valor mínimo do limitante superior para $\|G_{zw}\|_\infty$. Este limitante é obtido numericamente resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa com restrições do tipo LMI

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \{\gamma^2\} \\ &\text{sujeito à (4)-(5)}. \end{aligned}$$

3 CONTROLE \mathcal{H}_∞

Seja o sistema linear variante no tempo descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w(\theta)w(t) + B_u(\theta)u(t) \\ z(t) &= C(\theta)x(t) + D_w(\theta)w(t) + D_u(\theta)u(t) \end{aligned} \quad (10)$$

com

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_0 + \mathcal{A}\Theta, & B_w(\theta) &= \mathcal{B}_w\Theta_w, \\ B_u(\theta) &= \mathcal{B}_u\Theta_u, & C(\theta) &= \mathcal{C}\Theta_a, \\ D_w(\theta) &= \mathcal{D}_w\Theta_w, & D_u(\theta) &= \mathcal{D}_u\Theta_u \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1 I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_w} \end{bmatrix}, \quad \Theta_u = \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ \theta_1 I_{n_u} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_u} \end{bmatrix}$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ e $z(t) \in \mathfrak{R}^{n_z}$ são, respectivamente, os vetores de estado, entrada, distúrbio e de performance, A_0 , \mathcal{A} , \mathcal{B}_w , \mathcal{B}_u , \mathcal{C} , \mathcal{D}_w e \mathcal{D}_u , são matrizes dadas de dimensões compatíveis e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \in \mathfrak{R}^{n_\theta}$ é um vetor de parâmetros reais, que podem variar no tempo.

O sistema (10) é considerado como um sistema linear com dependência paramétrica do tipo LPV, onde $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, n_\theta$, estão disponíveis em tempo real, contudo, suas trajetórias não são conhecidas *a priori*. A única informação conhecida *a priori* é que os valores de $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$, para todo $t \geq 0$, pertencem ao polítopo conhecido \mathcal{B} . Neste caso, objetiva-se projetar um controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim que garanta um limitante superior prescrito para a norma $\|G_{zw}\|_\infty$ do sistema realimentado.

A lei de controle que procuramos é do tipo

$$u = K(\theta)x, \quad K(\theta) = K_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i \theta_i \quad (13)$$

Apresenta-se a seguir uma solução para o problema de controle acima.

Teorema 2 Seja o sistema (10) e \mathcal{B} um polítopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a notação¹

$$\Psi_c = \begin{bmatrix} \Lambda & * & * & * \\ B_u(\theta)F_a & 0 & * & * \\ 0 & B'_w(\theta) & -\gamma^2 I_{n_w} & * \\ CW + D_u(\theta)F_a & 0 & D_w(\theta) & -I_{n_z} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} \Theta'_a & -I_{n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$\Lambda = WA'_a + A_a W + LC_a + C'_a L'$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\theta} + \Theta A_0 & \Theta \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad C_a = [\Theta \quad -I].$$

¹O símbolo '*' indica sub-matrizes acima do bloco diagonal principal em matrizes bloco-diagonais simétricas

Então, dado um escalar $\gamma > 0$, existe uma realimentação de estado do tipo (13) tal que o sistema em malha fechada é bi-quadraticamente estável e $\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$, se existem matrizes $W > 0$, F_a , L , M e N tais que as seguintes condições são satisfeitas em todos os vértices do polítopo \mathcal{B} :

$$\Psi_c + M\Phi_c + \Phi'_c M' < 0 \quad (14)$$

$$NC_a = C_a W. \quad (15)$$

Neste caso, as matrizes de ganho da lei de controle (13) são dadas por

$$[K_0 \quad K_1 \cdots K_{n_\theta}] = F_a W^{-1} \quad (16)$$

e $V(x, \theta) = x' \Theta'_a W^{-1} \Theta_a x$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Prova: Como as condições (14) e (15) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ e são satisfeitas em todos os vértices de \mathcal{B} , por convexidade elas são satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$.

Considerando que $W > 0$ e definindo $P = W^{-1}$, obtém-se

$$P(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a > 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}.$$

Agora defina

$$\tilde{\Phi}_c = \begin{bmatrix} I_{(n_\theta+1)n_x} & 0 & 0 \\ \Theta'_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} \quad (17)$$

e note que $\Phi_c \tilde{\Phi}_c = 0$. Então de (14) obtemos

$$\tilde{\Phi}'_c \Psi_c \tilde{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} & * & * \\ B'_w(\theta)\Theta'_a & -\gamma^2 I_{n_w} & * \\ CW + D_u(\theta)F_a & D_w(\theta) & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

onde

$$\hat{\Lambda} = WA'_a + A_a W + LC_a + C'_a L' + \Theta_a \mathcal{B}_u \Theta_u F_a + F'_a \Theta'_u \mathcal{B}'_u \Theta'_a$$

Como W é inversível e C_a tem posto completo por linhas, temos que N também é inversível. Assim define $\tilde{L} = W^{-1}LN^{-1}$ e note que $LC_a = W\tilde{L}NC_a$. Note ainda que $C_a \Theta_a = 0$ e de (15), obtém-se que $W\tilde{L}NC_a P \Theta_a = 0$. Além disso, considerando (13) e (16) pode-se estabelecer que $F_a P \Theta_a = K(\theta)$. Logo, multiplicando (18) à direita por

$$T = \begin{bmatrix} P\Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}$$

e à esquerda por T' , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_c & * & * \\ B'_w(\theta) \mathcal{P}(\theta) & -\gamma^2 I_{n_w} & * \\ C_c & D_w(\theta) & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

onde

$$\begin{aligned} A_c &= A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta) \\ C_c &= C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta). \end{aligned}$$

Aplicando o complemento de Schur à desigualdade (19) obtemos

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b'_{12} & b_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

onde

$$\begin{aligned} b_{11} &= \dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_c + C'_c C_c \\ b_{12} &= \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) + C'_c D_w(\theta) \\ b_{22} &= D'_w(\theta) D_w(\theta) - \gamma^2 I_{n_w} \end{aligned}$$

Multiplicando (20) à direita por $t = [x' \ w']'$ e à esquerda por t' , decorre que

$$\begin{aligned} &x' \dot{\mathcal{P}}(\theta) x + [A_c x + B_w(\theta) w]' \mathcal{P}(\theta) x \\ &+ x' \mathcal{P}(\theta) [A_c x + B_w(\theta) w] \\ &+ [C_c x + D_w(\theta) w]' [C_c x + D_w(\theta) w] - \gamma^2 w' w < 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$\dot{V}(x, \theta) + z' z - \gamma^2 w' w < 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (21)$$

onde $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta) x$ e $\dot{V}(x, \theta)$ é calculado ao longo da trajetória do sistema (10) em malha fechada com a lei de controle de (13) e (16). Fazendo $w \equiv 0$ em (21), segue que $V(x, \theta)$ é uma função de Lyapunov para o sistema (10) em malha fechada com $w \equiv 0$, e, logo, este sistema é bi-quadraticamente estável.

Integrando (21) de 0 à T , com a condição inicial $x(0) = 0$, obtém-se

$$V(x(T), \theta(T)) + \int_0^T (z' z - \gamma^2 w' w) dt < 0 \quad (22)$$

Como $V(x(T), \theta(T)) > 0, \forall T > 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$, (22) implica que

$$\|G_{zw}\|_\infty < \gamma$$

o que completa a prova. $\nabla \nabla \nabla$

O Teorema 2 fornece um método de projeto de sistemas de controle \mathcal{H}_∞ , com dependência paramétrica afim, para sistemas lineares variantes no tempo do tipo LPV.

O método proposto é baseado na solução de um problema do tipo LMI, e como tal, pode ser resolvido numericamente de maneira eficiente via métodos de otimização convexa. Note que a lei de controle que minimiza o limitante superior para a norma $\|G_{zw}\|_\infty$ utilizando-se o método do Teorema 2 pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \{\gamma^2\} \\ &\text{sujeito à (14)-(15)}. \end{aligned} \quad (23)$$

No caso em que alguns parâmetros não são disponíveis “on-line”, eles não poderão aparecer na lei de controle (13). Neste caso os elementos das matrizes K_i correspondentes aos parâmetros θ_i não disponíveis “on-line”, são assumidos como nulos. Note no Teorema 2, que a lei de controle admitirá as matrizes K_i nulas, se as partições correspondentes da matriz F_a em (16) forem zeradas e a matriz W admitir uma estrutura bloco diagonal. Observe ainda, que a remoção dos parâmetros da lei de controle, não implica em removê-los da função de Lyapunov, mantendo-se assim as condições de robustez desejadas.

Uma característica interessante da lei de controle apresentada em (13) é que ela possui uma dependência paramétrica afim, o que facilita a implementação “on-line”, quando comparada às técnicas de controle cuja dependência paramétrica é não linear.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresenta-se a seguir resultados de simulações para os casos de análise e síntese obtidos a partir das soluções das LMIs apresentadas nos Teoremas 1 e 2. Os resultados de simulações apresentados foram obtidos empregando o software Scilab.

Exemplo 1.

Consideremos o problema de análise \mathcal{H}_∞ para o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= C(\theta)x(t) + D_w(\theta)w(t) \end{aligned} \quad (24)$$

onde

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -1 - 1.3\theta & 0.5 - 20\theta \\ -1 + 2\theta & -2 - 10\theta \end{bmatrix},$$

$$B_w(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + 2.2\theta & -4 + 0.5\theta \\ -1 - 6\theta & -1 - 5\theta \end{bmatrix},$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_w(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 1 mostra os valores de γ obtidos de (23) considerando que $\theta \in [0, 1]$ e $\dot{\theta} \in [-10, 10]$, e utilizando-se as seguintes noções de estabilidade: quadrática, afim-quadrática e bi-quadrática. Observe que os dois primeiros casos podem ser obtidos do Teorema 1 impondo-se as seguintes restrições na matriz P em (4): $P_1 = 0$ e $P_2 = 0$ no caso de estabilidade quadrática, e $P_2 = 0$ para estabilidade afim-quadrática. Note ainda que no caso de estabilidade quadrática, $\mathcal{P}(\theta)$ fica independente do parâmetro θ .

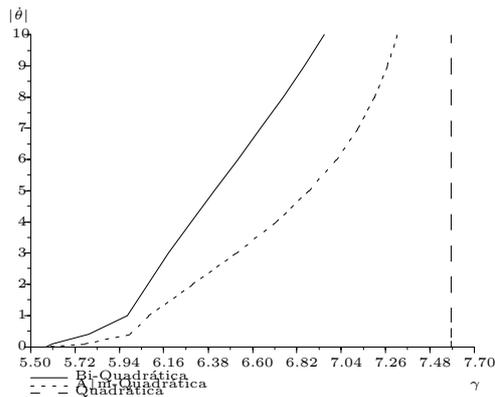


Figura 1: Valor minimizado de γ em função de $|\dot{\theta}|$ para $\theta \in [0, 1]$

Exemplo 2.

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C(\theta)x(t) + D_w(\theta)w(t) + D_u(\theta)u(t) \end{aligned} \quad (25)$$

onde

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -4.1 - 3\theta & 1 \\ -2\theta & 2 - 3.2\theta \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} -0.03 & -0.47 \end{bmatrix}', \quad C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_u(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_w(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considere o caso de projeto de um controlador por realimentação de estados que estabilize o sistema (25) e atenda ao critério de performance \mathcal{H}_∞ para θ satisfazendo $|\theta| \leq 4$ e $|\dot{\theta}| \leq 5$. Inicialmente considere o caso em que o parâmetro θ não seja disponível “on-line”. Neste caso, o parâmetro θ não pode ser utilizado na lei de controle. Utilizando o Teorema 2, obtém-se que o ganho de realimentação que fornece o menor limitante superior γ^* para $\|G_{zw}\|_\infty$ é dado por

$$K_0 = \begin{bmatrix} -0.25842 & -15.95282 \end{bmatrix}$$

e $\gamma^* = 1.980828$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta) = x' \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix}' W^{-1} \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix} x \quad (26)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} 1.27184 & 0.25512 & 0 & 0 \\ 0.25512 & 0.18175 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.27184 & 0.25512 \\ 0 & 0 & 0.25512 & 0.18175 \end{bmatrix}.$$

Considere agora o caso em que o parâmetro θ é disponível “on-line”, ou seja, θ poderá ser utilizado na lei de controle, resultando assim uma realimentação de estado com dependência paramétrica. Utilizando o Teorema 2, obtém-se que a realimentação de estado LPV que fornece o menor limitante superior γ^* para $\|G_{zw}\|_\infty$ é dada por

$$u(t) = (K_0 + \theta K_1)x(t)$$

onde

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.11642 & -18.84973 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.80044 & 2.34783 \end{bmatrix}$$

e $\gamma^* = 1.7708326$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (26) com

$$W = \begin{bmatrix} 1.73861 & 0.23114 & 0 & 0 \\ 0.23114 & 0.14490 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.73861 & 0.23114 \\ 0 & 0 & 0.23114 & 0.14490 \end{bmatrix}.$$

5 CONCLUSÕES

Neste artigo abordou-se o problema de performance \mathcal{H}_∞ para sistemas variantes no tempo do tipo LPV. Atendendo a este critério obteve-se formulações LMI para os problemas de análise e síntese utilizando uma noção de estabilidade conhecida como bi-quadrática.

Apresentou-se exemplos numéricos onde foi possível observar, para o caso de análise, que um menor conservativismo foi obtido quando a noção de estabilidade bi-quadrática é empregada. Isto se justifica pelo fato que estabilidade bi-quadrática é mais geral que estabilidade quadrática e afim-quadrática, sendo estas duas últimas casos particulares da primeira.

Com relação ao problema de síntese, a técnica proposta permite o projeto de controladores com dependência paramétrica afim, bem como controladores com ganhos fixos.

Note que a restrição de igualdade $NC_a = C_aW$ que aparece na solução do problema de síntese do Teorema 2, implica em uma restrição de estrutura do tipo blocodiagonal na matrix da função de Lyapunov, o que pode conduzir a resultados conservativos. Uma maneira de reduzir o conservativismo imposto pela condição de igualdade (15), seria substituí-la por $N\hat{C}_a = C_aW$, onde \hat{C}_a é uma função afim em θ , com a mesma dimensão de C_a . Neste caso deve-se também substituir C_a por \hat{C}_a em (14). Ainda é possível considerar \hat{C}_a como uma matriz fixa dada e a matriz simétrica N como uma função afim de θ . A melhor escolha de \hat{C}_a que pode conduzir a resultados menos restritos é um problema que ainda requer estudos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- El Ghaoui, L. e Scorletti, G. (1996). Control of rational systems using linear-fractional representations and LMIs, *Automatica* **32**(9): 1273–1284.
- Feron, E., Apkarian, P. e Gahinet, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**: 1041–1046.
- Haddad, W. M. e Bernstein, D. S. (1991). Parameter dependent Lyapunov functions, constant real parameter uncertainty and the popov criterion in robust analysis and synthesis, Parts 1 and 2, *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, UK.
- Kapila, V., Haddad, W., Erwin, R. e Bernstein, D. (1997). Robust controller synthesis via shifted parameter-dependent quadratic cost bounds, *Proc. 1997 American Control Conf.*, Albuquerque, NM.
- Shamma, J. S. e Xiong, D. (1995). Control of rate constrained linear parameter varying systems, *Proc. 34th IEEE Conf. Decision and Control*, New Orleans, LA.
- Trofino, A. (1999). Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: An LMI approach, *Proc. 38th IEEE Conf. Decision and Control*, Phoenix, AZ.
- Trofino, A. e de Souza, C. E. (1999). Bi-quadratic stability of uncertain linear systems, *Proc. 38th IEEE Conf. Decision and Control*, Phoenix, AZ.
- Wang, F. e Balakrishnan, V. (1998). Improved stability analysis and gains scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems, *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, Tampa, FL.
- Yu, J. e Sideris, A. (1997). \mathcal{H}_∞ control with parameter-dependent Lyapunov functions, *System & Control Letters* **30**(9): 57–69.