

---

# REDUÇÃO DE ORDEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA BASEADA NA MINIMIZAÇÃO DA NORMA DOS COEFICIENTES POLINOMIAIS DO ERRO

**José M. Araújo\***  
jomario@cefetba.br

**Alexandre C. Castro\***  
castro@cefetba.br

**Eduardo T. F. Santos\***  
eduardo.telmo@terra.com.br

\*Grupo de Pesquisa em Sinais e Sistemas (GPSS)  
Departamento de Tecnologia em Eletro-Eletrônica, Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia  
Rua Emídio dos Santos, S/N, Barbalho, Salvador-BA, Brasil CEP 40301-015

---

## RESUMO

Redução de ordem de modelos monovariáveis, de sistemas lineares invariantes no tempo, contínuos, descritos por uma função de transferência racional, é uma técnica amplamente difundida na simplificação de modelos, como forma de reduzir complexidade envolvida em análise e projeto. Um método simples para redução de ordem baseado na minimização da norma dos coeficientes do numerador do polinômio de erro é proposto, e diversos resultados apresentados demonstram a validade e o mérito da abordagem.

**PALAVRAS-CHAVE:** Redução de ordem, sistemas lineares, domínio da frequência, polinômios, minimização.

## ABSTRACT

Model order reduction for linear-time invariant systems, SISO, given by a rational transfer function, is a well-known technique for model simplification, as a way to reduce complexity involved in analysis and design. A simple method for model order reduction by norm minimization of the error polynomial numerator coefficients is proposed, and many presented results show the validity and quality of this ap-

proach.

**KEYWORDS:** order reduction, linear systems, frequency domain, polynomials, minimization.

## 1 INTRODUÇÃO

Redução de ordem para simplificação de sistemas lineares é uma técnica conhecida de longa data, e os métodos para simplificação são bastante diversificados. O truncamento modal, com retenção de pólos dominantes é uma técnica interessante, mas é limitado ao caso em que há dominância modal (Aguirre, 1993). Diversos métodos baseados em otimização foram propostos, onde alguma função é minimizada ou maximizada com respeito aos parâmetros do modelo (El-Attar e Vidyasagar, 1979; Hsia, 1972). Métodos baseados na descrição no espaço de estados também são muito aplicados, sendo que os mais utilizados são fundamentados na realização balanceada (Moore, 1981; Perenbo e Silverman, 1982; Muscato, 2000)

A redução de ordem tanto pode aplicar-se a modelos de larga escala, ou seja, de ordem muito elevada (Mansour e Mehrotra, 2003), como para modelos de ordem moderada, em aplicações típicas de sistemas de controle. O método que será discutido a seguir é sugerido para redução de modelos estáveis, de fase mínima, e com ordem moderada. A proposta consiste basicamente em considerar uma função de erro entre o modelo real e o de ordem reduzida, para a partir da minimi-

---

Artigo submetido em 24/01/2007

1a. Revisão em 21/05/2007

2a. Revisão em 12/09/2007

3a. Revisão em 13/03/2008

Aceito sob recomendação do Editor Associado

Prof. Liu Hsu

zação da norma dos coeficientes do polinômio do numerador desta função, encontrar os parâmetros desconhecidos do modelo de ordem reduzida.

## 2 PRELIMINARES

Seja a função de transferência de um sistema linear, próprio invariante no tempo:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1)$$

O problema de redução de ordem consiste em obter uma função de transferência que aproxime aquela da Eq. 1, de acordo com uma determinada métrica:

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \approx G(s) \quad (2)$$

O polinômio  $\hat{q}(s)$  tem grau  $r < n$  e  $\hat{p}(s)$  tem grau  $l < m$ . É importante destacar que certos pólos do sistema, como os dominantes, podem ser retidos na solução, assim como alguns zeros, ou o grau relativo da função de transferência original pode ser preservado, o que resulta em diferentes formas de redução. Tal decisão é atribuída ao que se deseja como modelo reduzido. Entretanto, em muitos casos, como será visto a seguir, não há pólos dominantes e nem sempre é possível realizar cancelamento de zeros e pólos, o que justifica abordagens baseadas em problemas de otimização.

## 3 METODOLOGIA PROPOSTA

A função de transferência original pode ser escrita como a de ordem reduzida mais um erro:

$$G(s) = \hat{G}(s) + e(s) \quad (3)$$

Manipulando esta equação com o uso das Eq. 1 e Eq. 2, obtém-se:

$$e(s) = \frac{p(s)\hat{q}(s) - \hat{p}(s)q(s)}{q(s)\hat{q}(s)} \quad (4)$$

A aproximação pela redução é tanto melhor quanto menor for  $e(s)$  em alguma métrica. Seja o numerador da função  $e(s)$ :

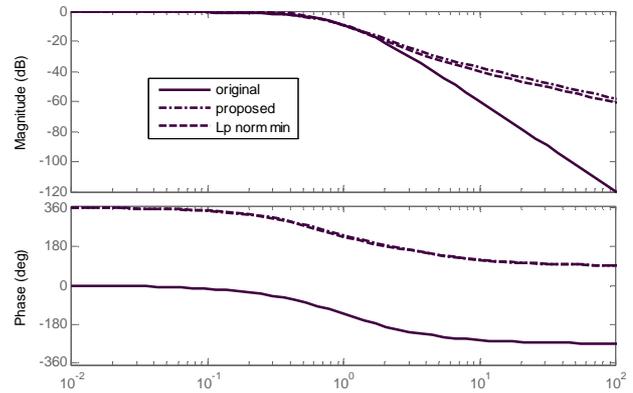


Figura 1: resposta em frequência do exemplo 4.2.

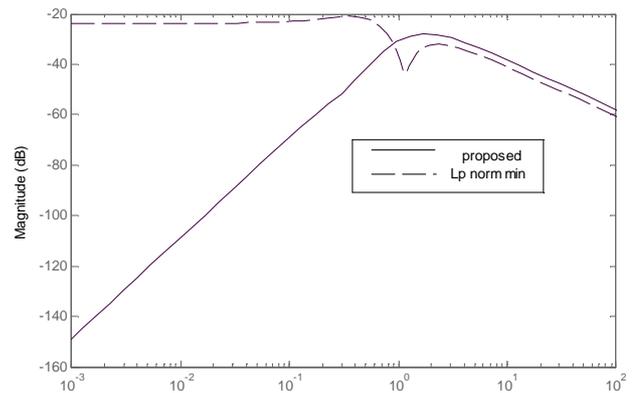


Figura 2: erro  $e(j\omega)$  para o exemplo 4.2.

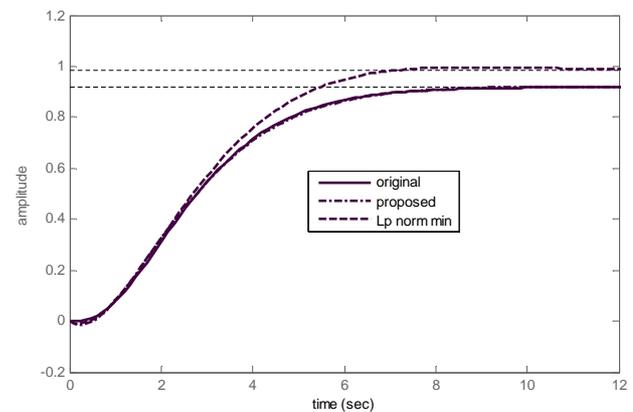


Figura 3: resposta ao degrau do exemplo 4.2.

$$N(s) = p(s)\hat{q}(s) - \hat{p}(s)q(s) \quad (5)$$

O método proposto para redução do modelo consiste na solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \min \text{norm}^2 \{ \text{coef}[N(s)] \} \\ & \text{s.a. } \hat{q}(s) \text{ é Hurwitz} \end{aligned} \quad (6)$$

A proposta tem, de forma geral, uma estrutura semelhante a metodologia desenvolvida por Sou et al (2005); porém, há diferenças em relação ao domínio, pois no trabalho de Sou a abordagem é para sistemas de tempo discreto, ou sistemas discretizados pela aproximação de Tustin, e também no que diz respeito à norma utilizada para função objetivo. Diversas restrições que visem reter certas características do sistema original podem ser consideradas, além da restrição que garante a estabilidade do modelo reduzido. O número de variáveis da função objetivo depende da ordem desejada e da quantidade de zeros considerada, e são os coeficientes de  $\hat{q}(s)$  e  $\hat{p}(s)$ . A função objetivo é quadrática, logo, a convergência dos algoritmos para uma única solução, se a mesma existir, é assegurada para uma boa escolha de condições iniciais.

## 4 EXEMPLOS

### 4.1 Sistema de ordem mínima

Uma forma interessante de validar a proposição é verificar sua eficácia em um sistema com cancelamento exato de zeros e pólos, o que leva a um modelo exato de ordem mínima. Seja a função de transferência:

$$G(s) = \frac{4s^3 + 28s^2 + 68s + 60}{s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 15}$$

Utilizando o método proposto, será obtido um modelo reduzido de primeira ordem. O modelo reduzido é dado por:

$$\hat{G}(s) = \frac{b}{s+a}$$

O problema de minimização para encontrar os parâmetros  $a$  e  $b$  é dado por:

$$\begin{aligned} & \min_{a,b} \left\{ \begin{aligned} & f(a,b) = (4-b)^2 + (28+4a-8b)^2 + \\ & + (68+28a-24b)^2 + (60+68a-32b)^2 + \\ & (60a-15b)^2 \end{aligned} \right. \\ & \text{s.a. } a = \frac{b}{4} \\ & a > 0 \end{aligned}$$

A solução do problema leva a função de transferência e ao erro seguintes:

$$\hat{G}(s) = \frac{4}{s+1} ; e(s) = 0$$

Mostrando a validade do método. A seguir, uma plethora de exemplos será apresentada para validar diferentes situações.

### 4.2 Sistema de terceira ordem

O sistema de terceira ordem a seguir foi utilizado como exemplo por El-Attar e Vidyasagar (1978), cuja metodologia é baseada na minimização das normas  $l_1 - l_\infty$ . Tal modelo não apresenta pólos dominantes, nem zeros para justificar quasi-cancelamentos. A função de transferência adotada é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.99)(s+1)(s+1.1)}$$

Considere o modelo reduzido de segunda ordem, com um zero, dado por:

$$\hat{G}(s) = \frac{cs+d}{s^2+as+b}$$

A solução da Eq. 6 leva à função de transferência:

$$\hat{G}(s) = \frac{-0,1246s + 0,4455}{s^2 + 1,2804s + 0,4851}$$

O modelo reduzido de Vidyasagar é dado por:

$$\hat{G}_V(s) = \frac{-0,0911s + 0,3806}{s^2 + 1,0054s + 0,3869}$$

A Fig. 1 mostra a resposta em frequência para o sistema original e para as aproximações obtidas com a metodologia proposta e pelo modelo de Vidyasagar. A magnitude do erro é vista na Fig. 2 e a resposta ao degrau dos três modelos é vista na Fig. 3. As duas aproximações são bastante consistentes, inclusive quanto à fase. Os dois sistemas apresentam um zero no semi-plano direito do plano complexo, sendo de fase não-mínima. Ambos os modelos são estáveis, o que mostra o mérito da metodologia. A magnitude do erro em baixas frequências é constante no modelo de Vidyasagar, pois na sua metodologia, a restrição de mesmo ganho DC não é imposta ao problema de otimização resultante. Este fato também fica nítido pela observação da resposta ao degrau dos dois modelos reduzidos.

Tabela 1: Aproximações da função de transferência da seção 4.3 por diferentes métodos

MODELO		FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	$\int_0^{+\infty} (\text{erro da resposta ao degrau})^2 dt$	$\int_0^{+\infty}  e(j\omega) ^2 d\omega$
primeira ordem	Proposto	$\frac{0,882}{s+0,882}$	0,0012	0,0109
	Hsia	$\frac{0,923}{s+0,923}$	0,0010	0,0149
	Realização balanceada (perturbação singular)	$\frac{-0,036s+0,942}{s+0,942}$	0,007	0,1524
segunda ordem	Proposto	$\frac{0,772s+1,819}{s^2+2,318s+1,819}$	0,000086	0,0089
	Hsia	$\frac{0,731s+2,506}{s^2+3,446s+2,506}$	0,000123	0,0124
	Realização balanceada (perturbação singular)	$\frac{0,026s^2+0,693s+2,501}{s^2+2,318s+2,501}$	0,000048	0,0616

### 4.3 Sistema de quarta ordem

Seja a função de transferência de 4ª ordem (Hsia, 1972), dada por:

$$G(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

Dois modelos reduzidos serão estudados, um de primeira e um de segunda ordem, com preservação do grau de McMillan. Tem-se então modelos reduzidos com as formas:

$$\hat{G}_2(s) = \frac{cs + d}{s^2 + as + b}$$

$$\hat{G}_1(s) = \frac{\hat{b}}{s + \hat{a}}$$

A metodologia proposta será comparada ao método de Hsia e com o método da realização balanceada e redução a partir de perturbação singular. A tabela 1 mostra os resultados obtidos, e algumas comparações podem ser estabelecidas. Para segunda ordem, o método da realização balanceada apresenta melhor desempenho no domínio do tempo, quando observa-se uma integral do erro quadrático da resposta ao degrau com menor valor dentre os três métodos; o método proposto é o que apresenta segunda melhor performance neste critério, ainda assim comparável em termos de qualidade ao método da realização balanceada. O método de Hsia também tem um bom desempenho neste critério, porém é o pior dentre os três. Quando passa-se ao critério da integral da norma ao

quadrado da função erro  $e(j\omega) = G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)$ , a metodologia proposta apresenta o melhor desempenho, haja vista que a minimização da norma dos coeficientes do numerador de tal função assegura uma melhor aproximação no domínio da frequência. No caso de primeira ordem, o método proposto e o de Hsia apresentam melhores resultados, com a realização balanceada sendo o de desempenho inferior.

### 4.4 Sistemas compartimentais

Este exemplo é abordado por Araújo et al (2006), onde é demonstrado um comportamento aproximado como de primeira ordem em sistemas compartimentais. A função de transferência em questão é dada por:

$$G(s) = \frac{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 14s + 4}{s^5 + 10s^4 + 35s^3 + 51s^2 + 29s + 4}$$

Aplicando o método proposto, obtemos como modelo reduzido de primeira ordem:

$$\hat{G}(s) = \frac{0,447}{s + 0,447}$$

No método da aproximação compartimental foi obtido:

$$\hat{G}(s) = \frac{0,524}{s + 0,524}$$

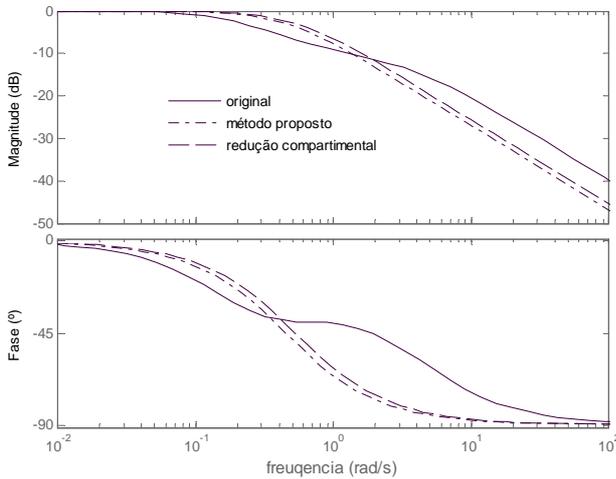


Figura 4: Resposta em frequência do exemplo 4.4.

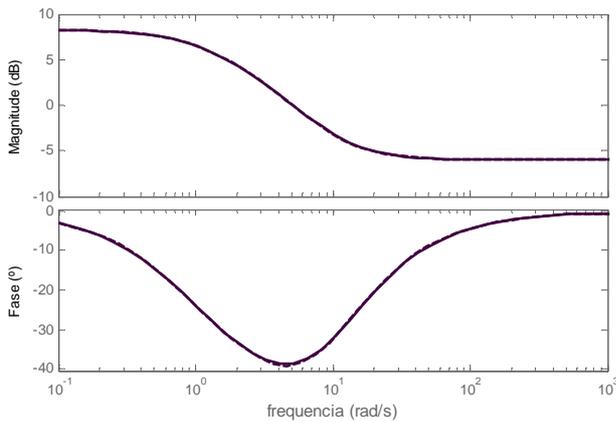


Figura 5: resposta em frequência do exemplo 4.5

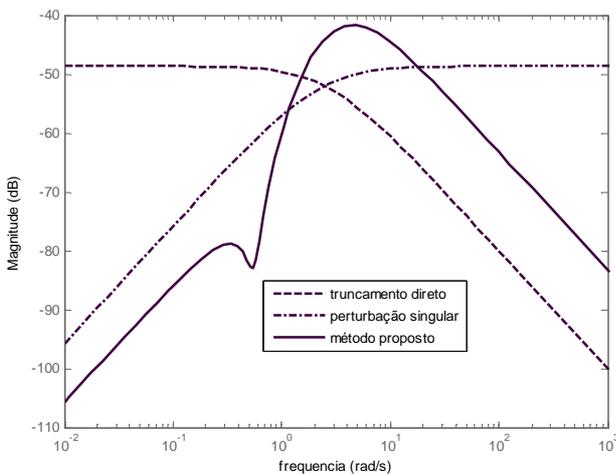


Figura 6: erro  $e(j\omega)$  para o exemplo 4.5.

## 4.5 Outro sistema de quarta ordem

A função de transferência de quarta ordem abaixo é usada como exemplo em Muscato (1990):

$$G(s) = \frac{0,5s^4 + 9s^3 + 47,5s^2 + 95s + 62}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Aplicando a metodologia proposta, com restrições adicionais  $G(\infty) = \hat{G}(\infty)$  e  $G(0) = \hat{G}(0)$ , obtém-se:

$$\hat{G}(s) = \frac{0,5s^2 + 5,89s + 7,67}{s^2 + 3,91s + 2,97}$$

A aproximação é excelente, como pode ser visto na Fig. 5. A Fig. 6 mostra a comparação do erro entre o método proposto e o da realização balanceada aplicando truncamento direto e também perturbação singular.

## 4.6 Sistema de sexta ordem

Este caso é descrito por Muscato (2000), com uma função de transferência dada por:

$$G(s) = \frac{16s^4 + 96s^3 + 936s^2 + 780s + 3250}{s^6 + 13,2s^5 + 158,6s^4 + 594s^3 + 2765s^2 + 1050s + 2500}$$

Obtém-se os modelos de 5ª até 2ª ordem:

$$\hat{G}_5(s) = \frac{11,20s^3 + 4,80s^2 + 43,77s}{s^5 + 3,98s^4 + 35,30s^3 + 10,50s^2 + 33,67s};$$

$$\hat{G}_4(s) = \frac{11,20s^2 + 4,80s + 43,77}{s^4 + 3,98s^3 + 35,30s^2 + 10,50s + 33,67};$$

$$\hat{G}_3(s) = \frac{1,72s}{s^3 + 0,26s^2 + 1,32s}$$

$$\hat{G}_2(s) = \frac{1,72}{s^2 + 0,26s + 1,32}$$

As Figs. 7 e 8 mostram, respectivamente, as respostas dos modelos reduzidos de 4ª e 5ª ordens, e para 2ª e 3ª ordens. Um fato interessante é que os sistemas reduzidos de 5ª e 3ª ordem obtidos não foram de ordem mínima, onde ambos apresentaram um zero e um pólo sobre a origem. Como consequência, os modelos reduzidos, se simplificados, resultam nos obtidos para 4ª e 2ª ordem, respectivamente.

## 5 UMA DISCUSSÃO SOBRE A ESTABILIDADE DO MODELO REDUZIDO

Neste ponto, após vários exemplos, faz-se mister discutir a imposição da restrição de o denominador no modelo reduzido ser Hurwitz, de forma a assegurar a estabilidade da solução. A mesma introduz não-convexidade ao problema de otimização, caso a ordem desejada do modelo reduzido seja maior ou igual a 3, com desigualdades no mínimo bilineares. Será feita a seguir uma tentativa de relaxar esta restrição para obter condições suficientes, o que irá se mostrar não-trivial até para um caso extremamente simples.

Considere a redução para 1ª ordem de um sistema originalmente de 2ª ordem, ou seja:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{b}_1}{s + \hat{a}_1}$$

O problema de otimização sem restrições consiste em:

$$\min_{\hat{b}, \hat{a}} (b_1 - \hat{b})^2 + (b_2 + b_1 \hat{a} - a_1 \hat{b})^2 + (b_2 \hat{a} - a_2 \hat{b})^2$$

A solução pode ser obtida de forma direta:

$$\hat{a} = \frac{-b_1 b_2 - b_1 b_2 a_2^2 + a_1 b_1^2 + b_1 b_2 a_2 + a_1 a_2 b_2^2}{b_1^2 + b_2^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{-b_1 b_2^2 a_2 + b_1^3 + b_1 b_2^2 + a_1 b_2^3}{b_1^2 + b_2^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

É possível notar que, até para um caso bastante simples, é difícil estabelecer condições sobre o sistema original de forma a preservar a estabilidade do modelo reduzido. Isto justifica o uso da restrição imposta. Seja por exemplo a função de transferência:

$$G(s) = \frac{1,3s + 1}{s^2 + 0,4s + 2}$$

A solução para o problema de minimização sem restrições é:

$$\hat{G} = \frac{0,172}{s - 0,322}$$

Que é instável, ainda que a função de transferência original seja estável e de fase mínima. Isto justifica o uso da restrição

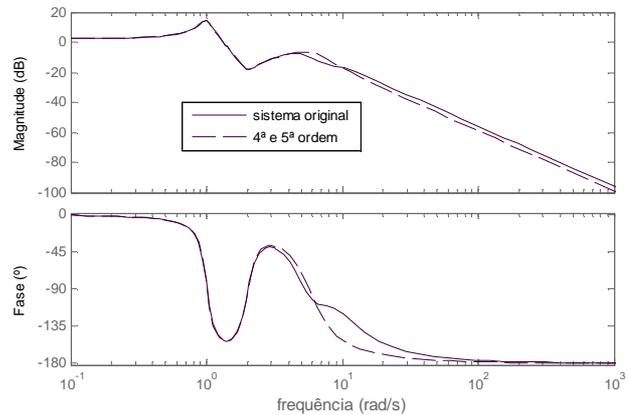


Figura 7: resposta em frequência para 4ª e 5ª ordens.

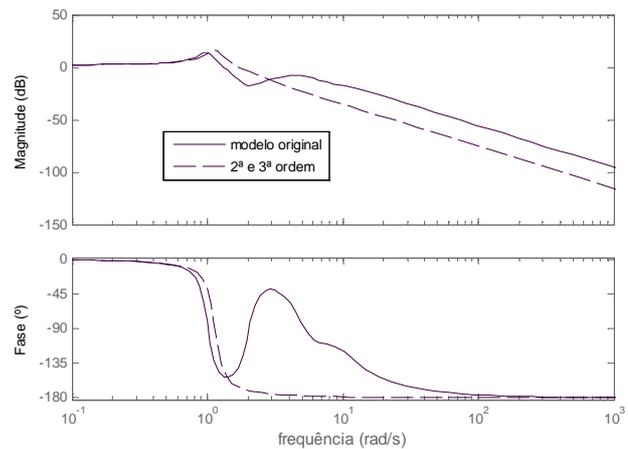


Figura 8: resposta em frequência para 2ª e 3ª ordens.

imposta. A metodologia perde então a elegância da otimização convexa, além de existir a possibilidade de o método de otimização utilizado atingir mínimos locais. Entretanto, a busca do mínimo global pode ainda ser feita através de algoritmos consagrados, como o determinístico *branch and bound* ou o estocástico *simulated annealing*.

## 6 CONCLUSÃO

Uma metodologia para redução de ordem de funções de transferência estáveis de sistemas lineares invariantes no tempo, a parâmetros concentrados, baseada na minimização da norma dos coeficientes do polinômio do numerador do erro em frequência foi apresentada, e a aplicação do mesmo numa plethora de exemplos deixou clara a validade do método. Até mesmo quando a ordem do modelo reduzido é aparentemente proibitiva o método mostrou-se efetivo, culminando em um modelo reduzido estável. A comparação com métodos baseados em realização balanceada e outros também

já consolidados, tradicionais em aplicações de redução de ordem, mostrou que o método aproxima adequadamente a função de transferência, sendo aplicável e demonstrando bom desempenho, conforme mostrado nos diversos exemplos discutidos neste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia, pelo incentivo à condução de pesquisas em sinais e sistemas.

## REFERÊNCIAS

- Aguirre, L. A. (1993). Quantitative measure of modal dominance for continuous systems. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp 2405-2410. San Antonio, Texas, USA.
- Araújo, J.M., Castro, A. C., Silva, F.G.S. e Santos, E.T.F (2006). Redução de ordem em sistemas lineares compartmentais. *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automação*, Salvador, Bahia, Brasil.
- El-Attar, R. A. and Vidyasagar, M (1978). Order reduction by  $l_1$ ,  $-$ and  $l_\infty$ , -nom minimization. . *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 23, n° 04, pp. 731-734.
- Hsia, T.C. On the simplification of linear systems (1972). *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 17, n° 04, pp372-374.
- Mansour, M. M. and Mehrotra, A. (2003). Model-Order reduction based on PRONY's method. *Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*.
- Moore, B. C. (1981). Principal component analysis in linear systems: controlability, observability and model reduction. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 26, n° 01, pp. 17-32.
- Muscato, G. (2000) Parametric generalized singular perturbation approximation for model order reduction. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 45, n°. 02, pp. 339-343.
- Pernebo, L. and Silverman (1982). Model reduction via balanced state-space representations. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 27, n° 02, pp. 382-387.
- Sou, K. C., Megretski, A. and Daniel, L. (2005). A quasi-convex optimization approach to parameterized model order reduction. In: *Proceedings of The IEEE/ACM Design Automation Conference*, vol. 01, pp. 933-938.