
SÍNTESE CONVEXA PARA SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASOS VARIANTES

Márcio F. Miranda*
fantini@coltec.ufmg.br

Valter J. S. Leite†
valter@ieee.org

*COLTEC / UFMG, Av. Antônio Carlos 6627,
31270-010, Belo Horizonte, MG, Brasil.

†CEFET-MG / *Campus* Divinópolis, Rua Monte Santo 319,
35502-036, Divinópolis, MG, Brasil.

ABSTRACT

In this paper some convex conditions are presented in the form of linear matrix inequalities (LMIs), yielding sufficient conditions for testing the robust stability of uncertain discrete-time systems with time-varying delay. In the sequel, LMI conditions for design robust state feedback gains are obtained. Two types of delay conditions are proposed: delay dependent and delay independent. Both of them are convex and employ extra matrices to achieve less conservative results. Examples from the literature are used to compare the performance of the conditions proposed here with the results obtained in other papers. It is presented a study of a model with polyopic uncertainty obtained from an industrial electric heater. In this study, the uncertain system is stabilized by means of the LMI conditions proposed here.

KEYWORDS: Uncertain discrete-time systems, Time varying delay, Lyapunov-Krasovskii functionals, Linear matrix inequalities.

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas condições convexas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs) que resul-

tam em condições suficientes para teste de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo. Na seqüência, são obtidas condições LMI para a síntese de ganhos robustos para realimentação de estados. Dois tipos de condições são propostas: dependentes do atraso e independentes do atraso. Ambas são convexas e empregam matrizes extras para reduzir o conservadorismo dos resultados. Exemplos da literatura são utilizados para comparar o desempenho das condições aqui propostas com os resultados obtidos em outros trabalhos. É apresentado um estudo de um modelo com incertezas politópicas obtido de um forno industrial elétrico. Nesse estudo, o sistema incerto é estabilizado por meio das condições LMI aqui propostas.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas incertos discretos no tempo, Atraso variante no tempo, Funcionais de Lyapunov-Krasovskii, Desigualdades matriciais lineares.

1 INTRODUÇÃO

A presença de atrasos em sistemas controlados digitalmente é inevitável. Sistemas robóticos, processos de usinagem, redes de comunicação de dados são exemplos de processos que partilham de atrasos que interferem tanto na estabilidade quanto no desempenho desses sistemas. Uma classe particularmente importante de sistemas é a que envolve processos industriais térmicos compreendendo, por exemplo, fornos usados em indústrias siderúrgicas (Teixeira et al., 2007) ou para tratamento térmico de metais (Chu et al., 1993). Essa classe é constituída por sistemas que, em geral, apresentam

Artigo submetido em 17/08/2007

1a. Revisão em 11/04/2008

2a. Revisão em 12/05/2008

Aceito sob recomendação do Editor Associado

Prof. José Roberto Castilho Piqueira

grande consumo de energia e a presença de atrasos significativos pode resultar em deterioração de desempenho. Por isso mesmo, a investigação de sistemas lineares sujeitos a atrasos nos estados tem recebido grande atenção nos últimos anos, como pode ser observado em vários livros nessa área. Veja, por exemplo, os trabalhos de Dugard and Verriest (1997), Mahmoud (2000), Niculescu (2001), Gu et al. (2003) e Niculescu and Gu (2004).

Condições para análise de estabilidade e para síntese de controladores estabilizantes para tais sistemas podem ser classificadas em dependentes ou independentes do atraso. Observa-se que a utilização de condições independentes do atraso, para análise de sistemas estáveis com atrasos limitados, pode levar a resultados muito conservadores. Por outro lado, condições dependentes do atraso levam, em geral, a resultados conservadores se aplicadas em sistemas cuja estabilidade independe do valor do atraso. Outro ponto importante é que as condições independentes do atraso não podem ser obtidas tomando-se o limite das formulações dependentes do atraso quando esse tende a infinito (Niculescu, 2001, pág. 146). As técnicas mais utilizadas para investigar sistemas com atrasos são as baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii ou em funcionais de Razumikhin (Niculescu, 2001). Trabalhos importantes nessa área e envolvendo uma formulação convexa para o problema são propostos por Li and de Souza (1995) e Li and de Souza (1996).

O estudo de sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados recebeu muito mais atenção nos últimos anos do que os sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados (SDTAE), como pode ser visto em Richard (2003) e referências internas. Uma das razões para isso vem do fato de que a estabilidade de SDTAE precisamente conhecidos pode ser investigada utilizando-se um sistema aumentado, que envolve estados atrasados (Åström and Wittenmark, 1984). Entretanto, essa técnica apresenta limitações importantes para o estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atrasos variantes no tempo e, sobretudo, para a síntese de controladores robustos (Kapila and Haddad, 1998). Portanto, pode-se dizer que trabalhos tratando de SDTAE são recentes na literatura. Além disso, a maior parte dos resultados encontrados na literatura é baseada na estabilidade quadrática, isto é, emprega-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii cujas matrizes são constantes e independentes da incerteza. Nesse contexto, em Shi et al. (2003) são propostas formulações não-convexas e independentes do atraso, que é considerado fixo no tempo, para síntese de controladores para SDTAE sujeitos a incertezas do tipo limitada em norma. Esse mesmo tipo de sistema é investigado por Xu and Chen (2004), porém o atraso é considerado variante no tempo. Entretanto, as formulações propostas não são convexas. Em Fridman and Shaked (2005a) e Fridman and Shaked (2005b) condições dependentes do atraso, con-

vexas para a análise de estabilidade e não-convexas para a síntese de controladores, são formuladas utilizando a abordagem de sistemas descritores. Nesses trabalhos são tratados tantos os sistemas com incertezas do tipo politópica (Fridman and Shaked, 2005a) quanto os sistemas com incertezas limitadas em norma (Fridman and Shaked, 2005b).

Recentemente, Liu et al. (2006) apresentaram condições que melhoram as propostas por Gao et al. (2004), porém a abordagem utilizada baseia-se na estabilidade quadrática e as condições de síntese dependem diretamente das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, o que pode levar a resultados conservadores. Além disso, as formulações obtidas para o caso de síntese de controladores não é convexa.

No contexto de sistemas incertos livres de atraso a estabilidade quadrática tem sido preterida em favor da estabilidade robusta, que emprega funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (de Oliveira et al., 1999), (Peaucelle et al., 2000), (Leite and Peres, 2003), (Leite, Montagner, de Oliveira, Oliveira, Ramos and Peres, 2004) em particular para sistemas invariantes no tempo. Porém, no contexto de SDTAE há poucos resultados que utilizam funcionais Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros. Recentemente, condições convexas independentes do atraso tanto para a síntese robusta de controladores quanto para a estabilização com desempenho \mathcal{H}_∞ garantido foram propostas por Leite, Tarbouriech and Peres (2004a) e Leite, Tarbouriech and Peres (2004b), respectivamente. Em Boukas (2006) condições convexas são propostas para análise e para síntese de ganho robusto para SDTAE precisamente conhecidos e com atrasos variantes no tempo.

Neste trabalho são apresentadas condições convexas dependentes do atraso, para análise de estabilidade e síntese robustas de SDTAE com incertezas politópicas e atrasos variantes no tempo. Essas condições são obtidas a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros e empregam variáveis extras que reduzem o conservadorismo das formulações propostas. A condição de síntese apresentada neste trabalho é convexa e pode ser resolvida de forma eficiente por meio de algoritmos de pontos interiores (Boyd et al., 1994). Os resultados propostos aqui podem ser vistos como melhorias nos trabalhos de Boukas (2006) e Liu et al. (2006). As técnicas propostas são aplicadas em um modelo incerto, com atrasos nos estados, obtido para um forno elétrico industrial usado para tratamento térmico (Chu et al., 1993). É demonstrado como podem ser obtidos controladores robustos para esse modelo, incluindo controladores descentralizados.

Notação: x_k denota o vetor de estado (discreto no tempo) na k -ésima amostragem. \mathbb{R} (\mathbb{R}_+) denota o conjunto dos números reais (positivos) e \mathbb{N} (\mathbb{N}_*) é o conjunto dos números na-

turais (excluído o 0). $\mathcal{I}[a, b]$ representa o intervalo de todos os inteiros j tais que $a \leq j \leq b$. \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ denotam, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula de dimensões apropriadas. $M = \text{bloco-diagonal}\{M_1, M_2\}$ denota uma matriz M formada pelas matrizes M_1 e M_2 na diagonal de M . $M > \mathbf{0}$ ($M < \mathbf{0}$) significa que a matriz M é definida positiva (negativa) M' e M^\perp denotam a transposta de M e uma base para o espaço nulo de M , respectivamente. O símbolo \star é utilizado para indicar os blocos simétricos em relação à diagonal principal nas LMIs. Φ_d denota o espaço das funções vetoriais discretas que mapeiam o intervalo $\mathcal{I}[-d, 0]$ em \mathbb{R}^n com $d \in \mathbb{N}_*$ finito. $\phi_t(k) \in \Phi_d$ denota uma seqüência composta de $d + 1$ vetores $x_k \in \mathbb{R}^n$, para $k \in \mathcal{I}[t - d, t]$. O j -ésimo termo dessa seqüência é $\phi_{t,j}(k) \in \mathbb{R}^n$. É definido

$$\|\phi_t(k)\|_D = \max_{j \in \mathcal{I}[1, (d+1)]} \|\phi_{t,j}(k)\|$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana de um vetor no \mathbb{R}^n . Φ_d^δ é o conjunto definido por $\Phi_d^\delta = \{\phi_t(k) \in \Phi_d : \|\phi_t(k)\|_D < \delta\}$, com $\delta \in \mathbb{R}_+$.

2 PRELIMINARES

Considere-se o sistema discreto no tempo sujeito a atrasos nos estados dado por

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d(k)} + B(\alpha)u_k \quad (1)$$

$$x_k = \phi_0(k), \quad k \in \mathcal{I}[-\bar{d}, 0] \quad (2)$$

em que k é o instante de amostragem, $x_k \equiv x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \equiv u(k) \in \mathbb{R}^\ell$ é a entrada de controle, $\phi_0(k) \in \Phi_{\bar{d}}$ é a condição inicial necessária para assegurar a unicidade à solução de (1). O atraso, denotado por $d(k)$, é suposto variante no tempo, sendo dado por:

$$d(k) \in \mathcal{I}[\underline{d}, \bar{d}], \quad (\underline{d}, \bar{d}) \in \mathbb{N}_* \times \mathbb{N}_* \quad (3)$$

com \underline{d} e \bar{d} representando os valores mínimo e máximo, respectivamente. Observe-se que no caso de atraso incerto e invariante no tempo, tem-se $\underline{d} = \bar{d}$. As matrizes $[A(\alpha)|A_d(\alpha)|B(\alpha)] \equiv [A|A_d|B](\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 2n+\ell}$ são invariantes no tempo, incertas e pertencentes ao politopo

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ [A|A_d|B](\alpha) : [A|A_d|B](\alpha) = \sum_{i=1}^N [A|A_d|B]_i \alpha_i, \alpha \in \Omega \right\} \quad (4)$$

$$\Omega \equiv \left\{ \alpha : \alpha \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (5)$$

Neste trabalho, os vértices do politopo \mathcal{P} , $[A_i|A_{di}|B_i] \equiv [A|A_d|B]_i$, são supostos conhecidos. A seguinte lei de controle é admitida para o sistema (1)

$$u(k) = Kx_k + K_d x_{k-d(k)} \quad (6)$$

em que $[K|K_d] \in \mathbb{R}^{\ell \times 2n}$ são os ganhos estáticos para realimentação de estados. É importante observar que se o atraso $d(k)$ não é conhecido, então basta fazer $K_d = \mathbf{0}$ em (6). Por outro lado, se $d(k)$ tem comportamento conhecido a cada instante k , então o uso de K e K_d pode ser explorado para melhorar o desempenho do sistema (1).

Levando-se (6) em (1) obtém-se

$$x_{k+1} = \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d(k)} \quad (7)$$

em que $\tilde{A}(\alpha) \equiv A(\alpha) + B(\alpha)K$ e $\tilde{A}_d(\alpha) \equiv A_d(\alpha) + B(\alpha)K_d$ pertencem ao politopo $\tilde{\mathcal{P}}$

$$\tilde{\mathcal{P}} \equiv \left\{ [\tilde{A}|\tilde{A}_d](\alpha) : [\tilde{A}|\tilde{A}_d](\alpha) = \sum_{i=1}^N [\tilde{A}|\tilde{A}_d]_i \alpha_i, \alpha \in \Omega \right\} \quad (8)$$

O seguinte resultado é empregado neste trabalho

Lema 1 (Lema de Finsler) Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\alpha) = \mathcal{Q}(\alpha)' \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que $\text{posto}(\mathcal{B}(\alpha)) < n$. As seguintes assertivas são equivalentes:

- i) $x' \mathcal{Q}(\alpha)x < \mathbf{0}, \forall x : \mathcal{B}(\alpha)x = \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$
- ii) $\mathcal{B}(\alpha)^\perp \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^\perp < \mathbf{0}$,
- iii) $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha) < \mathbf{0}$
- iv) $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0}$

Veja de Oliveira and Skelton (2001) para uma prova da versão do caso exato do lema de Finsler. A prova para o caso dependente de parâmetro segue passos similares.

Considere a seqüência formada por $\bar{d} + 1$ vetores nulos

$$\hat{\phi}_{\bar{d}} = \underbrace{\{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\}}_{(\bar{d}+1) \text{ elementos}}$$

Se $\phi_t(k) = \hat{\phi}_{\bar{d}}$, então essa é uma condição de equilíbrio para o sistema (7), pois neste caso, $x_{k+1} = x_k = \mathbf{0}, \forall k > t$.

Definição 1 A solução trivial de (7) é dita uniformemente assintoticamente estável se existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para toda condição inicial $\phi_0(k) \in \Phi_{\bar{d}}^\delta$ é verificado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{t,j}(k) = \mathbf{0}, \quad \forall j \in \mathcal{I}[t - \bar{d}, t]$$

Neste trabalho, é utilizada a seguinte definição de estabilidade robusta:

Definição 2 O sistema (7) sujeito a (3), (5) e (8) é dito *robustamente estável* se a solução trivial da equação a diferenças correspondente é uniformemente assintoticamente estável $\forall \alpha \in \Omega$.

O objetivo deste trabalho é propor condições convexas que propiciem soluções aos seguintes problemas:

Problema 1 Dados \underline{d} e \bar{d} sujeitos a (3), determine se o sistema (7) com (5) e (8) é robustamente estável.

Problema 2 Determine um par de ganhos $[K|K_d]$ tal que (1)-(5) controlado por (6) seja robustamente estável.

Para a proposição de soluções convexas para os problemas 1 e 2 são utilizados funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro. Isso reduz o conservadorismo das condições obtidas em relação ao caso em que esses funcionais são constantes e independentes de parâmetro. Neste trabalho o seguinte candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii é considerado

$$V(\alpha, k) = \sum_{v=1}^5 V_v(\alpha, k) > 0 \quad (9)$$

em que

$$V_1(\alpha, k) = x'_k P(\alpha) x_k, \quad (10)$$

$$V_2(\alpha, k) = \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} x'_j Q(\alpha) x_j, \quad (11)$$

$$V_3(\alpha, k) = \sum_{\ell=2-\underline{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} x'_j Q(\alpha) x_j, \quad (12)$$

$$V_4(\alpha, k) = \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y'_m Z(\alpha) y_m, \quad (13)$$

$$V_5(\alpha, k) = \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y'_j Z(\alpha) y_j, \quad (14)$$

$$y_j = x_{j+1} - x_j, \quad (15)$$

e as matrizes utilizadas em (10)-(14) são admitidas com a seguinte estrutura

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i; \quad Q(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_i; \quad (16)$$

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i \quad (17)$$

em que $\alpha \in \Omega$.

Para que (9) seja um funcional de Lyapunov-Krasovskii para (7) e, portanto, assegure a estabilidade robusta desse sistema, além de sua positividade, é necessário que

$$\Delta V(\alpha, k) = V(\alpha, k+1) - V(\alpha, k) < 0 \quad (18)$$

$$\forall [x'_k \ x'_{k-d(k)}]' \neq \mathbf{0} \text{ e } \forall \alpha \in \Omega.$$

Deste ponto em diante, a dependência em α nas parcelas $V_v(\alpha, k)$ são omitidas, sendo essas denotadas por $V_v(k)$, $v = 1, \dots, 5$.

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção são apresentados resultados para análise de estabilidade robusta de (7) e para a síntese de ganhos robustos tais que a lei de controle (6) aplicada em (1) resulte em um sistema robustamente estável em malha fechada.

3.1 Análise de estabilidade robusta

Teorema 1 Se existirem matrizes $P_i = P'_i > \mathbf{0}$, $Q_i = Q'_i > \mathbf{0}$, $Z_i = Z'_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, e matrizes $G_0, H_0, S_0, F_1, G_1, H_1, M_1, N_1, R_1, F_2, G_2, H_2, M_2, N_2, R_2$, de dimensões apropriadas, tais que as LMIs (19) sejam verificadas, com $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$, \underline{d} e \bar{d} conhecidos, então o sistema (7) sujeito a (3), (5) e (8) é robustamente estável, caracterizando uma solução para o Problema 1. Além disso, (9)-(15) com as matrizes dadas em em (16)-(17), é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (7).

Prova: A positividade do funcional (9) é claramente assegurada ao se exigir $P_i = P'_i > \mathbf{0}$, $Q_i = Q'_i > \mathbf{0}$, $Z_i = Z'_i > \mathbf{0}$ e assumir (16)-(17). Para calcular (18) considere-se:

$$\Delta V_1(k) = x'_{k+1} P(\alpha) x_{k+1} - x'_k P(\alpha) x_k \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &= x'_k Q(\alpha) x_k - x'_{k-d(k)} Q(\alpha) x_{k-d(k)} \\ &+ \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x'_i Q(\alpha) x_i - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x'_i Q(\alpha) x_i \quad (21) \end{aligned}$$

Seja o primeiro somatório que aparece em (21) denotado por $\Xi_k \equiv \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x'_i Q(\alpha) x_i$. Esse somatório pode ser reescrito como

$$\Xi_k = \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-\underline{d}} x'_i Q(\alpha) x_i + \sum_{i=k-(\underline{d}-1)}^{k-1} x'_i Q(\alpha) x_i, \quad (22)$$

Sabendo que $d(k+1) \leq \bar{d}$ e que $\underline{d} \leq d(k)$, pode-se majorar (22) como

$$\Xi_k \leq \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x'_i Q(\alpha) x_i + \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x'_i Q(\alpha) x_i \quad (23)$$

$$\Lambda_i \equiv \begin{bmatrix} P_i + F'_1 + F_1 - F_2 - F'_2 & G'_1 - G'_2 - F_1 \tilde{A}_i + F_2 & H'_1 - F_1 \tilde{A}_{di} - H'_2 \\ * & \left(\begin{array}{l} G_2 + G'_2 - \tilde{A}'_i G'_1 - G_1 \tilde{A}_i \\ + \beta Q_i - P_i + G_0 + G'_0 \end{array} \right) & H'_0 - G_0 - \tilde{A}'_i H'_1 + H'_2 - G_1 \tilde{A}_{di} \\ * & * & -(Q_i + H_1 \tilde{A}_{di} + \tilde{A}'_{di} H'_1 + H_0 + H'_0) \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ F_2 + M'_1 - M'_2 & N'_1 - N'_2 & R'_1 - R'_2 & \mathbf{0} \\ G_2 - \tilde{A}'_i M'_1 + M'_2 & N'_2 - \tilde{A}'_i N'_1 & R'_2 - \tilde{A}'_i R'_1 & S'_0 - G_0 \\ H_2 - \tilde{A}'_{di} M'_1 & -\tilde{A}'_{di} N'_1 & -\tilde{A}'_{di} R'_1 & -(S'_0 + H_0) \\ M_2 + M'_2 + (\bar{d} + 1)Z_i & N'_2 & R'_2 & \mathbf{0} \\ * & -Z_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -Z_i & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{0} & -(S'_0 + S_0) \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad i = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Portanto, usando-se (23) em (21), obtém-se

$$\Delta V_2(k) \leq x'_k Q(\alpha) x_k - x'_{k-d(k)} Q(\alpha) x_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\bar{d}} x'_i Q(\alpha) x_i \quad (24)$$

Calculando-se $\Delta V_3(k)$, tem-se:

$$\Delta V_3(k) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\bar{d}} \left[\sum_{j=k+\ell}^k x'_j Q(\alpha) x_j - \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} x'_j Q(\alpha) x_j \right] \quad (25)$$

$$\Delta V_3(k) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\bar{d}} \left[x'_k Q(\alpha) x_k - x'_{k+\ell-1} Q(\alpha) x_{k+\ell-1} + \sum_{j=k+\ell}^{k-1} x'_j Q(\alpha) x_j - \sum_{j=k+\ell}^{k-1} x'_j Q(\alpha) x_j \right] \quad (26)$$

Fazendo-se a mudança de variável: $i = k + \ell - 1$, tem-se

$$\Delta V_3(k) = (\bar{d} - \underline{d}) x'_k Q(\alpha) x_k - \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\bar{d}} x'_i Q(\alpha) x_i \quad (27)$$

Calculando-se $\Delta V_4(k)$ tem-se

$$\Delta V_4(k)(y_k) = \bar{d} y'_k Z(\alpha) y_k - \sum_{j=-\bar{d}}^{-1} y'_{k+j} Z(\alpha) y_{k+j} \quad (28)$$

Observe-se que o somatório em (28) pode ser reescrito como

$$\hat{\Xi}_k \equiv \sum_{j=-\bar{d}}^{-1} y'_{k+j} Z(\alpha) y_{k+j} = y'_{k-\bar{d}} Z(\alpha) y_{k-\bar{d}} + \sum_{j=-(\bar{d}-1)}^{-1} y'_{k+j} Z(\alpha) y_{k+j} \quad (29)$$

Realizando-se a mudança de variável $i = k + 1 - \bar{d}$ obtém-se

$$\hat{\Xi}_k = y'_{k-\bar{d}} Z(\alpha) y_{k-\bar{d}} + \sum_{i=k-\bar{d}+1}^{k-1} y'_i Z(\alpha) y_i > y'_{k-\bar{d}} Z(\alpha) y_{k-\bar{d}} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\bar{d}} y'_i Z(\alpha) y_i \quad (30)$$

Levando-se (30) em (28) obtém-se:

$$\Delta V_4(k)(y_k) \leq \bar{d} y'_k Z(\alpha) y_k - y'_{k-\bar{d}} Z(\alpha) y_{k-\bar{d}} - \sum_{i=k-\bar{d}+1}^{k-\bar{d}} y'_i Z(\alpha) y_i \quad (31)$$

Calculando-se $\Delta V_5(k)$, tem-se

$$\Delta V_5(k) = y'_k Z(\alpha) y_k - y'_{k-d(k)} Z(\alpha) y_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} y'_i Z(\alpha) y_i - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} y'_i Z(\alpha) y_i \quad (32)$$

Observe-se que os passos seguidos em (21)-(24) podem ser utilizados de forma análoga para majorar o somatório

$\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} y'_i Z(\alpha) y_i$ que aparece em (32). Assim, pode-se obter

$$\Delta V_5 \leq y'_k Z(\alpha) y_k - y'_{k-d(k)} Z(\alpha) y_{k-d(k)} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} y'_i Z(\alpha) y_i \quad (33)$$

Usando-se (20), (24), (27), (31) e (33) a expressão (18) pode ser majorada como

$$\begin{aligned} \Delta V(\alpha, k) &\leq x'_{k+1} P(\alpha) x_{k+1} \\ &+ x'_k [\beta Q(\alpha) - P(\alpha)] x_k - x'_{k-d(k)} Q(\alpha) x_{k-d(k)} \\ &+ y'_k (\bar{d} + 1) Z(\alpha) y_k - y'_{k-\bar{d}} Z(\alpha) y_{k-\bar{d}} \\ &- y'_{k-d(k)} Z(\alpha) y_{k-d(k)} < 0 \quad (34) \end{aligned}$$

em que $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$. Usando o Lema 1 em (34), com

$$\omega = [x'_{k+1} \ x'_k \ x'_{k-d(k)} \ y'_k \ y'_{k-\bar{d}} \ y'_{k-d(k)}]'$$

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \text{bloco-diagonal} \left\{ \begin{array}{l} P(\alpha), \beta Q(\alpha) - P(\alpha), -Q(\alpha), \\ (\bar{d} + 1)Z(\alpha), -Z(\alpha), -Z(\alpha) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{A}(\alpha) & -\tilde{A}_d(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} e$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha) & F_2(\alpha) \\ G_1(\alpha) & G_2(\alpha) \\ H_1(\alpha) & H_2(\alpha) \\ M_1(\alpha) & M_2(\alpha) \\ N_1(\alpha) & N_2(\alpha) \\ R_1(\alpha) & R_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

pode-se escrever que uma condição equivalente a (34) é dada por $\Phi(\alpha) < 0$, em que $\Phi(\alpha) = \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)'$ é apresentada em (35). Observe que, se $\Phi(\alpha) < 0$ é verificada, então $\Lambda(\alpha) \equiv \omega'\Phi(\alpha)\omega + \mathcal{N}(\alpha) < 0$ também é verificada $\forall \mathcal{N}(\alpha) \equiv 0$. Escolhendo-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\alpha) &= 2[x'_k G_0(\alpha) + x'_{k-d(k)} H_0(\alpha) + \eta'_k S_0(\alpha)] \\ &\times [x_k - x_{k-d(k)} - \eta_k] \quad (36) \end{aligned}$$

em que $\eta_k \equiv \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y_j$, com y_j definido em (15), $P(\alpha)$,

$Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dadas em (16)-(17), $F_1(\alpha) = F_1$, $G_1(\alpha) = G_1$, $H_1(\alpha) = H_1$, $M_1(\alpha) = M_1$, $N_1(\alpha) = N_1$, $R_1(\alpha) = R_1$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H_2(\alpha) = H_2$, $M_2(\alpha) = M_2$, $N_2(\alpha) = N_2$, $R_2(\alpha) = R_2$, $G_0(\alpha) = G_0$, $H_0(\alpha) =$

H_0 e $S_0(\alpha) = S_0$, todas de dimensões $n \times n$, pode ser verificado que $\Lambda(\alpha) = \tilde{\omega}' \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \Lambda_i \right) \tilde{\omega} < 0$, com $\tilde{\omega} = [\omega', \eta'_k]'$, $\alpha \in \Omega$ e $\Lambda_i < \mathbf{0}$, completando a prova. \square

Destaca-se que a adição do termo nulo (36) à condição obtida do Lema de Finsler não introduz dinâmica adicional no sistema, entretanto, as condições obtidas são menos conservadoras. Condições da estabilidade quadrática são recuperadas do Teorema 1 fazendo-se $P_i = P$, $Q_i = Q$ e $Z_i = Z$, $i = 1, \dots, N$ em (19). A condição resultante é um conjunto de LMIs com variáveis de folga e matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, (9), independentes do parâmetro α . Neste caso, as matrizes $\tilde{A}(\alpha)$ e $\tilde{A}_d(\alpha)$ podem ser variantes no tempo, isto é, $\alpha = \alpha(k)$.

É interessante observar que as condições LMIs fornecidas no Teorema 1 contêm variáveis de folga que não formam produtos com as matrizes do sistema nem com as matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii. São elas: F_2 , G_2 , H_2 , M_2 , N_2 , R_2 , G_0 , H_0 e S_0 . Essas matrizes podem, portanto, ser consideradas dependentes de parâmetro e, eventualmente, com a mesma estrutura de $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dadas em (16) e (17). Pode ser que, nesse caso, as LMIs resultem em condições menos conservadoras. Entretanto, essa extensão não é investigada neste trabalho.

Uma condição independente do atraso pode ser obtida de $\Lambda_i < 0$, com Λ_i dado em (19), eliminando-se os blocos de matrizes correspondentes às linhas 4, 5 e 6 e respectivas colunas e fazendo $Z_i = \mathbf{0}$ em (17), ou seja, fazendo $V_4(\alpha, k) = V_5(\alpha, k) = 0$. Essa condição é apresentada no corolário seguinte.

Corolário 1 Se existirem matrizes $P_i = P'_i > \mathbf{0}$, $Q_i = Q'_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, e $G_0, H_0, S_0, F_1, G_1, H_1, F_2, G_2, H_2$, de dimensões apropriadas, tais que as LMIs (37) sejam verificadas, com $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$, \underline{d} e \bar{d} conhecidos, então o sistema (7) sujeito a (5) e (8) é robustamente estável independentemente do valor atraso. Nesse caso, o atraso pode ser variante no tempo, desde que $|d(k+1) - d(k)| \leq \beta - 1$. Além disso,

$$V(\alpha, k) = \sum_{v=1}^3 V_v(\alpha, k) > 0 \quad (38)$$

com V_v , $v = 1, \dots, 3$, dados em (10)-(12) e matrizes $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ dadas em (16) com $\alpha \in \Omega$, é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (7).

É interessante observar que a condição do Corolário 1 não pode ser obtida diretamente de (19) simplesmente tomando

$$\Phi(\alpha) \equiv \begin{bmatrix} F_1(\alpha) + F_1(\alpha)' & G_1(\alpha)' + F_2(\alpha) & H_1(\alpha)' - H_2(\alpha)' - F_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) \\ -F_2(\alpha) - F_2(\alpha)' & -G_2(\alpha)' - F_1(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & H_2(\alpha)' - \tilde{A}(\alpha)'H_1(\alpha)' \\ * & G_2(\alpha) + G_2(\alpha)' & -G_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) \\ * & -G_1(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - \tilde{A}(\alpha)'G_1(\alpha)' & -G_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) \\ * & * & -(H_1(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'H_1(\alpha)') \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\Theta_i \equiv \begin{bmatrix} P_i + F_1' + F_1 & G_1' - F_2 - F_1\tilde{A}_i & H_1' + F_2' - F_1\tilde{A}_{di} & F_2 + G_2' \\ * & -\tilde{A}_i'G_1' - G_1\tilde{A}_i & G_0 - H_0' & G_0 - S_0' - A_i'G_2' \\ * & +\beta Q_i - P_i - G_0 - G_0' & -G_1\tilde{A}_{di} - \tilde{A}_i'H_1' & H_0 + S_0' - A_{di}'G_2' \\ * & * & H_2 + H_2' - Q_i & S_0 + S_0' \\ * & * & -H_1\tilde{A}_{di} - \tilde{A}_{di}'H_1' & * \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (37)$$

o limite $\bar{d} \rightarrow \infty$. Além disso, a condição proposta no Corolário 1 admite que o atraso tenha taxa de variação limitada em módulo igual a $\bar{d} - \underline{d}$. Caso $\underline{d} = \bar{d}$, então o atraso é assumido invariante no tempo.

Finalmente, observa-se que as condições propostas tanto no Teorema 1 quanto no Corolário 1 podem ser usadas para testar a estabilidade robusta do sistema formado pelas matrizes A_i e A_{di} ou, de forma equivalente, do sistema obtido de (7) substituindo-se A_i por A_i' e A_{di} por A_{di}' , $i = 1, \dots, N$.

Exemplo 1: Seja o sistema discreto no tempo com atrasos nos estados, equação (7), investigado por Leite, Tarbouriech and Peres (2004b) em que os vértices do politopo $\tilde{\mathcal{P}}$ são dados por

$$[\tilde{A}_1 | \tilde{A}_{d1}] = \begin{bmatrix} -0.545 & -0.43 & 0.24 & 0.07 \\ 0.185 & -0.61 & -0.12 & 0.09 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[\tilde{A}_2 | \tilde{A}_{d2}] = \begin{bmatrix} -0.455 & -0.37 & 0.36 & 0.13 \\ 0.215 & -0.59 & -0.08 & 0.11 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Em Leite, Tarbouriech and Peres (2004b), a estabilidade robusta independente do atraso é assegurada desde que o atraso seja invariante no tempo. Neste caso, são usadas matrizes de Lyapunov-Krasovskii fixas (independentes da incer-

teza). Empregando-se o Corolário 1, e variando-se o valor de β , verifica-se para (39)-(40) a estabilidade robusta independentemente do atraso *variante no tempo* desde que $d(k+1) - d(k) \in \{-1, 0, 1\}$.

Exemplo 2: Seja o SDTAE precisamente conhecido investigado por Liu et al. (2006) e descrito por (7) com

$$[A | A_d] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.35 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Em Liu et al. (2006) esse sistema é identificado como estável para $d(k) \in \mathcal{I}[2, 13]$. Utilizando-se o Teorema 1, fixando-se $\underline{d} = 2$ e aumentando-se o valor de \bar{d} , pode-se assegurar sua estabilidade para um intervalo menor dado por $d(k) \in \mathcal{I}[2, 10]$. Porém esse teorema resulta em condições convexas para síntese que levam a resultados menos conservadores, como é apresentado adiante. Por outro lado, usando o Corolário 1, é possível verificar que esse sistema é estável independentemente do atraso para $|d(k+1) - d(k)| < 8$.

Exemplo 3: Suponha que o sistema investigado no Exemplo 2 tenha suas matrizes afetadas por incertezas de forma que o sistema possa ser descrito por um politopo em que um vértice seja dado por (41) e o outro por $1.1[A | A_d]$. Usando as condições do Teorema 1 com $\underline{d} = 2$ e aumentando-se o

valor de \bar{d} desde $\bar{d} = 2$, pode-se verificar a estabilidade desse sistema incerto até $\bar{d} = 5$, ou seja, $d(k) \in \mathcal{I}[2, 5]$. Note que, devido a presença de incertezas politópicas, as condições propostas por Liu et al. (2006) não podem ser aplicadas a este caso.

3.2 Síntese robusta

As condições de análise de estabilidade robusta dadas pelo Teorema 1 são utilizadas para derivar uma condição convexa para a síntese de ganhos robustos K e K_d tais que a lei de controle (6) aplicada em (1) resulte em um sistema robustamente estável em malha fechada, sendo, portanto, uma solução para o Problema 2.

Teorema 2 Se existirem matrizes $P_i = P'_i > \mathbf{0}$, $Q_i = Q'_i > \mathbf{0}$, $Z_i = Z'_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, e $G_0, H_0, S_0, F_2, G_2, H_2, M_2, N_2, R_2, F, W, W_d$, de dimensões apropriadas, tais que as LMIs (43) sejam verificadas, com $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$, \underline{d} e \bar{d} conhecidos, então a malha fechada do sistema (1) sujeito a (3)-(5) e lei de controle dada por (6) em que

$$K = W'(F')^{-1} \text{ e } K_d = W'_d(F'_d)^{-1} \quad (42)$$

é robustamente estável, caracterizando uma solução para o Problema 2. Além disso, (9)-(15) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade robusta da malha fechada, com $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$ dadas em (16)-(17).

Prova: A prova pode ser obtida a partir da condição apresentada no Teorema 1: fazendo-se $F_1 = F$, $G_1 = H_1 = M_1 = N_1 = R_1 = 0$, substituindo-se \tilde{A}_i e \tilde{A}_{di} por $(A_i + B_i K)'$ e $(A_{di} + B_i K_d)'$, respectivamente, e realizando-se as mudanças de variáveis $FK' = W$ e $FK'_d = W_d$. \square

De forma semelhante à adotada para o caso de análise de estabilidade robusta, pode ser obtida uma condição de síntese robusta que seja independente do atraso. Neste caso, tem-se o corolário que segue.

Corolário 2 Se existirem matrizes $P_i = P'_i > \mathbf{0}$, $Q_i = Q'_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, e $G_0, H_0, S_0, F, F_2, G_2, H_2, W$ e W_d , de dimensões apropriadas, tais que as LMIs (44) sejam verificadas, com $\beta = \bar{d} - \underline{d} + 1$, \underline{d} e \bar{d} conhecidos, então o sistema (7) sujeito a (5) e (8) é robustamente estabilizável, independentemente do valor atraso, por meio dos ganhos robustos K e K_d dados em (42). Neste caso, o atraso pode ser variante no tempo, desde que $|\Delta d_k| \leq \beta - 1$, $\Delta d_k \equiv d(k+1) - d(k)$. Além disso,

$$V(\alpha, k) = \sum_{v=1}^3 V_v(\alpha, k) > 0 \quad (45)$$

com V_v , $v = 1, \dots, 3$, dados em (10)-(12) e matrizes $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ dadas em (16) com $\alpha \in \Omega$, é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (7).

A condição de síntese fornecida no Corolário 2 é interessante, pois não depende de \bar{d} , mas sim da diferença $\bar{d} - \underline{d}$, como no caso do Corolário 1. No caso do valor do atraso ser conhecido, é sempre possível utilizar os ganhos K e K_d para estabilizar o sistema. Caso o valor do atraso não esteja disponível a cada amostragem, apenas K deve ser empregado, resultando no caso particular de um controle sem memória. Entretanto, em ambos os casos o atraso pode alcançar valores tão grandes quanto se queira desde que sua taxa de variação, $\Delta d \equiv d(k+1) - d(k)$, seja limitada por $|\Delta d_k| \leq \beta - 1$. Caso $\Delta d_k \equiv 0$, então o valor do atraso é fixo, porém qualquer.

Um aspecto importante da formulação proposta neste trabalho é que os resultados podem ser facilmente empregados para tratar o problema de controle descentralizado. Neste caso deve-se impor uma estrutura bloco diagonal às matrizes $F = F_D = \text{bloco-diagonal}\{F^1, \dots, F^\kappa\}$, $W = W_D = \text{bloco-diagonal}\{W^1, \dots, W^\kappa\}$, $W_d = W_{dD} = \text{bloco-diagonal}\{W_d^1, \dots, W_d^\kappa\}$ em que κ denota o número de subsistemas considerados. Essa restrição permite obter ganhos robustos bloco-diagonais para a realimentação de estados utilizando (42) que passa a ser escrita como $K_D = W'_D(F'_D)^{-1}$ e $K_{dD} = W'_{dD}(F'_{dD})^{-1}$. Observe que as matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $Z(\alpha)$, não sofrem nenhum tipo de restrição estrutural. Isto torna o procedimento de síntese proposto aqui ainda menos conservador.

Observe ainda que as condições propostas nos teoremas e corolários apresentados neste trabalho também podem ser empregadas para tratar os problemas de análise de estabilidade robusta e síntese de controladores robustos na presença de falhas de atuadores. Isto pode ser feito modelando tais falhas como incertezas afetando a matriz de controle do sistema.

Nos Teoremas 1 e 2 e nos Corolários 1 e 2 as incertezas que afetam as matrizes do sistema são supostas invariantes no tempo. Essa hipótese pode ser relaxada ao se impor $P_i = P$, $Q_i = Q$ e $Z_i = Z$, $i = 1, \dots, N$ nas condições correspondentes. Isto é, pode-se empregar a abordagem da estabilidade quadrática que utiliza um funcional de Lyapunov-Krasovskii fixo e independente de parâmetros. Assim, com as matrizes do funcional fixas, admite-se que além do atraso variar no tempo, as incertezas que afetam a dinâmica do sistema também estejam sujeitas a variações no tempo.

A complexidade numérica das condições propostas neste trabalho depende do número de variáveis, \mathcal{K} , e número de linhas, \mathcal{L} , envolvidas em cada formulação LMI. Utilizando o *LMI Control Toolbox* o número de operações em ponto

$$A = \begin{bmatrix} 0.97421 & 0.15116 & 0.19667 & -0.05870 & 0.07144 \\ -0.01455 & 0.88914 & 0.26953 & 0.11866 & -0.22047 \\ 0.06376 & 0.12056 & 1.00049 & -0.03491 & -0.02766 \\ -0.05084 & 0.09254 & 0.28774 & 0.82569 & 0.02570 \\ 0.01723 & 0.01939 & 0.29285 & 0.03544 & 0.87111 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.01000 & -0.08837 & -0.06989 & 0.18874 & 0.20505 \\ 0.02363 & 0.03384 & 0.05282 & -0.09906 & -0.00191 \\ -0.04468 & -0.00798 & 0.05618 & 0.00157 & 0.03593 \\ -0.04082 & 0.01153 & -0.07116 & 0.16472 & 0.00083 \\ -0.02537 & 0.03878 & -0.04683 & 0.05665 & -0.03130 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.53706 & -0.11185 & 0.09978 & 0.04652 & 0.25867 \\ -0.51718 & 0.73519 & 0.57518 & 0.40668 & -0.12472 \\ 0.29469 & 0.31528 & 1.16420 & -0.29922 & 0.23883 \\ -0.20191 & 0.19739 & 0.41686 & 0.66551 & 0.11366 \\ -0.11835 & 0.16287 & 0.20378 & 0.23261 & 0.36525 \end{bmatrix} \quad (49)$$

1 é apresentado um diagrama esquemático do forno.

O atraso do sistema foi identificado como sendo fixo e igual a 15 amostragens.

Note que a matriz A não é Schur-estável. Em Chu (1995) é projetado um ganho por realimentação de estados no contexto de controle ótimo, usando condições que envolvem a construção de um sistema aumentado de ordem 85×85 . Em Leite (2005) esse modelo foi investigado supondo a presença de incertezas. Nesse caso, foram introduzidas as seguintes incertezas:

$$\left. \begin{aligned} A(\rho) &= A(1 + \rho) \\ A_d(\theta) &= A_d(1 + \theta) \\ B(\sigma) &= B(1 + \sigma) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

em que $|\rho| \leq 0.3$, $|\theta| \leq 0.3$ e $|\sigma| \leq 0.08$ e atraso fixo $d(k) = \underline{d} = \bar{d} = 15$ amostragens. O sistema incerto descrito por (50) pode ser colocado na forma (1)-(4) em que \mathcal{P} é determinado por 8 vértices obtidos pelas combinações dos valores extremos dos parâmetros ρ , θ e σ . Deve-se ressaltar que as condições utilizadas por Leite (2005) são do tipo independentes do atraso.

Na prática, o valor do atraso pode ser variante no tempo já

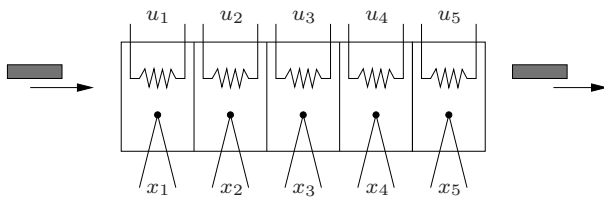


Figura 1: Diagrama esquemático do forno para tratamento de metais.

que esse pode ser afetado, por exemplo, pela velocidade com que a peça é transportada no interior do forno ou pelo tamanho da peça, o que pode acarretar uma maior ou menor transferência de calor entre as zonas do forno. Assim, é mais próximo da realidade pensar que o atraso identificado por Chu et al. (1993), $d_n = 15$ amostragens, é apenas o valor nominal do atraso. É razoável, portanto, considerar que o valor de $d(k)$ deva variar em torno desse valor, ou seja, $d_n - \tau \leq d(k) \leq d_n + \tau$, $\tau \in \mathbb{N}$, $\tau < d_n$.

Neste estudo de caso, o modelo incerto (50) é utilizado para investigar a síntese de controladores robustos descentralizados em dois casos diferentes: *i*) atraso fixo ($\underline{d} = \bar{d}$) e *ii*) atraso variante no tempo ($\underline{d} \leq d(k) \leq \bar{d}$). Em ambos os casos foram investigadas estruturas descentralizadas em que os ganhos robustos, K e K_d , são obtidos a partir da imposição de estrutura bloco-diagonal nas variáveis F , W e W_d .

Destaca-se que em todas as simulações apresentadas nesta seção, foram utilizadas condições iniciais não nulas dadas por $x_k \in \phi_0(k)$, $k \in \mathcal{I}[-\bar{d}, 0]$, $\phi_{0, \bar{d}+1} = [10, -10, 5, -5, 8]'$, $\phi_{0, \ell} = \mathbf{0}$, $\ell \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$. Esses valores foram obtidos por Chu (1995) como sendo desvios típicos das temperaturas em cada zona do forno. Em todas as respostas temporais o comportamento de cada um dos cinco estados, x_i , $i = 1, \dots, 5$, é apresentado para cada um dos 8 vértices do polítopo que define o sistema em malha fechada.

Caso i) atraso invariante no tempo

No primeiro caso, atraso fixo, foram projetados controladores robustos para realimentação de estados utilizando-se o Teorema 2. Em particular, para estrutura diagonal em F , W e W_d , são obtidos

$$K = \text{bloco-diagonal} \{ -1.36440, -1.29862, \\ -0.69249, -0.55833, -2.43534 \} \quad (51)$$

$$K_d = \text{bloco-diagonal} \{ 0.11988, 0.02260, \\ -0.13180, -0.23224, -0.06422 \} \quad (52)$$

com $\underline{d} = \bar{d} = 15$, que asseguram a estabilidade robusta do sistema incerto em malha fechada. A Figura 2 mostra o comportamento dos estados do sistema incerto em malha fechada, empregando-se K e K_d dados em (51) e (52), para uma condição inicial $x_k \in \phi_0(k)$, $k \in \mathcal{I}[-\bar{d}, 0]$, $\phi_{0,\bar{d}+1} = [10, -10, 5, -5, 8]'$, $\phi_{0,\ell} = \mathbf{0}$, $\ell \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$.

Impondo-se $K_d = 0$, isto é, fazendo $W_d = 0$ nas condições do Teorema 2, busca-se um K que estabilize o sistema. Neste caso, entretanto, não é possível obter um ganho totalmente desacoplado ou mesmo com estruturas $\{1, 1, 1, 2\}$, $\{1, 1, 2, 1\}$, em que a ordem dos blocos diagonais estão indicadas pelos elementos das listas. Para a estrutura $\{1, 2, 1, 1\}$ é obtido o ganho

$$K = \text{bloco-diagonal} \left\{ -1.3610, \begin{bmatrix} -1.32023 & 0.53030 \\ 0.05224 & -0.91340 \end{bmatrix}, -0.60136, -2.02852 \right\} \quad (53)$$

A Figura 3 mostra o comportamento dos estados do sistema incerto em malha fechada empregando apenas K dado em

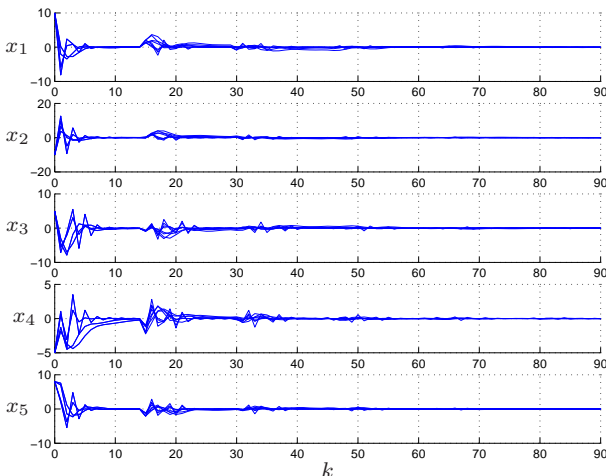


Figura 2: Estados x_1 a x_5 , com atraso fixo ($d(k) = 15$), ganhos de realimentação de estados (51) e (52).

(53), para uma condição inicial $x_k \in \phi_0(k)$, $k \in \mathcal{I}[-\bar{d}, 0]$, $\phi_{0,\bar{d}+1} = [10, -10, 5, -5, 8]'$, $\phi_{0,\ell} = \mathbf{0}$, $\ell \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$.

Pode-se observar nas Figuras 2 e 3 o efeito de $x(t - d_n)$ a cada 15 amostragens. Observa-se ainda que o comportamento no tempo do controlador empregando K e K_d diagonais, Figura 2, é um pouco melhor que o comportamento obtido com $K_d = \mathbf{0}$ e K com estrutura bloco-diagonal $\{1, 2, 1, 1\}$, Figura 3. Essa diferença é evidenciada, por exemplo, no estado x_4 que tem um tempo de estabilização maior para o último caso.

Caso ii) atraso variante no tempo

Seja o modelo incerto do forno de tratamento térmico de metais sujeito a atrasos variantes no tempo, $\underline{d} \leq d(k) \leq \bar{d}$. Utilizando as condições do Teorema 2, foi realizada uma busca linear em \bar{d} para $\underline{d} = 1$. O valor limite de \bar{d} que se consegue determinar um par de ganhos estabilizantes $[K|K_d]$ é $\bar{d}_{\max} = 179$. Neste caso, os ganhos são dados por

$$K = \begin{bmatrix} \frac{-1853}{882} & \frac{-912}{1279} & \frac{293}{8551} & \frac{467}{1044} & \frac{743}{973} \\ \frac{-2320}{1443} & \frac{-573}{464} & \frac{-272}{1181} & \frac{2148}{1775} & \frac{229}{398} \\ \frac{1093}{1522} & \frac{728}{2875} & \frac{-493}{956} & \frac{-582}{1055} & \frac{-62}{5811} \\ \frac{-2335}{4086} & \frac{-95}{424} & \frac{163}{1044} & \frac{-1034}{1103} & \frac{235}{1299} \\ \frac{443}{6869} & \frac{751}{1450} & \frac{-1462}{2313} & \frac{2512}{10657} & \frac{-1130}{583} \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} \frac{-342}{6245} & \frac{332}{1401} & \frac{203}{3676} & \frac{-713}{3009} & \frac{-478}{901} \\ \frac{-425}{2969} & \frac{134}{1325} & \frac{-108}{1471} & \frac{320}{1741} & \frac{-910}{2417} \\ \frac{337}{3876} & \frac{-262}{5943} & \frac{-487}{17489} & \frac{-94}{1579} & \frac{354}{2479} \\ \frac{496}{20381} & \frac{406}{6067} & \frac{437}{2996} & \frac{-819}{2503} & \frac{-601}{3831} \\ \frac{411}{7559} & \frac{-375}{4027} & \frac{226}{2117} & \frac{-108}{1375} & \frac{650}{6259} \end{bmatrix}$$

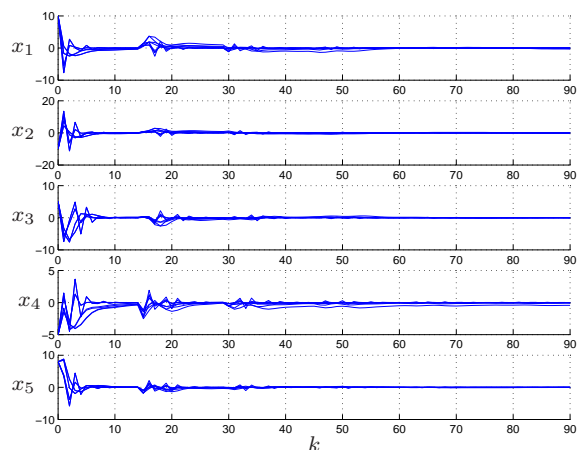


Figura 3: Estados x_1 a x_5 , com atraso fixo ($d(k) = 15$), controle sem memória (apenas (53)).

Para o valor de atraso apresentado por Chu et al. (1993) e Chu (1995), $d = 15$, considere o atraso $d(k)$ com uma possível variação de ± 5 em torno do valor nominal, isto é, $d(k) \in \mathcal{I}[10, 20]$. Neste caso, as condições do Teorema 2 são factíveis para a síntese de K e K_d com estrutura diagonal $\{2, 3\}$, resultando em

$$K = \text{bloco-diagonal} \left\{ \begin{bmatrix} -1.5548 & -0.6193 \\ -0.9016 & -1.2279 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6038 & 0.1792 & 0.4155 \\ 0.1234 & -1.0495 & -0.1460 \\ -0.6475 & -0.1401 & -2.2748 \end{bmatrix} \right\} \quad (54)$$

$$K_d = \text{bloco-diagonal} \left\{ \begin{bmatrix} 0.0259 & 0.1872 \\ 0.0534 & 0.0364 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.0843 & 0.0817 & 0.0022 \\ 0.0909 & -0.1397 & 0.0912 \\ 0.1878 & -0.3059 & -0.1465 \end{bmatrix} \right\} \quad (55)$$

Essa mesma estrutura é inactível se $K_d = \mathbf{0}$. Nesse caso, é possível obter soluções factíveis para as condições do Teorema 2 para as estruturas $\{4, 1\}$ e $\{5\}$, sendo que para a primeira é obtido

$$K = \text{bloco-diagonal} \left\{ \begin{bmatrix} -2.2232 & -0.6719 & -0.2830 & 0.7448 \\ -1.7219 & -1.8021 & 0.1203 & 1.2052 \\ 0.7540 & 0.5952 & -0.8459 & -0.4497 \\ -0.5966 & -0.0592 & -0.1011 & -0.7824 \end{bmatrix}, -1.7946 \right\} \quad (56)$$

Nas Figuras 4 e 5 são apresentadas simulações para o comportamento dos estados do sistema. Na Figura 4 foi utilizada a lei de controle (6) com K e K_d dados em (54) e (55), enquanto que na Figura 5 foi utilizado $K_d = \mathbf{0}$ e K dado em (56). Em ambos os casos são mostradas simulações para cada um dos 8 vértices dos polítopos que determinam os sistemas em malha fechada. O comportamento do atraso $d(k)$, empregado em ambas as simulações, é apresentado na Figura 6.

Não é observada nas Figuras 4 e 5 a correlação dos sinais de x_i , $i = 1, \dots, 5$, com o valor do atraso conforme foi verificado para o caso de atraso fixo. Isto deve-se à utilização de uma distribuição aleatória e uniforme para os valores de $d(k)$, conforme indicado na Figura 6. Observa-se ainda que o comportamento no tempo do sistema em malha fechada empregando a estrutura $\{4, 1\}$ com $K_d = \mathbf{0}$ produz uma convergência dos estados para a origem em menos tempo que aquela obtida com K e K_d com estrutura $\{2, 3\}$.

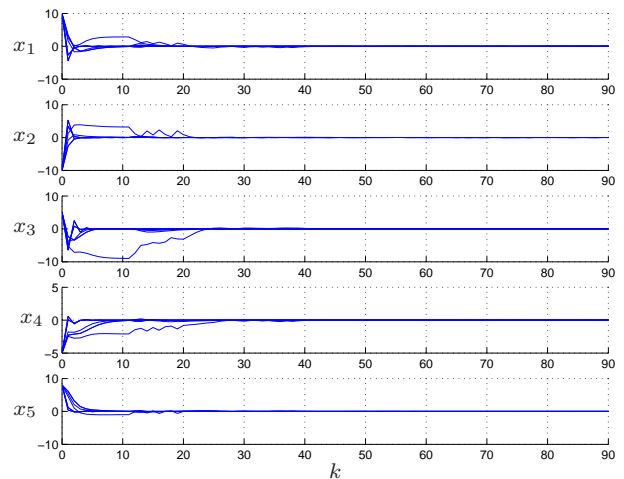


Figura 4: Estados x_1 a x_5 , com $d(k) \in \mathcal{I}[1, 20]$ (veja Figura 6), controle usando K e K_d dados em (54) e (55).

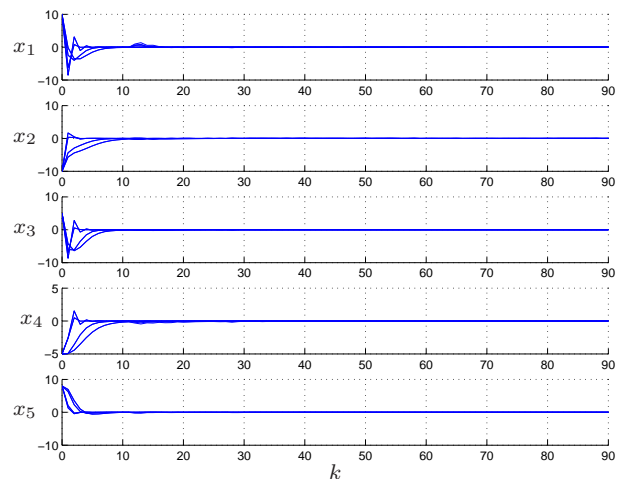


Figura 5: Estados x_1 a x_5 , com $d(k) \in \mathcal{I}[1, 20]$ (veja Figura 6), controle usando $K_d = \mathbf{0}$ e K dado em (56).

5 CONCLUSÕES

São apresentadas condições convexas dependentes do atraso na forma de testes de factibilidade de LMIs para a análise de estabilidade robusta e para a síntese de ganhos para realimentação de estados para sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo. São derivadas tanto condições do tipo dependente do atraso quanto do tipo independente do atraso. As principais vantagens da abordagem apresentada estão na convexidade da formulação tanto para a análise de estabilidade robusta quanto para a síntese de controladores robustos. As condições propostas permitem tratar atrasos variantes no tempo. Além disso, as variáveis de folga

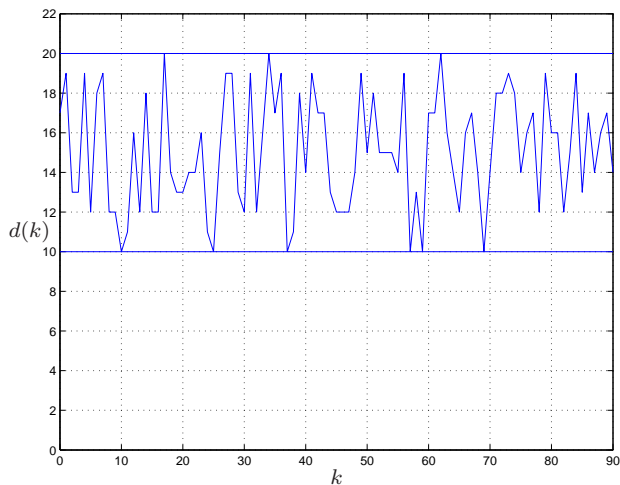


Figura 6: Comportamento do atraso $d(k)$.

introduzidas nas formulações apresentadas permitem tratar a síntese de controladores descentralizados com menor conservadorismo, pois nenhuma restrição de estrutura é imposta às matrizes dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Exemplos da literatura foram utilizados para mostrar que as condições aqui apresentadas podem fornecer resultados bem menos conservadores tanto no caso de análise de estabilidade robusta quanto no caso de síntese de ganhos robustos para realimentação de estados. Para ilustrar as condições LMI propostas foi apresentado um estudo de caso que trata da estabilização robusta de um modelo motivado por um forno industrial usado para tratamento térmico de metais.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio da FAPEMIG e do CNPq (485496/2006-2). Os autores agradecem a leitura atenta dos revisores e suas sugestões que ajudaram a melhorar a apresentação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1984). *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Boukas, E.-K. (2006). Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilizability, *Mathematical Problems in Engineering* **2006**: 1–10.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

- Chu, J. (1995). Application of a discrete optimal tracking controller to an industrial electric heater with pure delays, *Journal of Process Control* **5**(1): 3–8.
- Chu, J., Su, H. and Hu, X. (1993). A time-delay control algorithm for an industrial electric heater, *Journal of Process Control* **3**(4): 219–224.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.
- de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, New York, pp. 241–257.
- Dugard, L. and Verriest, E. I. (1997). *Stability and Control of Time-delay Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Fridman, E. and Shaked, U. (2005a). Delay dependent \mathcal{H}_∞ control of uncertain discrete delay system, *European Journal of Control* **11**(1): 29–37.
- Fridman, E. and Shaked, U. (2005b). Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay system, *International Journal of Control* **78**(4): 235–246.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Math Works Inc., Natick, MA.
- Gao, H., Lam, J., Wang, C. and Wang, Y. (2004). Delay-dependent robust output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay, *IEE Proceedings — Control Theory and Applications* **151**(6): 691–698.
- Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J. (2003). *Stability of Time-delay Systems*, Control Engineering, Birkhäuser, Boston.
- Kapila, V. and Haddad, W. M. (1998). Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay, *Automatica* **34**(9): 1141–1144.
- Leite, V. J. S. (2005). *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*, Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas (SP), Brasil.
- Leite, V. J. S., Montagner, V. F., de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Ramos, D. C. W. and Peres, P. L. D. (2004). Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares, *SBA Controle & Automação* **15**(1): 24–40.

- Leite, V. J. S. and Peres, P. L. D. (2003). An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(3): 500–504.
- Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. and Peres, P. L. D. (2004a). Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos com atraso nos estados: condições LMI independentes do atraso, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS.
- Leite, V. J. S., Tarbouriech, S. and Peres, P. L. D. (2004b). A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp. 2870–2875.
- Li, X. and de Souza, C. E. (1995). LMI approach to delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3614–3619.
- Li, X. and de Souza, C. E. (1996). Robust stabilization and \mathcal{H}_∞ of uncertain linear time-delay systems, *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, Vol. H, San Francisco, CA, pp. 113–118.
- Liu, X. G., Martin, R. R., Wu, M. and Tang, M. L. (2006). Delay-dependent robust stabilisation of discrete-time systems with time-varying delay, *IEE Proceedings — Control Theory and Applications* **153**(6): 689–702.
- Mahmoud, M. S. (2000). *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Niculescu, S.-I. (2001). *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Vol. 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, London.
- Niculescu, S.-I. and Gu, K. (eds) (2004). *Advances in Time-Delay Systems*, Vol. 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer, London.
- Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O. and Bernussou, J. (2000). A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Systems & Control Letters* **40**(1): 21–30.
- Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica* **39**(10): 1667–1694.
- Shi, P., Boukas, E. K., Shi, Y. and Agarwal, R. K. (2003). Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **157**(2): 435–451.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- Teixeira, B. O. S., Jota, F. G. and Teixeira, M. H. (2007). Modelagem, controle e otimização do processo dos fornos de reaquecimento de placas, *SBA Controle & Automação* **18**: 67 – 93.
- Xu, S. and Chen, T. (2004). Robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers, *Systems & Control Letters* **51**(3-4): 171–183.