SÍNTESE H_∞ PARA SISTEMAS COM RESTRIÇÕES ALGÉBRICAS NO ESTADO

K. A. Barbosa*
karinab@das.ufsc.br

A. Trofino *
trofino@das.ufsc.br

* Depto. de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900 Florianópolis, SC, BRASIL

ABSTRACT

In this paper we consider the H_∞ control problem for systems with algebraic constraints in the states. The discrete and continuous time cases are considered. Necessary and sufficient LMI conditions are presented for state feedback control problems, and only sufficient LMI conditions for output feedback. The results are also extended to cope with systems having algebraic constraints and politopic uncertainties.

KEYWORDS: Descriptor System, LMI, H_∞ control

RESUMO

Neste artigo considera-se o problema de síntese H_∞ de sistemas com restrições algébricas em tempo discreto e contínuo. Condições necessárias e suficientes descritas como Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) são apresentadas no caso de realimentação de estados, e apenas suficientes para o caso de realimentação de saída. Apresenta-se também métodos para a síntese de controladores H_∞ para o caso de sistemas algébricos diferenciais sujeito a incertezas politópicas.

PALAVRAS-CHAVE: Sistema descritor, LMI, controle H_∞

1 INTRODUÇÃO

Sistemas com restrições algébricas ou sistemas descritores são modelados matematicamente por um conjunto de equações algébricas e diferenciais e aparecem com freqüência em diversas áreas, como por exemplo, sistemas robóticos (Krishnan and McClamroch, 1994), sistemas de potência (Hill and Mareels, 1990; Scavone et al., 1998) e sistemas econômicos (Leontief, 1953). Nas últimas décadas, o desenvolvimento da teoria de controle para esta classe de sistemas tem tido uma grande atenção, veja por exemplo Cobb (1984), Lewis (1986), Barbosa and Trofino (2002), Takaba et al. (1994), Wen and Yaling (1993), Bender and J.Laub (1987), e referências destes.

O problema de rejeição de perturbação também vem sendo amplamente estudado com a publicação de diversos trabalhos, entre eles pode-se citar o caso de custo quadrático dado em Bender and J.Laub (1987) e os critérios de norma H_2 e H_∞, que são geralmente resolvidos através de uma equação de Riccati generalizada, no caso contínuo, dado por Takaba et al. (1994), Wen and Yaling (1993); e no caso discreto, por Chen and Lee (1999).

Com o avanço dos recursos computacionais e a publicação de importantes trabalhos na área de otimização, técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para a solução do problema H_∞ no contexto de sistemas apenas diferenciais vêm sendo amplamente estudadas (veja por exemplo Gahinet and Apkarian (1994); Boyd et al. (1994)).

No caso de sistemas com restrições algébricas, cita-se o trabalho de Masubuchi et al. (1997) que resolve o problema H_∞ através de desigualdades lineares, partindo da definição de estabilidade dada em Takaba et al. (1994) para sistemas a tempo contínuo. Nesta referência os resultados envolvem restrições de desigualdades não estritas, o que torna mais custoso a busca de soluções numéricas. O resultado proposto

Artigo submetido em 20/12/00
1a. Revisão em 13/8/2002; 2a. Revisão em 10/4/2003
Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. Liu Hsu

em Uezato and Ikeda (1999) busca eliminar a necessidade da condição de igualdade do resultado, obtendo assim condições LMIs estritas para a solução do problema.

Propõe-se aqui uma solução para o problema H_∞ através de LMIs de uma forma similar ao resultado proposto por Masubuchi et al. (1997). Porém, as condições agora são obtidas através do Lema de Finsler (Boyd et al., 1994), sendo possível descrevê-las como desigualdades estritas. Condições necessárias e suficientes são propostas para o caso de síntese H_∞ via realimentação de estados em tempo contínuo e discreto. O problema de realimentação de saída também será considerado e, neste caso, as condições propostas são apenas suficientes. O resultado é aplicado também a sistemas incertos, com incertezas politópicas.

O artigo está estruturado da seguinte forma. Na seção 2 definem-se matematicamente sistemas com restrições algébricas e norma H_∞. Na seção 3, o problema H_∞ para sistemas com restrições algébricas a tempo contínuo é abordado, o caso discreto é tratado na seção 4. Uma aplicação numérica é apresentada na seção 5. Comentários finais são apresentados na seção 6.

A seguinte notação é usada no artigo: assume-se que

$$Co\,[\Omega_i]_{i=1}^{q} \triangleq \left\{ \Omega : \Omega = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \Omega_i,\ \alpha_i \geq 0 : \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1 \right\}$$

representa um politopo convexo de vértices Ω_i dados e que as desigualdades matriciais do tipo $P > 0$ (P$\geq$ 0) indicam que a matriz P é positiva definida (positiva semi-definida), isto é, simétrica com todos os autovalores positivos (positivos ou nulos). Em uma matriz simétrica, o símbolo $*$ é usado para representar os elementos que podem ser deduzidos por simetria.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se o seguinte sistema na forma algébrico-diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & J_1 x + J_2 z + B_u u + B_w w \\ 0 & = & J_3 x + J_4 z \\ z_2 & = & C_z x + D_{wz} w + D_{uz} u \end{array} \right. \qquad (1)$$

onde $x \in R^n$ é o vetor de estados, $z \in R^m$ é a variável algébrica, $u \in R^{n_u}$ é a variável de controle, $w \in R^l$ é a variável de perturbação e $z_2 \in R^q$ é a saída ou sinal de desempenho.

Definição 2.1 (Sistema Admissível) O sistema (1) é dito ser admissível se a matriz J_4 for inversível. $\diamond\diamond$

Segundo Verghese et al. (1981), J_4 inversível é uma condição necessária e suficiente para garantir a regularidade do sistema (1) e que este seja livre de modos impulsivos. Conseqüentemente, a Definição 2.1 implica que um sistema admissível é um sistema regular e livre de modos impulsivos. Neste artigo assume-se que o sistema (1) é admissível.

Agora considere G_{wz_2} como sendo o operador de entrada e saída entre a variável de perturbação w e a variável de desempenho z_2 em malha fechada do sistema nominal da Figura 1. Note que no caso de sistemas sem incertezas o operador G_{wz_2} representa a função de transferência do sistema em malha fechada. Suponha ainda que o sistema em malha fechada é internamente estável.

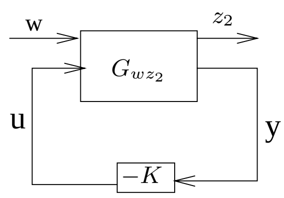

Figura 1: Problema H_∞

Sob estas condições, tem-se que a norma H_∞ do operador G_{wz_2} é definida como a norma induzida pela norma 2 de sinais, podendo ser vista também como o maior ganho em $||.||_2$ que pode ser obtido da entrada para a saída do sistema, isto é:

$$||G_{wz_2}||_\infty = \sup_{||w||_2} \frac{||z_2||_2}{||w||_2}$$

onde $||w||_2 \neq 0$ e $\sup$ denota o supremo de uma dada função (para mais detalhes veja, por exemplo, Green and Limebeer (1995)).

É importante ressaltar que não existe uma forma analítica para o cálculo da norma H_∞, mas sim um procedimento iterativo que pode ser encontrado, por exemplo, em Souza (1994).

3 CASO CONTÍNUO

Nesta seção busca-se resolver o problema sub-ótimo H_∞, que consiste em encontrar um controlador K tal que o sistema algébrico diferencial (1) seja estável em malha fechada e $||G_{wz_2}||_\infty \leq \gamma$, onde o valor de γ é previamente especificado. Comumente, este problema para o caso de sistemas na forma algébrico diferenciais é resolvido através da redução do sistema (1) para um sistema apenas diferencial, isto é, ao eliminar a variável algébrica z no sistema (1) obtém-se o seguinte sistema diferencial equivalente:

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + B_u u + B_w w \\ z_2 & = & C_z x + D_{uz} u + D_{wz} w \end{array} \qquad (2)$$

onde $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$.

O problema de controle H_∞ para esta classe de sistema tem solução conhecida a partir do *Bounded real lemma* (Gahinet and Apkarian, 1994) apresentado no lema a seguir.

Lema 3.1 Considere o sistema (2). Se existem matrizes F e W tal que

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + B_uF + F'B_u' & B_w \\ B_w' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} WC_f' \\ D_{wz}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WC_f' \\ D_{wz}' \end{bmatrix}' < 0$$

então existe uma lei de controle do tipo $u = -Kx$, onde o ganho de estabilização é dado por $K = FW^{-1}$, que estabiliza o sistema (2) e garante que $||G_{wz_2}||_\infty < \gamma$. $\diamond\diamond$

Apesar de simples, este método tem o inconveniente de exigir a inversão da matriz J_4, o que pode implicar em diversos problemas. Um deles é a dificuldade em considerar incertezas no modelo, já que a eliminação da variável algébrica envolve inversões de matrizes com elementos incertos. Outro problema é a perda da esparsidade das matrizes que, em alguns casos, quando a dimensão do problema é grande, pode gerar dificuldades computacionais consideráveis. O objetivo nesta seção é buscar uma solução para o problema H_∞ para sistemas com restrições algébricas no estado, preservando a sua estrutura original. Para tal, faz-se uso do Lema de Finsler (Boyd et al., 1994), descrito a seguir

Lema 3.2 Dada uma matriz simétrica Ψ e uma matriz C_a de dimensões compatíveis e seja X uma base para o espaço nulo de C_a. Então tem-se que

$$X'\Psi X < 0 \tag{3}$$

se e somente se $\exists$ L tal que

$$\Psi + LC_a + C_a'L' < 0 \tag{4}$$

$\diamond\diamond$

O lema acima, para a matriz L fixa, fornece condições necessárias e suficientes apenas quando as matrizes no sistema não apresentam parâmetros incertos. No caso de C_a ou Ψ dependerem de um conjunto de parâmetros incertos as condições acima deixam de ser equivalentes, tornando-se apenas suficiente. Desta forma, a factibilidade de (4) é suficiente para garantir que (3) seja satisfeita, para mais detalhes veja (Lu and Doyle, 1995).

O teorema a seguir fornece condições necessárias e suficientes para a solução do problema sub-ótimo H_∞ para sistemas algébrico-diferenciais no caso nominal.

Teorema 1 *Seja γ um escalar positivo e G_{wz_2} a função de transferência de w para z_2 no sistema (1) em malha fechada. Então existe uma lei de controle do tipo $u = -Kx$ tal que $||G_{wz_2}||_\infty < \gamma$ se e somente se a seguinte LMI for factível em $W > 0$, F e L:*

$$\Psi + L[\ J_2' \quad J_4' \quad 0\ ] + [\ J_2' \quad J_4' \quad 0\ ]'L' < 0 \tag{5}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} J_1W + WJ_1' - B_uF - F'B_u' & * & * & * \\ J_3W & 0 & * & * \\ B_w' & 0 & -\gamma^2 & * \\ C_zW - D_{uz}F & 0 & D_{wz} & -I \end{bmatrix}$$

Em caso afirmativo $||G_{wz_2}||_\infty < \gamma$ com o ganho de estabilização dado por $K = FW^{-1}$.

Prova: O objetivo é provar que as condições do teorema serão satisfeitas se e somente se o resultado clássico de norma H_∞ para o sistema de ordem reduzida apresentado no Lema 3.1 estiver também satisfeito.

Primeiro, assume-se que as condições do Teorema 3.1 estão satisfeitas. Pré-multiplicando a LMI (5) por $X = \begin{bmatrix} x' & z' & w' & z_2' \end{bmatrix}$ e pós-multiplicando-a por X', e em seguida aplicando o Lema 3.2 tem-se que a desigualdade (5) é equivalente à:

$$X\ \Psi\ X' < 0 \quad \forall X' : [\ J_2' \quad J_4' \quad 0\ ]X' = 0 \tag{6}$$

Da restrição de igualdade em (6), deduz-se que $z = -J_4^{-1}J_2'x$. Definindo $J = J_1 - J_2J_4^{-1}J_3 - B_uK$ e $C_f = C_z - D_{uz}K$, em Ψ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} JW + WJ' & B_w & WC_f' \\ B_w' & -\gamma^2 I & D_{wz}' \\ C_fW & D_{wz} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

Aplicando o complemento de Schur na LMI (7), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} JW + WJ' & B_w \\ B_w' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} WC_f' \\ D_{wz}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W'C_f' \\ D_{wz}' \end{bmatrix}' < 0$$

Esta desigualdade é equivalente à (5), completando a prova do teorema. $\diamond\diamond$

Note que uma condição necessária para que a LMI (5) no Teorema 3.1 seja factível é que a matriz J_4 seja inversível. Conseqüentemente, a suposição de que o sistema (1) seja admissível não introduz nenhum conservadorismo ao método.

O Teorema 3.1 fornece condições necessárias e suficientes para a síntese de controladores H_∞ para sistemas com restrições algébricas sem parâmetros incertos. Este resultado pode ser estendido para sistemas sujeitos a incertezas politópicas, onde as condições são apenas suficientes, apresentadas no corolário a seguir. Neste caso, considera-se que o sistema

(1) é incerto e descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} x \\ z \\ u \\ w \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_u & B_w \\ J_3 & J_4 & 0 & 0 \\ C_z & 0 & D_{uz} & D_{wz} \end{bmatrix} \tag{8}$$

com

$$\Omega \in Co\,[\Omega_i]_{i=1}^q \quad \Omega_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{ui} & B_{wi} \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 & 0 \\ C_{zi} & 0 & D_{uzi} & D_{wzi} \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde $Co\,[\Omega_i]_{i=1}^q$ é um politopo convexo de vértices Ω_i conhecidos.

Corolário 3.1 Seja γ um escalar positivo e $Co[\Omega_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ω_i dados. Defina G_{wz_2} como sendo o operador de w para z_2 no sistema incerto (8)-(9) em malha fechada com a lei de controle $u = -Kx$. Se existirem matrizes $W > 0$, F e L tais que para todo $i = 1, ..., q$:

$$\Psi_i + L[\; J'_{2i} \quad J'_{4i} \quad 0 \;] + [\; J'_{2i} \quad J'_{4i} \quad 0 \;]' L' < 0 \tag{10}$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i}W + WJ'_{1i} - B_{ui}F - F'B'_{ui} & * & * & * \\ J_{3i}W & 0 & * & * \\ B'_{wi} & 0 & -\gamma^2 & * \\ C_{zi}W - D_{uzi}F & 0 & D_{wzi} & -I \end{bmatrix}$$

então o sistema incerto (8)-(9) é quadraticamente estável em malha fechada com o ganho de estabilização dado por $K = FW^{-1}$ para todo $\Omega \in Co[\Omega_i]_{i=1}^q$ e além disso $||G_{wz_2}||_\infty < \gamma$.

Prova: Pela propriedade de convexidade tem-se que, se a LMI (10) for satisfeita para todos os vértices do politopo então as condições são válidas para toda região dentro do politopo. A prova então segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.1 e portanto será omitida. ◇◇

Os resultados obtidos para o caso de realimentação de estados podem ser estendidos para o problema H_∞ via realimentação estática de saída, apresentados a seguir.

Corolário 3.2 Seja γ um escalar positivo e G_{wz_2} a função de transferência de w para z_2 no sistema nominal (1) em malha fechada com $u = -Ky$ e $y = Cx$, onde C tem posto completo por linhas. Se existirem matrizes $W > 0$, F, M e L tais que:

$$\begin{aligned} &\Psi_s + L[\; J'_2 \quad J'_4 \quad 0 \;] + [\; J'_2 \quad J'_4 \quad 0 \;]' L' < 0 \\ &CW = MC \end{aligned} \tag{11}$$

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} J_1W + WJ'_1 - B_uFC - C'F'B'_u & * & * & * \\ J_3W & 0 & * & * \\ B'_w & 0 & -\gamma^2 & * \\ C_zW - D_{uz}FC & 0 & D_{wz} & -I \end{bmatrix}$$

então o sistema (1) é quadraticamente estável em malha fechada com o ganho de estabilização dado por $K = FM^{-1}$ e além disso $||G_{wz_2}||_\infty < \gamma$.

Prova: Assuma que (11) esteja satisfeita, então tem-se que $F = KM$ e $MC = CW$. Substituindo estas igualdades em (11), obtém-se

$$\Psi_s + L[\; J'_2 \quad J'_4 \quad 0 \;] + [\; J'_2 \quad J'_4 \quad 0 \;]' L' < 0 \tag{12}$$

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} J_{mf}W + WJ'_{mf} & * & * & * \\ J_3W & 0 & * & * \\ B'_w & 0 & -\gamma^2 & * \\ C_fW & 0 & D_{wz} & -I \end{bmatrix}$$

onde $C_f = C_z - D_{uz}KC$ e $J_{mf} = J_1 - B_uKC$. O restante da prova segue o mesmos passos do caso de realimentação de estados(Teorema 3.1) e, portanto, será omitida. ◇◇

Perceba que a solução do problema H_∞ via realimentação de estados para o caso de sistemas nominais, dado pelo Teorema 1, é necessária e suficiente. No entanto, isto não ocorre quando se resolve o problema por realimentação de saída, onde mesmo para o caso de sistema nominais as condições são apenas suficientes devido a restrição de igualdade $CW = MC$. Para mais detalhes, veja Crusius and Trofino (1999).

De forma semelhante ao caso de realimentação de estados pode-se obter condições convexas para o caso de sistemas algébrico-diferenciais com incertezas politópicas.

4 CASO DISCRETO

Nesta seção será tratado o caso de síntese H_∞ para sistemas discretos com restrições algébricas. Considere então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= J_1x_k + J_2z_k + B_uu_k + B_ww_k \\ 0 &= J_3x_k + J_4z_k \\ z_{2k} &= C_zx_k + D_{wz}w_k + D_{uz}u_k \end{cases} \tag{13}$$

onde $x_k \in R^n$ é o vetor de estados, $z_k \in R^m$ é a variável algébrica, $u_k \in R^{n_u}$ é a variável de controle, $w_k \in R^l$ é a variável de perturbação e $z_{2k} \in R^q$ é a saída ou sinal de desempenho e a matriz J_4 é inversível.

De forma semelhante à seção anterior, busca-se encontrar um controle K que estabilize o sistema (13) e satisfaça $||G_{w_kz_{2k}}||_\infty < \gamma$, para um dado γ. O Teorema 2 apresenta a solução para este problema no caso nominal.

Teorema 2 *Seja γ um escalar positivo e $G_{w_kz_{2k}}$ a função de transferência de w_k para z_{2k} no sistema (13) em malha fechada. Então existe uma realimentação de estados $u_k =$*

$-Kx_k$ tal que $||G_{w_k z_{2k}}||_\infty < \gamma$ se e somente se a seguinte LMI for factível em $W > 0$, F e L:

$$\begin{bmatrix} \Psi_d & \begin{bmatrix} J_1W - B_uF & B_W \\ J_3W & 0 \\ C_zW - D_uF & D_{wz} \end{bmatrix} \\ * & -\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \qquad (14)$$

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} -W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_2' & J_4' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_2 \\ J_4 \\ 0 \end{bmatrix} L'$$

Em caso afirmativo $||G_{w_k z_{2k}}||_\infty < \gamma$ com o ganho de estabilização dado por $K = FW^{-1}$.

Prova: Aplicando o complemento de Schur na LMI (14), dado que $F = KW$ e definindo $J_{mf} = J_1 - B_uK$ e $C_f = C_z - D_{uz}K$, obtém-se:

$$\Psi_d + \begin{bmatrix} J_{mf}W & B_W \\ J_3W & 0 \\ C_fW & D_{wz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{mf}W & B_W \\ J_3W & 0 \\ C_fW & D_{wz} \end{bmatrix}' < 0$$

Pré-multiplicando-a por $X_k = \begin{bmatrix} x_k' & z_k' & w_k' \end{bmatrix}$, pós-multiplicando-a por X_k' e em seguida aplicando o Lema 3.2, tem-se que a desigualdade acima é equivalente a:

$$X_k \left(\Pi_1 - \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix} \right) X_k' < 0,$$
$$\forall X_k' : \begin{bmatrix} J_2' & J_4' & 0 \end{bmatrix} X_k' = 0$$

onde

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} J_{mf}W & B_W \\ J_3W & 0 \\ C_fW & D_{wz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{mf}W & B_W \\ J_3W & 0 \\ C_fW & D_{wz} \end{bmatrix}'$$

Da restrição de igualdade, deduz-se que $z = -J_4^{-1} J_2' x$. Definindo $J = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 - B_u K$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}' \left(\Pi_2 - \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0$$

onde $\Pi_2 = \begin{bmatrix} JW & B_W \\ C_fW & D_{wz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JW & B_W \\ C_fW & D_{wz} \end{bmatrix}'$

A prova se completa com a versão discreta do Bound Real Lemma apresentada, por exemplo, em Zhou et al. (1996).

$\diamond\diamond$

Considera-se agora o caso de sistemas incertos. De forma semelhante ao caso contínuo assume-se que as matrizes do sistema (13) são incertas e que o sistema é descrito por

$$\begin{bmatrix} x_k \\ 0 \\ z_{2k} \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \\ u_k \\ w_k \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_u & B_w \\ J_3 & J_4 & 0 & 0 \\ C_z & 0 & D_{uz} & D_{wz} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

com

$$\Omega \in Co\,[\Omega_i]_{i=1}^q \quad \Omega_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{ui} & B_{wi} \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 & 0 \\ C_{zi} & 0 & D_{uzi} & D_{wzi} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

onde $Co\,[\Omega_i]_{i=1}^q$ é um politopo convexo de vértices Ω_i conhecidos. A solução para problema H_∞ neste caso é apresentado no corolário a seguir.

Corolário 4.1 Seja γ um escalar positivo e $Co[\Omega_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ω_i dados. Defina $G_{w_k z_{2k}}$ como operador de w_k para z_{2k} no sistema incerto (15)-(16) em malha fechada com $u_k = -Kx_k$. Se existirem matrizes $W > 0$, F e L tais que para todo $i = 1, ..., q$:

$$\begin{bmatrix} \Psi_d & \begin{bmatrix} J_{1i}W - B_{ui}F & B_{Wi} \\ J_{3i}W & 0 \\ C_{zi}W - D_{ui}F & D_{wzi} \end{bmatrix} \\ * & -\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \qquad (17)$$

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} -W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{2i}' & J_{4i}' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{2i} \\ J_{4i} \\ 0 \end{bmatrix} L'$$

então o sistema incerto (15)-(16) é quadraticamente estável em malha fechada com o ganho de estabilização dado por $K = FW^{-1}$ para todo $\Omega \in Co[\Omega_i]_{i=1}^q$ e além disso $||G_{w_k z_{2k}}||_\infty < \gamma$. $\diamond\diamond$

A extensão dos resultados acima para o problema de minimização da norma H_∞ por realimentação estática de saída pode ser obtida de forma análoga ao caso contínuo.

5 EXEMPLO NUMÉRICO

Nos exemplos a seguir utiliza-se o Pacote Computacional Scilab desenvolvido pelo INRIA, Fr e disponível no site: www-rocq.inria.fr/scilab.

Exemplo 5.1 Considere o sistema máquina-barra infinita constituído de 4 barras, um gerador e uma barra infinita, cujo

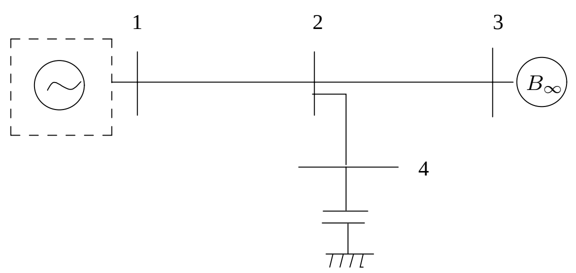

Figura 2: Representação unifilar de um sistema Máquina-Barra Infinita: 4 barras

Tabela 1: Dados da Matriz Jacobiana do Sistema

J_1(1,1)=-0.888889	J_1(1,4)=0.117647	J_1(2,1)=111.309799	J_1(2,3)=-188.534195	J_1(3,2)=1
J_1(4,4)=-20	J_2(1,9)=0.445458	J_2(1,12)=0.629588	J_2(2,9)=-14.482916	J_2(2,11)=188.534195
J_2(2,12)=-107.226868	J_2(4,9)=-1000	J_2(4,16)=0	J_3(1,1)=6.802753	J_3(2,1)=4.8132
J_3(5,3)=3000.61499	J_3(16,4)=0	J_4(1,1)=-1	J_4(1,9)=-0.885131	J_4(1,12)=-6.553223
J_4(2,2)=-1	J_4(2,9)=-2.933956	J_4(2,12)=-0.885131	J_4(3,3)=-1	J_4(4,4)=-1
J_4(4,13)=1.978	J_4(5,5)=-1	J_4(5,11)=-3000.61499	J_4(6,6)=-1	J_4(6,10)=-2999.384766
J_4(7,7)=-1	J_4(8,8)=-1	J_4(9,2)=-1	J_4(9,9)=6.6176	J_4(9,12)=2.498426
J_4(9,13)=-5.442264	J_4(9,14)=-2.498426	J_4(10,6)=-1	J_4(10,10)=6.6176	J_4(10,11)=-2.498426
J_4(10,13)=-5.442264	J_4(10,14)=2.498426	J_4(11,5)=-1	J_4(11,10)=-2.498426	J_4(11,11)=5.382399
J_4(11,13)=-2.526215	J_4(11,14)=-5.382399	J_4(12,9)=2.498426	J_4(12,12)=5.382399	J_4(12,13)=2.526215
J_4(12,14)=-5.382399	J_4(13,4)=-1	J_4(13,9)=-5.382399	J_4(13,10)=-5.382399	J_4(13,11)=-2.498426
J_4(13,12)=2.498426	J_4(13,13)=22.74147	J_4(13,15)=-9.889999	J_4(14,3)=-1	J_4(14,9)=-2.498426
J_4(14,10)=2.498426	J_4(14,11)=-5.382399	J_4(14,12)=-5.382399	J_4(14,14)=20.546009	J_4(14,16)=-9.78121
J_4(15,8)=-1	J_4(15,13)=-9.889999	J_4(15,15)=9.889999	J_4(16,7)=-1	J_4(16,14)=-9.78121
J_4(16,16)=9.78121	J_4(12,9)=2.498426	J_4(12,12)=5.382399	J_4(12,13)=2.526215	J_4(12,14)=-5.382399
J_4(13,4)=-1	J_4(13,9)=-5.382399	J_4(13,10)=-5.382399	J_4(13,11)=-2.498426	J_4(13,12)=2.498426
J_4(13,13)=22.74147	J_4(13,15)=-9.889999	J_4(14,3)=-1	J_4(14,9)=-2.498426	J_4(14,10)=2.498426
J_4(14,11)=-5.382399	J_4(14,12)=-5.382399	J_4(14,14)=20.546009	J_4(14,16)=-9.78121	J_4(15,8)=-1
J_4(15,13)=-9.889999	J_4(15,15)=9.889999	J_4(16,7)=-1	J_4(16,14)=-9.78121	J_4(16,16)=9.78121

diagrama unifilar é mostrado na Figura 2. Este sistema é constituído de 4 variáveis diferenciais e 16 variáveis algébricas, cujos dados numéricos podem ser encontrados em Martins and Lima (1990). Os elementos não nulos da matriz Jacobiana na forma $\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}$ gerados pelo programa LFLOW são mostrados na Tabela 1.

Note que o sistema oriundo da eliminação da variável algébrica z, com $J = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$, é instável e possui os seguintes autovalores em malha aberta:

$$\begin{array}{ll} - & 16.515781 \\ - & 5.9111344 \\ & 1.0596639 + 4.7951076i \\ & 1.0596639 - 4.7951076i \end{array}$$

O objetivo neste exemplo é projetar uma lei de controle do tipo $u = -Kx$ que estabilize o sistema e garanta que o critério de norma H_∞ seja menor que γ, para tal considera-se que

$$B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad C_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_{uz} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_w = \begin{pmatrix} 0.2113249 \\ 0.7560439 \\ 0.0002211 \\ 0.3303271 \end{pmatrix} \quad D_{wz} = \begin{pmatrix} 0.6653811 \\ 0.6283918 \end{pmatrix}$$

Supondo $\gamma = 5$ e aplicando o Teorema 1, obtém-se como ganho de realimentação de estados:

$$K = \begin{pmatrix} 60.852661 & 2.0314555 & -17.559783 & 2.1740479 \end{pmatrix}$$

que estabiliza o sistema levando os autovalores em malha fechada para

$$\begin{array}{l} -2190.7582 \\ -1.3782739 + 4.1160446i \\ -1.3782739 - 4.1160446i \\ -0.8407899 \end{array}$$

e garante que o valor real da norma H_∞ é 3.976.

Exemplo 5.2 Considere o exemplo anterior discretizado com um período de amostragem $t = 0.01$, com o seguinte critério de desempenho.

$$C_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D_{uz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3303271 \end{pmatrix}, \; D_{wz} = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supondo $\gamma = 11.121503$ e aplicando o Teorema 2, obtém-se como ganho

$$K = \begin{pmatrix} 17.303843 & 1.1980519 & -0.4679964 & 0.1037385 \end{pmatrix}$$

que estabiliza o sistema levando os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{array}{l} -\quad 0.0415203 \\ \quad\; 0.8308952 \\ \quad\; 0.9850822 + 0.0414517i \\ \quad\; 0.9850822 - 0.0414517i \end{array}$$

6 COMENTÁRIOS

Neste artigo foram expostas soluções para o problema H_∞ para sistemas com restrições algébricas a tempo contínuo e discreto. Técnicas LMIs são utilizadas para descrever a solução do problema para o caso de sistemas nominais e sistemas incertos. Condições necessárias e suficientes são propostas para a solução do problema via realimentação de estados no caso nominal e apenas suficientes nos casos de sistemas incertos e de realimentação de saída. O resultado apresentado é uma alternativa ao resultado dado em Uezato and Ikeda (1999), onde se considera uma função de Lyapunov com a dimensão das variáveis de estados incluindo as variáveis algébricas. Na abordagem aqui proposta, utiliza-se uma função de Lyapunov da mesma ordem das variáveis de estado do sistema, sem considerar as variáveis algébricas, permitindo assim uma caracterização direta do comportamento do sistema. Esta abordagem pode também ser generalizada para o caso de síntese de controladores com o critério de desempenho H_2. Este resultado pode ser visto em (Barbosa and Trofino, 2000).

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

REFERÊNCIAS

Barbosa, K. A. and Trofino, A. (2000). Síntese H_2 para Sistemas com Restrições Algébricas , *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis,SC.

Barbosa, K. A. and Trofino, A. (2002). Técnicas LMI para Análise de Sistemas com Restrições Algébricas no Estado, *Controle & Automação* **13**(1): 34–41.

Bender, D. J. and J.Laub, A. (1987). The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **Vol. 32**(No 8): 672–688.

Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* , SIAM Studies in Applied Mathematics.

Chen, J. L. and Lee, L. (1999). H_∞ Control for Discrete-time Descriptor Systems, *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, pp. 4100–4105.

Cobb, D. J. (1984). Controllability, observability and duality in singular systems., *IEEE Transactions on Automatic Control* **Vol. 29**: 1076–1082.

Crusius, C. and Trofino, A. (1999). Sufficient LMI Conditions for Output Feedback Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **Vol. 44**(No 5): 1053–1057.

Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control. , *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **Vol. 4**: 421–448.

Green, M. and Limebeer, D. J. N. (1995). *Linear Robust Control* , Prentice-Hall.

Hill, D. J. and Mareels, I. M. (1990). Stability Theory for Differential/Algebraic Systems with Application to Power Systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **Vol. 37**(No 11): 1416–1423.

Krishnan, H. and McClamroch, N. H. (1994). Tracking in Nolinear Differential-Algébric Control Systems whit Applications to Constrained Robot Systems, *Automatic* **Vol. 33**: 419–426.

Leontief, W. (1953). *Studies in the Structure of the American Economy* , Oxford Univ. Press.

Lewis, F. (1986). A survey of linear singular systems, *Circuits, Systems Sig. Proces.* **Vol. 5**: 3–36.

Lu, W.-M. and Doyle, J. (1995). H_∞ control of nonlinear systems: a convex characteriztion, *IEEE Transactions on Automatic Control* **Vol. 40**(No 9): 1668–1675.

Martins, N. and Lima, L. (1990). Eigenvalue and frequency domain analysis of small-signal eletromechanical stability problems, *IEEE Power Engineering Society* pp. 17–33.

Masubuchi, I., Kamitane, Y., Ohara, A. and Suda, N. (1997). H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach, *Automatica* **Vol. 33**(No 4): 669–673.

Scavone, F., Silva, A., Trofino, A. and Campagnolo, J. M. (1998). Projeto Robusto de Controladores para Sistemas de Potência usando Técnicas LMI, *XII Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlânica, MG.

Souza, S. R. (1994). *Análise Convexa Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos*, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP.

Takaba, K., Morihira, N. and Katayama, T. (1994). H_∞ control for descriptor system –a J-spectral factorization approach, *IEE-Proceedings of the 33th Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, pp. 2251–2256.

Uezato, E. and Ikeda, M. (1999). Strict LMI Conditions for Stability. Robust Stabilization, and H_∞ Control of Descriptor Systems, *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, pp. 4092–4097.

Verghese, G., Lévi, B. C. and Kailath, T. (1981). A Generalized State-Space for Singular Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **Vol. 26**(No 4): 811–831.

Wen, T. and Yaling, C. (1993). H_∞-optimal Control for Descriptor Systems , *Proceedings 12 th IFAC, World Congress*, Vol. 2, Sydney, pp. 201–104.

Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall International, Inc., USA.