

---

---

# ALOCAÇÃO DE BANCOS DE CAPACITORES EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA VISANDO ELIMINAR VIOLAÇÕES DE TENSÃO

**Sérgio Haffner\***

haffner@ieee.org

**Leonardo Varaschin Gasperin†**

leonardo.gasperin@pucrs.br

**Luís Alberto Pereira†**

lpereira@ee.pucrs.br

**Lucio Barreto‡**

lbarret6@csd.uwo.ca

\*Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade do Estado de Santa Catarina  
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante s/n - Bairro Bom Retiro  
CEP 89223-100 - Joinville - SC - Brasil

†Departamento de Engenharia Elétrica - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul  
Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 30 - Sala 150  
CEP 90619-900 - Porto Alegre - RS - Brasil

‡Department of Computer Science - University of Western Ontario  
Middlesex College Building, MC 334  
London - Ontario - Canada - N6A 5B7

---

## ABSTRACT

### Optimal Placement of Capacitors In Distribution Networks to Minimize Voltage Violations

This paper presents a model to be applied to the optimal placement of capacitors in power distribution feeders. The proposed model has linear objective function, linear constraints, continuous variables, and binary variables, being represented by a mixed integer linear programming. In this way, the optimal solution can be found faster and with less computational effort using methods suited for linear problems. In addition, the model allows the determination of the optimal tap for each distribution transformer thus minimizing voltage violations and at same time increasing the possibilities of tap adjustment. The objective function to be minimized represents the total cost of the investment (acquisition, installation and removal) and the operation costs (associated to maintenance and voltage violations).

Operational constraints describing the equipment capacities are considered along with financial and logical constraints. These constraints are introduced to reduce the search space of the optimization procedure. The hourly load variation is considered through a simplified approach which allows to represent the specific transformer characteristics in an individual basis. The operation status of each capacitor bank is determined together with the solution of the optimization problem. Thus, these equipments are only switched on when they are actually needed. Finally, the proposed model is validated through an application example of a medium voltage distribution network, which also permits to assess the model overall performance.

**KEYWORDS:** power distribution, power distribution planning, voltage regulation, mixed integer programming.

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um modelo de otimização para o

---

Artigo submetido em 15/02/2009 (Id.: 00954)

Revisado em 22/04/2009, 11/07/2009

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Eduardo N. Asada

problema de alocação de bancos de capacitores em alimentadores de distribuição de energia elétrica. O modelo proposto apresenta função objetivo linear, restrições lineares e variáveis contínuas e binárias, sendo representado por um problema de programação linear inteira mista. Isto permite que a solução ótima de problemas reais possa ser obtida por intermédio de métodos de otimização clássica. Além disto, o modelo incorpora a definição simultânea do tap ótimo de operação dos transformadores de distribuição visando minimizar as violações nos limites de tensão, ampliando as possibilidades de ajuste. A função objetivo a ser minimizada representa os custos totais de investimento (aquisição, instalação e remoção) e de operação (manutenção e custos associados à violação dos limites de tensão). O modelo apresentado considera restrições operacionais, que descrevem a capacidade dos equipamentos, e restrições financeiras e lógicas, com o objetivo de reduzir o espaço de busca. A variação horária da carga é considerada por meio de um modelo simplificado que permite representar a característica individual de cada transformador de distribuição. O estado de operação dos bancos de capacitores automáticos é determinado juntamente com a solução do modelo, sendo estes equipamentos utilizados apenas quando necessário. A validade e a eficiência do modelo apresentado são comprovadas por intermédio de exemplos de aplicação em redes de distribuição de média tensão.

**PALAVRAS-CHAVE:** distribuição de energia elétrica, planejamento da expansão, regulação de tensão, programação inteira mista.

## 1 INTRODUÇÃO

Impulsionado por uma tendência internacional, iniciada no final da década de 1980, o setor elétrico brasileiro realizou nas últimas décadas expressivas alterações em sua estrutura e regulamentação. Como consequência desta reestruturação, foi criada a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), que é responsável pela regulação e fiscalização do setor elétrico brasileiro. Em função da atuação da ANEEL, índices de qualidade de atendimento cada vez mais severos estão sendo exigidos das concessionárias de distribuição de energia. Em dezembro de 2008, esta tendência reguladora foi marcada com a aprovação dos “Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional (PRODIST)”, em particular pelo seu Módulo 8, relacionado com a qualidade da energia elétrica (ANEEL, 2008).

Dentre os vários aspectos que são regulados e fiscalizados pela ANEEL está o nível da tensão disponibilizada aos consumidores, que é regulamentado pela Resolução ANEEL Nº505/2001 e claramente definido no PRODIST, tanto para a obtenção de índices individuais quanto para índices coletivos. São definidos limites de variação da tensão, prazos para regularização e penalidades em caso de não-conformidade.

As penalidades incluem uma “compensação pelo serviço inadequado” que deverá ser creditada para os consumidores atingidos, acarretando custos adicionais para as concessionárias de distribuição. Desta forma, a necessidade de manter a tensão de todos os consumidores dentro da faixa definida como adequada torna-se uma obrigação, pois são tolerados desvios de apenas 3% das medidas com valores precários e 0,5% de valores críticos (ANEEL, 2008). Mesmo que a classificação da tensão de atendimento como adequada, precária ou crítica apresente variações segundo o nível da tensão de atendimento, os registros considerados são sempre realizados em intervalos de medição de 10 minutos, fazendo com que seja necessário realizar continuamente o controle da tensão. Isto praticamente obriga as empresas a investirem na regulação da tensão dos alimentadores de distribuição, ou seja, limitar a variação da tensão que ocorre com a variação da carga ao longo do tempo.

A forma usual de realizar este controle consiste em alocar e operar de forma integrada e coordenada os reguladores de tensão, os bancos de capacitores e a tensão de saída das subestações (geralmente regulada por intermédio de comutadores automáticos). Além disto, é muito importante determinar de forma adequada a melhor derivação de operação dos transformadores de distribuição, de modo que os desvios com relação aos limites estabelecidos sejam minimizados. Nos alimentadores de distribuição, os bancos de capacitores em derivação são utilizados geralmente para corrigir o fator de potência, reduzindo o fluxo de potência reativa na rede e as perdas de potência ativa. Eles podem ser de dois tipos: 1) fixos, que apresentam menor custo e ficam constantemente ligados; e 2) automáticos, que são ligados de acordo com o nível de carregamento da rede, possibilitando algum ajuste na tensão, para que esta se mantenha dentro de determinados limites, quando a carga apresenta variações.

Em função de sua relevância, o problema de alocação de capacitores vem sendo estudado de forma contínua há décadas (Neagle e Samson, 1956; Cook, 1959; Maxwell, 1960; Durán, 1968; Chang, 1972; Bae, 1978; Grainger e Lee, 1981; Ponnasikko e Rao, 1983; Kaplan, 1984; Grainger e Civanlar, 1985a, 1985b e 1985c; Baran e Wu, 1989a e 1989b; Salama e Chikhani, 1993; Sundhararajan e Pahwa, 1994; Huang *et alli*, 1996; Miu *et alli*, 1997; Levitin *et alli*, 2000; Gallego *et alli*, 2001; Augugliaro *et alli*, 2004; Mendes *et alli*, 2005; Haghifam e Malik, 2007; Zhang *et alli*, 2008; Chang, 2008). Em nível nacional, este tema tem sido abordado em uma série de pesquisas recentes (Petinelli, 2002; González, 2003; Alves *et alli*, 2004; Freitas *et alli*, 2004; Alcântara, 2005; Alves *et alli* 2005; Alves, 2005; Haffner e Alves, 2005; Romero e Takehara, 2006; Pereira Junior *et alli*, 2006; Salas, 2006; Silva Junior *et alli*, 2008; Pereira Junior e Mantovani, 2008; Guimarães *et alli*, 2008). Uma descrição abrangente da progressão histórica do problema de alocação ótima de

capacitores em nível nacional e internacional é apresentada por Alcântara (2005).

Embora diversos trabalhos tenham sido realizados na área de alocação de bancos de capacitores (Ng *et alli*, 2000; Mekhamer *et alli*, 2002; Alcântara, 2005), geralmente estes trabalhos abordam o problema de redução de perdas, com foco nos períodos de maior carregamento, quando as perdas são mais representativas. Em função das não-linearidades e possíveis não-convexidades, inerentes a este tipo de abordagem, modelos baseados em métodos heurísticos de otimização têm sido utilizados com frequência (Sundhararajan e Pahwa, 1994; Huang *et alli*, 1996; Miu *et alli*, 1997; Levitin *et alli*, 2000; Gallego *et alli*, 2001; Augugliaro *et alli*, 2004; Mendes *et alli*, 2005; Haghifam e Malik, 2007; Silva Junior *et alli*, 2008; Zhang *et alli*, 2008; Chang, 2008). Em sua forma tradicional, a alocação de capacitores se caracteriza como um problema de otimização não-linear inteiro misto de difícil solução. Existem ainda dois fatores que adicionam mais complexidade ao problema (Silva Junior *et alli*, 2008): 1) existência de várias soluções factíveis, ou seja, tem-se uma região de solução não convexa apresentando vários mínimos locais, dificultando a obtenção da solução mínima global; e 2) elevado esforço computacional, ou seja, tem-se uma explosão combinatória referente às alternativas discretas de investimento. Em função da não convexidade destes modelos de otimização, a determinação da solução ótima só pode ser garantida por intermédio de enumeração exaustiva, o que pode demandar tempos de processamento elevados, principalmente quando são considerados diversos níveis de carregamento e empregadas unidades automáticas (cuja forma de operação também necessita ser otimizada).

Um outro fator de destacada importância associado aos problemas de planejamento da expansão de redes de distribuição é o fato de que, em função da proximidade das unidades consumidoras, existe uma incerteza maior sobre o comportamento da carga do que nos problemas relacionados com redes de transmissão. Quando são adotados modelos trifásicos, esta incerteza é ainda maior, pois além das alterações que ocorrem nas unidades consumidoras (instalação ou remoção de equipamentos), as concessionárias realizam periodicamente alterações na rede para buscar um melhor balanceamento. Isto torna muito difícil a representação exata do real comportamento da rede de distribuição. Mesmo os modelos mais detalhados tendem a apresentar diferenças significativas com relação ao que efetivamente ocorre na rede, pois existe grande dificuldade em determinar o comportamento individual dos consumidores – observar que no caso dos problemas associados à rede de transmissão esta incerteza é bastante reduzida, pois a demanda é determinada pelo comportamento coletivo dos consumidores, que é mais fácil de prever. Tais incertezas motivaram o desenvolvimento de um modelo linear simplificado, especialmente desenvolvido

para representar as redes de distribuição de energia (redes com relações R/X elevadas) em torno de um ponto de operação conhecido (Haffner *et alli*, 2008). A partir deste modelo linear de rede, foi possível formular um modelo de otimização convexo (função objetivo e restrições lineares) para o problema de alocação de bancos de capacitores, permitindo que sua solução seja obtida por intermédio de métodos de otimização clássica.

Neste trabalho, o problema de alocação tem por objetivo minimizar as violações dos limites de tensão que são definidos pela Resolução N°505/2001 da ANEEL, por intermédio do ajuste do tap de operação dos transformadores de distribuição e da instalação de bancos de capacitores fixos e automáticos, considerando a variação horária da carga. A importância de atender tais limites reside no fato de que as penalidades decorrentes das violações dos limites de tensão são de inteira responsabilidade das concessionárias de energia, diferenciando-se assim dos problemas relacionados com perdas técnicas e não-técnicas, pois estas podem ser, pelo menos em parte, repassadas para a tarifa – no caso da concessionária exceder o limite definido pela agência reguladora, a redução das perdas assume importância, pois os custos decorrentes são de responsabilidade da concessionária. A formulação apresentada minimiza os custos de aquisição, instalação, remoção e manutenção das unidades por intermédio de um modelo linear de otimização. No modelo apresentado, foram desenvolvidas soluções lineares para vários problemas: 1) o valor absoluto da violação dos limites de tensão é representado por intermédio da inclusão de uma variável auxiliar e restrições lineares; 2) os limites móveis de tensão, que dependem da derivação (tap) que o transformador está operando, são representados por uma tensão de referência, a qual pode ser ajustada dentro dos limites físicos de cada transformador; 3) a restrição não-linear que limita a magnitude da corrente nos condutores é representada de modo quase exato por restrições lineares de canalização; e 4) os limites nas tensões e as restrições de investimento não tornam o problema inviável.

O artigo está organizado de acordo com a seguinte sequência. Na seção 2, é apresentada a notação empregada na formulação do problema. Na seção 3, o modelo linear de otimização é apresentado em detalhes. Os exemplos de utilização são apresentados na seção 4. Para finalizar são apresentadas as conclusões.

## 2 NOTAÇÃO

### Conjuntos

$\Psi^N$  e  $N$  conjunto e cardinalidade dos nós da rede

$\Psi^R$  e  $R$  conjunto e cardinalidade dos ramos da rede

$\Psi^D$  e  $D$  conjunto e cardinalidade dos nós com demanda, cuja tensão deve ser regulada

$\Psi^G$  e  $G$  conjunto e cardinalidade dos nós da rede onde existe capacidade de injeção de potência e a tensão pode ser controlada (subestação e barras de tensão controlada)

$\Psi^{BC}$  e  $BC$  conjunto e cardinalidade dos nós candidatos a instalação de bancos de capacitores

$\Psi^F$  e  $F$  conjunto e cardinalidade dos tipos de bancos de capacitores fixos que podem ser instalados ou remanejados

$\Psi^A$  e  $A$  conjunto e cardinalidade dos tipos de bancos de capacitores automáticos que podem ser instalados ou remanejados

$\Psi^{NC}$  e  $NC$  conjunto e cardinalidade dos níveis de carregamento a serem considerados para representar a variação da carga

**Variáveis inteiras e binárias** ( $x = 1$  e  $y = 1$  significam que as alternativas serão selecionadas)

$a_i$  variável inteira que representa o tap de operação do transformador da barra  $i$

$x_i^{FI}$  variável de decisão binária que indica a instalação do banco de capacitor fixo do tipo  $FI$  na barra  $i$

$\mathbf{x}^F$  vetor das variáveis de investimento relacionadas com os bancos de capacitor fixos

$x_i^{AI}$  variável de decisão binária que indica a instalação do banco de capacitor automático do tipo  $AI$  na barra  $i$

$y_{i,j}^{AI}$  variável de utilização binária que indica que a unidade automática do tipo  $AI$  na barra  $i$  está ligada no nível de carregamento  $j$

$\mathbf{y}_j^A$  vetor das variáveis de operação dos bancos de capacitores automáticos no nível de carregamento  $j$

### Variáveis contínuas e seus limites

$V_{i,j}$  magnitude da tensão na barra  $i$  no nível de carregamento  $j$

$\mathbf{V}_j$  vetor das tensões nodais para o nível de carregamento  $j$

$\Delta V_{i,j}$  violação dos limites de tensão na barra  $i$  no nível de carregamento  $j$

$V_i^{\text{ref}}$  tensão de referência para definição do tap de operação do transformador da barra  $i$

$V_i^{\text{min}}$  e  $V_i^{\text{max}}$  limites mínimo e máximo de tensão da barra  $i$ , considerando a possibilidade de alteração do tap de operação do transformador

$f_{i,j}^{\text{Re}}$  e  $f_{i,j}^{\text{Im}}$  partes real e imaginária da corrente no ramo  $i$  no nível de carregamento  $j$

$\mathbf{f}_j^{\text{Re}}$  e  $\mathbf{f}_j^{\text{Im}}$  vetores das partes real e imaginária das correntes nos ramos no nível de carregamento  $j$

$f_i^{\text{max}}$  corrente máxima admissível no ramo  $i$

$g_{i,j}^{\text{Re}}$  e  $g_{i,j}^{\text{Im}}$  partes real e imaginária da injeção de corrente da barra  $i$  no nível de carregamento  $j$

$\mathbf{g}_j^{\text{Re}}$  e  $\mathbf{g}_j^{\text{Im}}$  vetores coluna das partes real e imaginária da injeção nodal de corrente no nível de carregamento  $j$

$C^{\text{inv}}$  custo de investimento relacionado com a aquisição, instalação e remoção de bancos de capacitores

$C^{\text{oper}}$  custo total de operação

$C^{\text{man}}$  custo anual de manutenção dos bancos de capacitores

$C_j^{\text{vio}}$  custo anual das violações nos limites de tensão

### Parâmetros e índices

$\mathbf{d}_j^{\text{Re}}$  e  $\mathbf{d}_j^{\text{Im}}$  vetores coluna das partes real e imaginária da demanda nodal (cargas) no nível de carregamento  $j$

$g_{\text{min},i,j}^{\text{Re}}$  e  $g_{\text{max},i,j}^{\text{Re}}$  limites mínimo e máximo de injeção ativa na barra com capacidade de geração  $i$  no nível de carregamento  $j$

$g_{\text{min},i,j}^{\text{Im}}$  e  $g_{\text{max},i,j}^{\text{Im}}$  limites mínimo e máximo de injeção reativa na barra com capacidade de geração  $i$  no nível de carregamento  $j$

$g_{\text{esp},i,j}^{\text{Im}}$  valor especificado de injeção reativa na barra com capacidade de geração  $i$  no nível de carregamento  $j$

$V_{i,j}^{\text{esp}}$  valor especificado para a tensão da barra  $i$  no nível de carregamento  $j$

$R_i$  e  $X_i$  partes real e imaginária da impedância do ramo  $i$

$K_{i,j}$  fator de ajuste calculado para o ramo  $i$  no nível de carregamento  $j$

$\mathbf{S}$  matriz incidência nó-ramo da rede

$\mathbf{Q}^F$  e  $\mathbf{Q}^A$  matrizes das injeções de corrente relacionadas com os bancos de capacitores fixos e automáticos que são candidatos a instalação ou realocação

$CA^{FI}$  e  $CM^{FI}$  custos de aquisição e de manutenção do banco de capacitor fixo do tipo  $I$

$CI_i^{FI}$  e  $CR_i^{FI}$  custos de instalação e de remoção para a barra  $i$  do banco de capacitor fixo do tipo  $I$

$CA^{AI}$  e  $CM^{AI}$  custos de aquisição e de manutenção do banco de capacitor automático do tipo  $I$

$CI_i^{AI}$  e  $CR_i^{AI}$  custos de instalação e de remoção para a barra  $i$  do banco de capacitor automático do tipo  $I$

$NB_{\max}^{FI}$  e  $NB_{\max}^F$  número de bancos fixos do tipo  $I$  disponíveis e número máximo de bancos fixos que podem ser instalados

$NB_{\max}^{AI}$  e  $NB_{\max}^A$  número de bancos automáticos do tipo  $I$  disponíveis e número máximo de bancos automáticos que podem ser instalados

$NB_{\max}$  número máximo de bancos de capacitores

$NB$  número de bancos de capacitores instalados

$B_{\max}$  recurso disponível para aquisição de bancos de capacitores

$CV_i$  custo associado à violação da tensão na barra  $i$

$\Delta T_j$  duração em horas por ano do nível de carregamento  $j$

$\delta$  fator para converter os custos anuais de operação em valor presente

$N_t$  número de nós da rede no estágio  $t$ , excluindo subestações

$T$  duração em anos do horizonte de planejamento

$i\%$  taxa de juros anual em percentual

$i$  índice utilizado para percorrer as barras e linhas da rede

$j$  índice utilizado para percorrer os níveis de carregamento

$t$  índice utilizado para percorrer os anos do horizonte

- a rede de distribuição é dividida em nós, nos quais as cargas e fontes são concentradas, e ramos que realizam a conexão entre os nós, representando o percurso dos alimentadores;

- a variação horária da demanda é representada por  $NC$  níveis de carregamento, sendo as variáveis relacionadas com a operação da rede (demanda, tensão e fluxo) associadas a cada um destes níveis de carregamento;

- aos nós são associadas três variáveis para cada nível de carregamento (magnitude da tensão nodal; partes real e imaginária da demanda de corrente);

- aos ramos são associadas duas variáveis para cada nível de carregamento: partes real e imaginária da corrente;

- a instalação, remoção ou realocação dos bancos de capacitores constituem o conjunto das alternativas de investimento que serão empregadas para solução do problema de expansão;

- a instalação de uma nova unidade ou a utilização de um banco pré-existente está associada a uma variável binária que assume o valor unitário quando a alternativa for selecionada (instalação de uma unidade ou a permanência de um banco no local em que estava previamente instalado) e o valor zero quando a alternativa não for selecionada (não instalação do banco ou remoção de um banco pré-existente);

- a possibilidade de ajuste da tensão, proporcionada pela seleção do tap de operação, é representada pela determinação de uma tensão de referência, que é otimizada para minimizar as violações nos limites da tensão;

- para as unidades fixas e automáticas estão associados custos de aquisição, de instalação, de manutenção e, para as unidades pré-existentes, custos de remoção, instalação e manutenção;

- a utilização dos bancos automáticos em cada nível de carregamento está associada a variáveis binárias, que assumem valor unitário quando o banco estiver ligado e o valor zero quando o banco estiver desligado;

- os bancos de capacitores fixos são considerados em operação em todos os níveis de carregamento; os bancos automáticos entram em operação apenas quando são necessários;

- a carga é representada por demandas constantes de corrente, com valores conhecidos para cada nível de carregamento;

- as tensões nodais e os fluxos nos ramos são determinados através das duas Leis de Kirchhoff;

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O modelo de otimização descrito a seguir tem por objetivo definir o tap de operação dos transformadores de distribuição, os locais de instalação e os tipos de bancos de capacitores fixos e automáticos (chaveados), de modo que o custo de aquisição, instalação e manutenção e as violações nos limites de tensão sejam minimizados. O problema de alocação e realocação de bancos de capacitores em alimentadores de distribuição leva em conta os seguintes fatores:

- são assumidos limites de capacidade para os condutores e para as subestações;
- as quedas de tensão na rede de distribuição são calculadas a partir de um modelo simplificado levando em conta a impedância dos ramos e a corrente em cada nível de carregamento;
- as violações nas tensões são avaliadas em todas as barras onde existe demanda ou injeção, para todos os níveis de carregamento considerados;
- a função objetivo corresponde a minimização do valor presente dos custos de investimento (considerados apenas uma vez e relacionados com a aquisição, instalação e remoção dos bancos de capacitores) e de operação (considerados ao longo do horizonte de planejamento e relacionados com a manutenção dos bancos de capacitores e com as multas advindas da violação dos limites de tensão);
- são considerados limites para os custos de investimento e manutenção.

### 3.1 Representação do desvio de tensão

O desvio da tensão nodal com relação aos seus limites mínimo e máximo é definido  $\forall i \in \Psi^D$  e  $\forall j \in \Psi^{NC}$  como:

$$\Delta V_{i,j} = \begin{cases} V_{i,j} - V_i^{\max}, & \text{se } V_{i,j} > V_i^{\max} \\ V_i^{\min} - V_{i,j}, & \text{se } V_{i,j} < V_i^{\min} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

Neste trabalho, a expressão linear por partes da expressão (1), que corresponde aos segmentos de reta em destaque na Figura 1, é substituída pela seguinte forma equivalente, que evita a inclusão de variáveis adicionais:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Delta V_{i,j} \\ \text{s.a.} \quad & \Delta V_{i,j} \geq V_{i,j} - V_i^{\max} \\ & \Delta V_{i,j} \geq V_i^{\min} - V_{i,j} \\ & \Delta V_{i,j} \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Observar que a solução do problema de otimização definido pela expressão (2), cuja região viável é representada pela área hachurada na Figura 1, vai sempre recair em um ponto pertencente ao segmento de reta em destaque.

Os valores mínimos e máximos das magnitudes de tensão utilizados nas expressões (1) e (2) podem ser obtidos a partir da Resolução N°505/2001 da ANEEL que apresenta uma classificação para a tensão de atendimento, em função da “Tensão Nominal” (para consumidores em baixa tensão) ou

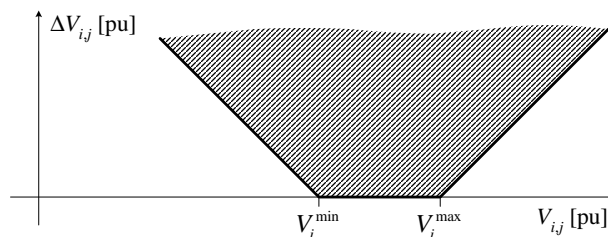


Figura 1: Variável que representa a violação dos limites de tensão.

da “Tensão Contratada” (para os consumidores em alta tensão). Os limites empregados na definição das faixas de valores “adequados”, “precários” ou “críticos”, apresentam variações (ANEEL, 2001 e 2008), mesmo quando estes são expressos em grandezas normalizadas em função da “Tensão Nominal” ou da “Tensão Contratada”. Sem perda de generalidade do modelo desenvolvido (que pode ser adaptado com facilidade para outros valores), neste trabalho a faixa “adequada” será definida pelos limites mínimo e máximo de 0,93 e 1,05 pu, respectivamente.

Por outro lado, como os transformadores de distribuição possuem derivações (taps) em seu lado de média tensão e se busca regular a tensão fornecida aos consumidores na baixa tensão, os limites mínimo e máximo da tensão no circuito de média tensão são móveis, pois dependem do tap que o transformador está operando. Levando-se em conta as relações de tensões dos transformadores de distribuição normalizados pela ABNT (NBR 5440/1999), observa-se que, além da tensão nominal, existem duas outras derivações no lado de média tensão, com valores próximos a 0,95 e 0,90 pu. Para a classe 15 kV, por exemplo, as derivações são 13,8 kV, 13,2 kV e 12,6 kV, correspondendo às seguintes relações MT:BT em pu: 1) 1:1, na derivação 1; 2) 0,9565:1 (ou 1:1,0455), na derivação 2; e 3) 0,9131:1 (ou 1:1,0952), na derivação 3. Sem perda de generalidade, neste trabalho foram consideradas três derivações com relações em pu de: 1) 1:1, na derivação 1; 2) 0,95:1 (ou 1:1,0525), na derivação 2; e 3) 0,9:1 (ou 1:1,1111), na derivação 3. Considerando-se a possibilidade de utilização destas derivações e visando obter uma tensão na faixa adequada para o lado de baixa tensão, os valores mínimos e máximos para o lado de média tensão são mostrados na Tabela 1.

Assim, quando o transformador opera na derivação 3, a tensão do enrolamento de média tensão deve estar entre 0,8370 pu e 0,9450 pu para que a tensão do enrolamento de baixa tensão seja considerada adequada, segundo a Resolução N°505/2001. A extensão para transformadores com outra faixa de derivação é imediata.

Caso o tap de operação não seja definido *a priori*, é possí-

Tabela 1: Limites para tensão adequada considerando as derivações (valores em pu)

Derivação (tap)	Relação de transformação AT:BT	Média tensão		Baixa tensão	
		$V_i^{\min}$	$V_i^{\max}$	$V_i^{\min}$	$V_i^{\max}$
1	1:1	0,93	1,05	0,93	1,05
2	1:1,0525	0,8835	0,9975	0,93	1,05
3	1:1,1111	0,8370	0,9450	0,93	1,05

vel incorporar ao modelo a definição do melhor tap, de modo que a tensão no enrolamento de baixa tensão seja considerada “adequada”, segundo a Resolução N°505/2001 da ANEEL. Observa-se que, independente do tap empregado, a relação entre o limite superior e o inferior é de aproximadamente 1,1290. Considerando esta proporção, que define a máxima variação, e os limites extremos mostrados na Tabela 1, os limites fixos  $V_i^{\min}$  e  $V_i^{\max}$  podem ser substituídos pelos limites móveis mostrados na Figura 2, definidos a partir de uma tensão de referência  $V_i^{\text{ref}}$ :

$$\begin{aligned} V_i^{\text{ref}} &\geq V_i^{\min} = 0,8370 \\ 1,1290V_i^{\text{ref}} &\leq V_i^{\max} = 1,05. \end{aligned} \quad (3)$$

Para considerar a possibilidade de selecionar a derivação a ser utilizada, segundo a Tabela 1, é introduzida uma tensão de referência  $V_i^{\text{ref}}$  (que representa a menor tensão admitida) e o limite superior é substituído por  $1,1290V_i^{\text{ref}}$ , chegando-se a:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Delta V_{i,j} \\ \text{s.a.} \quad & \Delta V_{i,j} \geq V_{i,j} - 1,1290V_i^{\text{ref}} \\ & \Delta V_{i,j} \geq V_i^{\text{ref}} - V_{i,j} \\ & \Delta V_{i,j} \geq 0 \\ & V_i^{\text{ref}} \geq V_i^{\min} = 0,8370 \\ & V_i^{\text{ref}} \leq 0,8857V_i^{\max} = 0,93. \end{aligned} \quad (4)$$

O valor obtido para  $V_i^{\text{ref}}$  na solução do modelo de otimização indicará qual a derivação mais adequada para cada transformador, sendo selecionada aquela em que o valor mínimo  $V_i^{\min}$  da média tensão estiver mais próximo. Para transformadores com mais derivações, ou valores diferentes dos mostrados na Tabela 1, as constantes utilizadas na expressão (4) serão ligeiramente diferentes, sendo determinadas de forma análoga. Para manter os valores obtidos restritos ape-

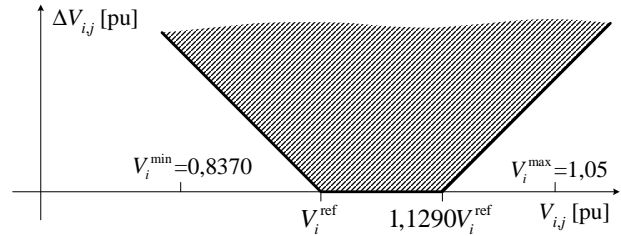


Figura 2: Limites móveis considerando a possibilidade de selecionar a derivação.

nas às três faixas mostradas na Tabela 1, a expressão da tensão de referência na equação (4) é substituída por:

$$V_i^{\text{ref}} = 0,93 [1 - 0,05 (a_i - 1)], \quad (5)$$

sendo  $a_i$  um número inteiro positivo,  $1 \leq a_i \leq 3$ , que representa a derivação utilizada no enrolamento de média tensão, segundo a Tabela 1. Utilizando-se a expressão (5) a derivação mais adequada segundo valores mostrados na Tabela 1 será determinada diretamente pelo valor da variável  $a_i$  na solução do modelo de otimização.

### 3.2 Função objetivo

A função objetivo do problema de expansão possui duas partes: custo de investimento e custo de operação, conforme apresentado na Figura 3, que ilustra o caso de serem considerados três níveis de carregamento ( $NC=3$ ). O custo de investimento é efetivado uma única vez, no início do horizonte de planejamento considerado, e corresponde aos custos associados à aquisição, instalação e remoção dos bancos de capacitores. O custo de operação é considerado no início de cada ano do horizonte de planejamento e corresponde ao custo anual de manutenção dos bancos de capacitores mais uma parcela relacionada com as violações nos limites de tensão que são ponderadas pela duração de cada nível de carregamento. O custo de manutenção depende do número e tipo de unidades instaladas; o custo relacionado com as violações nos limites é variável, conforme o nível de carregamento.

Para um horizonte de planejamento de  $T$  anos, a função objetivo corresponde à minimização do valor presente do custo de investimento mais os custos de operação que são distribuídos ao longo do tempo, sendo dada pela seguinte expressão:

$$C = C^{\text{inv}} + C^{\text{oper}} \quad (6)$$

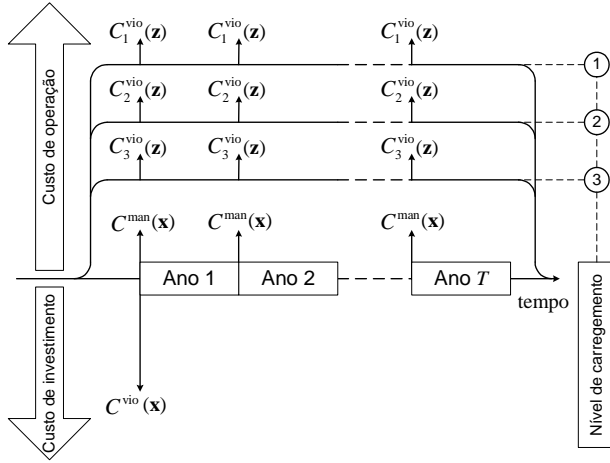


Figura 3: Instantes de efetivação dos custos de operação (para três níveis de carregamento) e de investimento.

$$C^{inv} = \sum_{i \in \Psi^{BC}} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{I \in \Psi^F} [CR_i^{FI} + (CA^{FI} + CI_i^{FI} - CR_i^{FI}) x_i^{FI}] + \\ &+ \sum_{I \in \Psi^A} [CR_i^{AI} + (CA^{AI} + CI_i^{AI} - CR_i^{AI}) x_i^{AI}] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$C^{oper} = \delta \left( C^{man} + \sum_{j \in \Psi^{NC}} C_j^{vio} \right) \quad (8)$$

$$C^{man} = \sum_{i \in \Psi^{BC}} \left[ \sum_{I \in \Psi^F} CM^{FI} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^A} CM^{AI} x_i^{AI} \right] \quad (9)$$

$$C_j^{vio} = \Delta T_j \sum_{i \in \Psi^D} CV_i \Delta V_{i,j} \quad (10)$$

$$\delta = \sum_{t=1}^T \frac{1}{\left(1 + \frac{i\%}{100}\right)^{t-1}} \quad (11)$$

As violações nos limites de tensão na barra utilizadas em (10) e definidas para cada nível de carregamento  $j$  são dadas pela expressão (4).

### 3.3 Restrições

As restrições do problema estão divididas em quatro blocos e se originam da aplicação das Leis de Kirchhoff, da imposição dos limites operacionais dos equipamentos para todos os níveis de carregamento e dos recursos disponíveis (limitações financeiras e de equipamentos). O primeiro bloco de

restrições é obtido com a imposição da Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) para todos os níveis de carregamento ( $\forall j \in \Psi^{NC}$ ), sendo composta por dois conjuntos de equações (relacionados com as potências ativa e reativa, respectivamente):

$$\mathbf{S} \mathbf{f}_j^{Re} + \mathbf{g}_j^{Re} = \mathbf{d}_j^{Re} \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}^F \mathbf{x}^F + \mathbf{Q}^A \mathbf{y}_j^A + \mathbf{S} \mathbf{f}_j^{Im} + \mathbf{g}_j^{Im} = \mathbf{d}_j^{Im} \quad (13)$$

É importante salientar que a equação (13), relacionada com o balanço de potência reativa, inclui a contribuição de todos os bancos de capacitores fixos instalados e dos bancos de capacitores automáticos em operação nos respectivos níveis de carregamento.

O segundo bloco de restrições advém da aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), para todos os ramos  $i \in \Psi^R$  e para todos os níveis de carregamento  $j \in \Psi^{NC}$ :

$$K_{i,j} R_i f_{i,j}^{Re} - X_i f_{i,j}^{Im} + [\mathbf{S}^T]_{\text{linha } i} \mathbf{V}_j = 0 \quad (14)$$

onde o sobrescrito T indica matriz transposta. Detalhes de como o fator de ajuste  $K_{i,j}$  é determinado, juntamente com o modelo de rede (baseado em injeções de corrente) e a forma de caracterização dos níveis de carregamento individualmente para cada transformador de distribuição, podem ser obtidos em (Haffner *et alii*, 2008).

O terceiro bloco de restrições inclui os limites operacionais dos equipamentos e os limites de investimento. Os limites de fluxo nos ramos, relacionados com a magnitude da corrente, são aproximados por restrições lineares que constituem as arestas do dodecágono inscrito na circunferência cujo raio é a capacidade máxima  $f_i^{\max}$ , conforme mostrado na Figura 4. Assim, as seis restrições utilizadas para representar o limite de um ramo qualquer  $i \in \Psi^R$  para o nível de carregamento  $j \in \Psi^{NC}$  são:

$$-f_i^{\max} \leq f_{i,j}^{Re} + (2 - \sqrt{3}) f_{i,j}^{Im} \leq f_i^{\max} \quad (15)$$

$$-f_i^{\max} \leq (\sqrt{3} - 1) f_{i,j}^{Re} + (\sqrt{3} - 1) f_{i,j}^{Im} \leq f_i^{\max} \quad (16)$$

$$-f_i^{\max} \leq (2 - \sqrt{3}) f_{i,j}^{Re} + f_{i,j}^{Im} \leq f_i^{\max} \quad (17)$$

$$-f_i^{\max} \leq (\sqrt{3} - 2) f_{i,j}^{Re} + f_{i,j}^{Im} \leq f_i^{\max} \quad (18)$$

$$-f_i^{\max} \leq (1 - \sqrt{3}) f_{i,j}^{Re} + (\sqrt{3} - 1) f_{i,j}^{Im} \leq f_i^{\max} \quad (19)$$

$$-f_i^{\max} \leq -f_{i,j}^{Re} + (2 - \sqrt{3}) f_{i,j}^{Im} \leq f_i^{\max} \quad (20)$$



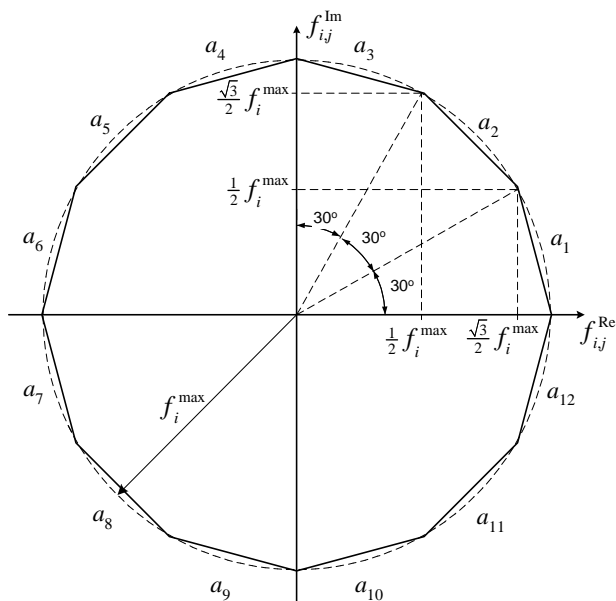


Figura 4: Restrições lineares utilizadas para aproximar o limite de corrente nas linhas.

Na Figura 4, as arestas  $a_1$  e  $a_7$  são definidas pela restrição (15); as arestas  $a_2$  e  $a_8$  são definidas pela restrição (16); e assim sucessivamente. Em conjunto, as restrições (15) a (20) definem como viável a superfície do dodecágono, que define a capacidade do ramo. Desta forma, o limite de capacidade dos ramos é aproximado com grande fidelidade por intermédio de restrições lineares simples, evitando o uso de restrições não-lineares.

Para a representação dos limites de tensão, são utilizadas as equações (4). Observar que a minimização dos desvios de tensão já foi incorporada à função objetivo na equação (10). Caso desejado, é trivial acrescentar limites rígidos para a magnitude da tensão nodal, mas a introdução destes limites pode tornar o problema inviável, principalmente quando associada a restrições de investimento ou a natureza discreta dos bancos de capacitores (ou mesmo dos reguladores de tensão), que impossibilita o ajuste contínuo da tensão.

Para as barras com capacidade de geração (subestações ou geração distribuída)  $i \in \Psi^G$ , os limites de injeção e de tensão de operação para todos os níveis de carregamento  $j \in \Psi^{NC}$ , são dados por:

$$g_{\min,i,j}^{Re} \leq g_{i,j}^{Re} \leq g_{\max,i,j}^{Re} \quad (21)$$

$$g_{\min,i,j}^{Im} \leq g_{i,j}^{Im} \leq g_{\max,i,j}^{Im} \quad (22)$$

$$V_{i,j}^{\min} \leq V_{i,j} \leq V_{i,j}^{\max} \quad (23)$$

Para representar um gerador operando como regulador de

tensão (barra PV), basta fazer  $V_{i,j}^{\min} = V_{i,j}^{\max} = V_{i,j}^{esp}$  em (23) e impor os limites de injeção em (22); para representar um gerador operando como compensador de fator de potência (barra PQ), basta fazer  $g_{\min,i,j}^{Im} = g_{\max,i,j}^{Im} = g_{esp,i,j}^{Im}$  em (22) e impor limites para a tensão de operação, se desejado. Observar que a injeção de potência ativa também pode ser otimizada ou definida previamente, por intermédio de limites apropriados em (21).

Diversos limites podem ser definidos para os investimentos em aquisição de cada tipo de banco, para os custos de instalação e manutenção, ou para os custos totais. Por exemplo, a restrição que limita os custos totais de aquisição é dada por:

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \left( \sum_{I \in \Psi^F} CA^{FI} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^A} CA^{AI} x_i^{AI} \right) \leq B_{\max}. \quad (24)$$

O quarto bloco consiste nas restrições lógicas do problema, sendo formado pelas seguintes restrições:

- só é permitida a instalação de um banco de capacitor por barra candidata

$$\sum_{I \in \Psi^F} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^A} x_i^{AI} \leq 1, \quad \forall i \in \Psi^{BC} \quad (25)$$

- só pode ser utilizado a unidade automática que for selecionada para instalação

$$y_{i,j}^{AI} \leq x_i^{AI}, \quad \forall i \in \Psi^{BC}, \quad \forall j \in \Psi^{NC}, \quad \forall I \in \Psi^A \quad (26)$$

- cada tipo de banco possui uma quantidade máxima disponível (por exemplo, bancos candidatos a realocação estão limitados às quantidades pré-existentis):

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} x_i^{FI} \leq NB_{\max}^{FI}, \quad \forall I \in \Psi^F \quad (27)$$

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} x_i^{AI} \leq NB_{\max}^{AI}, \quad \forall I \in \Psi^A \quad (28)$$

- quantidade máxima de bancos fixos, automáticos e total:

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \sum_{I \in \Psi^F} x_i^{FI} \leq NB_{\max}^F, \quad \forall I \in \Psi^F \quad (29)$$

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \sum_{I \in \Psi^A} x_i^{AI} \leq NB_{\max}^A, \quad \forall I \in \Psi^A \quad (30)$$

$$\sum_{i \in \Psi^{BC}} \left( \sum_{I \in \Psi^F} x_i^{FI} + \sum_{I \in \Psi^A} x_i^{AI} \right) \leq NB_{\max}. \quad (31)$$

Apesar de sua grande simplicidade, as restrições (24) a (31) desempenham um importante papel na redução do espaço de busca, tornando o problema de otimização tratável até mesmo por meio de métodos de otimização exata, tais como o algoritmo *branch-and-bound*. É oportuno ressaltar que a complexidade do problema de alocação está associada ao número de unidades a serem instaladas na solução ótima do problema, ao número de tipos de bancos a serem instalados e ao número de barras candidatas. De uma maneira geral, o número de combinações possíveis, para instalação de  $NB$  bancos de capacitores de  $F + A$  tipos em  $BC$  barras candidatas é dado por:

$$\text{Combinações} = (F + A)^{NB} \frac{BC!}{NB!(BC - NB)!}. \quad (32)$$

O primeiro termo de (32) é o arranjo com repetição de  $NB$  bancos selecionados em um universo de  $F + A$  tipos; o segundo termo é a combinação simples da seleção de  $NB$  barras, nas quais os bancos de capacitores serão instalados, no conjunto da  $BC$  candidatas. Por exemplo, caso a solução ótima necessite instalar 2 bancos de capacitores, considerando 3 tipos de bancos para serem instalados ou remanejados, em 10 barras candidatas, o espaço de soluções será restrito a  $3^2 \frac{10!}{2!(10-2)!} = 405$  combinações. Caso o número de unidades não fosse definido, existiriam 4 possibilidades por barra (não instalar ou instalar um dos 3 tipos de bancos) e o espaço de soluções compreenderia  $10^4$  alternativas. Para ilustrar o efeito da limitação do número de unidades na redução do espaço de busca, a Figura 5 apresenta o número de combinações possíveis para instalar 3 tipos de bancos quando o número de barras candidatas varia de 10 a 100. Pode-se observar que a definição (ou limitação) do número de bancos instalados provoca uma expressiva redução no espaço de busca.

Deve-se salientar que a imposição de restrições financeiras ou limitações no número de unidades a serem instaladas pode implicar a obtenção de soluções que apresentem violações nos limites de tensão, mas estas serão mínimas. Ainda, é possível ponderar pela carga demandada os termos na função objetivo relacionados com as violações de tensão, para quantificar as “compensações ao serviço inadequado” (ANEEL, 2001) a que as concessionárias estarão sujeitas. Assim, os desvios associados aos locais mais críticos serão evitados com maior ênfase. Esta abordagem é bastante superior quando comparada com a utilização de restrições nas tensões, pois estas podem tornar o problema infatível.

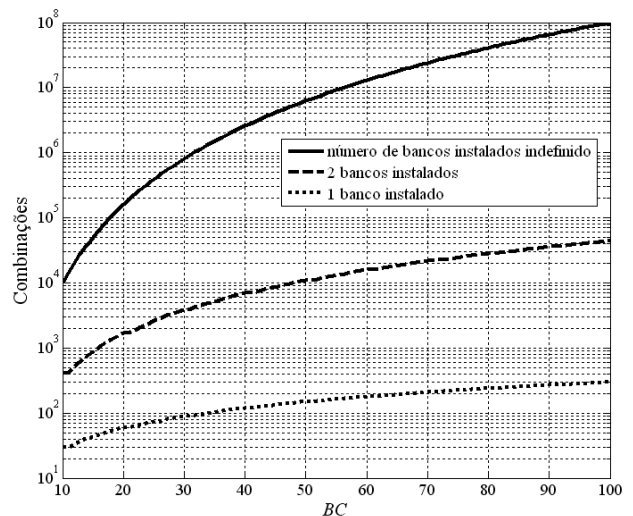


Figura 5: Combinações viáveis para alocação de 3 tipos de bancos de capacitores em função do número de barras candidatas.

## 4 TESTES E RESULTADOS

Para validação do modelo matemático apresentado, foi utilizado um alimentador trifásico composto por 23 nós e 22 ramos (Haffner e Alves, 2005), mostrado na Figura 6. O sistema opera em 13,8 kV, 60 Hz e possui em cada uma das Barras 2 a 23 uma carga trifásica cujo valor nominal é de 189 kW e 124 kvar, totalizando 4158 kW e 2728 kvar. Os ramos são constituídos por segmentos de 2 km de condutores, com impedâncias em ohms de  $0,374 + j0,806$ ,  $0,946 + j0,844$  e  $1,528 + j0,916$ , para os cabos CA 336,4 MCM, 2/0 AWG e 1 AWG, respectivamente. As capacidades de cada cabo são mostradas na Figura 6. O horizonte de planejamento considerado foi de 3 anos, com taxa anual de juros de 10%.

Os tipos de bancos de capacitores fixos e automáticos e seus custos de aquisição, instalação e manutenção encontram-se na Tabela 2, na qual a primeira coluna indica a potência nominal do banco, seguida de uma letra F (para banco fixo) ou A (para banco automático). Na segunda coluna da Tabela 2

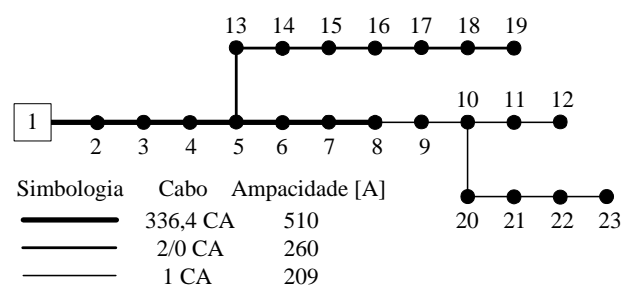


Figura 6: Rede exemplo de 23 barras.

consta o custo de aquisição, na terceira o custo de instalação e na quarta o custo anual de manutenção.

Tabela 2: Tipos de bancos de capacitores trifásicos em 13,8 kV

Potência [kvar]	CA [R\$]	CI [R\$]	CM [R\$/ano]
300 F	8.000,00	1.000,00	200,00
600 F	12.000,00	1.000,00	200,00
900 F	15.000,00	1.000,00	200,00
300 A	21.000,00	1.500,00	500,00
600 A	25.000,00	1.500,00	500,00
900 A	28.000,00	1.500,00	500,00

Para esta rede serão avaliadas três situações distintas: 1) carga constante e igual ao seu valor nominal; 2) carga variável segundo curva de duração; e 3) carga variável com uma unidade pré-existente na Barra 8.

#### 4.1 Carga constante

Para este teste, a carga foi considerada constante no seu valor nominal, todas as 22 barras de carga (Barras 2 a 23) são candidatas à instalação das unidades fixas da Tabela 2. As unidades automáticas não são indicadas para este caso por apresentarem custo superior. Sem a instalação de bancos de capacitores, a soma das violações dos limites de tensão nas barras de média tensão é de 1,2488 pu, a tensão mínima é de 0,8178 pu na Barra 23 e as perdas são de 401 kW, totalizando 3513 MWh/ano.

Quando não é permitindo ajuste do tap dos transformadores de distribuição, o problema de alocação apresenta 66, 2079 e 41580 combinações possíveis, respectivamente, para alocação de 1, 2 e 3 bancos de capacitores. Quando são considerados também os 3 taps mostrados na Tabela 1, o número de combinações é multiplicado por um fator igual a  $3^{22} \approx 3 \times 10^{10}$ , inviabilizando a enumeração explícita.

As soluções ótimas obtidas, considerando a instalação de 1 a 3 bancos de capacitores, encontram-se na Tabela 3, na qual a primeira coluna indica o número de unidades instaladas; a segunda coluna apresenta o local de instalação e a potência do(s) banco(s) selecionado(s); a terceira e a quarta colunas contém o somatório das violações dos limites de tensão determinados pelo modelo linear (ML) e pelo fluxo de carga (FC); as duas últimas colunas apresentam os custos de investimento e operação (considerando  $CV_i = 10, \forall i \in \Psi^D$ ).

A solução ótima obtida para o modelo linearizado corresponde à instalação de 3 unidades de 900 kvar, com um custo

total de R\$ 53.930,00, violações menores que 1% do valor inicial e tensão mínima de 0,9235 pu. As tensões nodais obtidas pelo modelo linear utilizado neste trabalho são bastante próximas das obtidas pelo fluxo de carga (vide comparação entre os somatórios das violações mostradas na Tabela 3), com diferenças sempre inferiores a 0,02 pu. Embora os locais de instalação dos bancos não sejam os mesmos que minimizam as perdas elétricas, as perdas anuais foram reduzidas para 2654 MWh (cerca de 76% do valor inicial); a solução que minimiza as perdas com até 3 bancos, obtida por intermédio de enumeração exaustiva, apresenta 3 unidades de 900 kvar, instaladas nas Barras 8, 16 e 20, com perdas anuais de 2164 MWh (cerca de 62% do valor inicial), soma das violações dos limites de tensão de 0,0993 pu e tensão mínima de 0,9059 pu. Assim, o custo de operação (manutenção e violação) associado a solução que minimiza as perdas é de R\$ 25.437,00, sendo o custo total de R\$ 73.437,00.

Tabela 3: Soluções ótimas para rede de 23 barras com carga constante sem ajuste no tap

NB	Local (kvar)	$\sum_{i \in \Psi^D} \Delta V_i$ [pu]		Custo [R\$]	
		ML	FC	$C^{inv}$	$C^{oper}$
1	23 (900 F)	0,7368	0,7567	16000	177104
2	22(900 F) 23 (900 F)	0,2671	0,2802	32000	65110
3	18 (900 F) 22(900 F) 23 (900 F)	0,0179	0,0123	48000	5930

Quando é permitido o ajuste simultâneo no tap dos transformadores de distribuição, a quantidade de bancos de capacitores necessária para o ajuste na tensão é drasticamente reduzida, bastando a instalação de uma unidade de 300 kvar na Barra 23, com um custo total de R\$ 10.066,00. A solução ótima obtida é mostrada na Tabela 4, na qual a primeira coluna indica o número da barra; a segunda coluna a derivação ótima de operação do transformador de distribuição; as três últimas colunas apresentam a magnitude da tensão em pu no lado de baixa tensão (BT), obtidas pelo ML, pelo FC e a diferença entre o ML e o FC. Como neste caso é realizada uma compensação menor da potência reativa, as perdas anuais são de 3206 MWh (cerca de 91% do valor inicial).

#### 4.2 Carga variável

Para avaliar o efeito da variação da carga na definição dos locais, tipos e capacidades dos bancos de capacitores e também na seleção da derivação dos transformadores de distribuição, foi considerado que a carga da rede exemplo seja variável e possa ser representada por 3 níveis de carregamento as-

Tabela 4: Solução ótima para rede de 23 barras com carga constante com ajuste no tap

Barra	Tap ótimo	Tensão no lado de BT [pu]		
		ML	FC	Diferença
1	—	1	1	—
2	1	0,9780	0,9779	0,0001
3	1	0,9571	0,9569	0,0002
4	1	0,9373	0,9371	0,0002
5	2	0,9669	0,9665	0,0004
6	2	0,9559	0,9554	0,0005
7	2	0,9459	0,9454	0,0005
8	2	0,9372	0,9365	0,0007
9	3	0,9685	0,9678	0,0007
10	3	0,9503	0,9496	0,0007
11	3	0,9446	0,9441	0,0005
12	3	0,9419	0,9413	0,0006
13	2	0,9544	0,9541	0,0003
14	2	0,9437	0,9434	0,0003
15	2	0,9347	0,9345	0,0002
16	3	0,9791	0,9790	0,0001
17	3	0,9734	0,9733	0,0001
18	3	0,9695	0,9695	0
19	3	0,9676	0,9676	0
20	3	0,9405	0,9398	0,0007
21	3	0,9335	0,9327	0,0008
22	3	0,9294	0,9284	0,0010
23	3	0,9281	0,9269	0,0012

sim definidos: 6 horas diárias com 100% do valor nominal; 10 horas diárias com 70% do valor nominal; 8 horas diárias com 30% do valor nominal. Neste caso, todas as 22 barras de carga (Barras 2 a 23) são candidatas à instalação das unidades fixas e automáticas da Tabela 2. Sem a instalação de bancos de capacitores, a soma das violações dos limites de tensão nas barras de média tensão é de 1,2488 pu (durante as 6 horas de maior carregamento), 0,3951 pu (durante as 10 horas de carregamento médio) e 0 pu (durante as 8 horas de carregamento mínimo), resultando em um valor anual ponderado pela duração de 4177  $h/ano$ . Neste caso, a tensão mínima se mantém em 0,8178 pu na Barra 23 (para o carregamento nominal) e as perdas médias ponderadas pela duração são de 183 kW, totalizando 1604  $MWh/ano$ .

Quando não é permitido o ajuste do tap dos transformadores de distribuição, o problema de alocação apresenta 132, 8316 e 332640 combinações possíveis, respectivamente, para alocação de 1, 2 e 3 bancos de capacitores. Como no caso anterior, quando são considerados também os 3 taps da Tabela 1, o número de alternativas inviabiliza a enumeração explícita.

As soluções ótimas, para a instalação de 1 a 3 bancos de capacitores e  $CV_i = 50, \forall i \in \Psi^D$ , encontram-se na Tabela 5, na qual a terceira e a quarta colunas contêm o somatório das violações dos limites de tensão determinados pelo modelo linear (ML) e pelo fluxo de carga (FC), ponderados pelas horas de duração anual. A solução ótima obtida para o modelo linearizado corresponde à instalação de 3 unidades de 900 kvar, com um custo total de R\$ 63.821,00 e violações inferiores a 3% do valor inicial. Observa-se que em função dos custos elevados, frente ao custo associado à violação de tensão, não foram selecionadas unidades automáticas.

Tabela 5: Soluções ótimas para rede de 23 barras com carga variável sem ajuste no tap

NB	Local (kvar)	$\sum_{j \in \Psi^{NC}} \Delta T_j$ $\sum_{i \in \Psi^D} \Delta V_i [h/ano]$		Custo [R\$]	
		ML	FC	$C^{inv}$	$C^{oper}$
1	23 (900 F)	1655	1718	16000	226857
2	22 (900 F) 23 (900 F)	593,7	629,9	32000	82299
3	12 (900 F) 17 (900 F) 22 (900 F)	103,7	125,8	48000	15821

Com relação à solução obtida para carga constante, mostrada na Tabela 3, observa-se uma maior distribuição ao longo de todo alimentador e uma disposição um pouco mais próxima da fonte, visando reduzir possíveis sobretensões durante os períodos de menor carregamento (em função da sobrecompensação).

Para o nível de carregamento nominal, a solução ótima da Tabela 5 apresenta um somatório maior para as violações de tensão do que a solução da ótima da Tabela 3; para o nível de carregamento de 70% do nominal não ocorrem violação; e para o nível de 30% as violações são reduzidas. Isto ocorre pois o modelo tem por objetivo resolver o problema como um todo; não apenas para um único nível de carregamento, como no caso anterior. A disposição mostrada na Tabela 5 é menos eficiente para o nível de carregamento nominal, mas foi concebida para atender um número maior de situações de carregamento.

Novamente, os locais de instalação dos bancos são significa-

tivamente diferentes dos que minimizam as perdas elétricas, sendo as perdas anuais após a instalação dos 3 bancos iguais a 1622 MWh (praticamente igual ao valor inicial); a solução que minimiza as perdas com até 3 bancos, obtida por intermédio de enumeração exaustiva, apresenta 3 unidades automáticas de 900 kvar, instaladas nas Barras 8, 15 e 20, com perdas anuais de 1042 MWh (cerca de 65% do valor inicial). Para minimização das perdas, as unidades automáticas devem ser operadas da seguinte maneira: 1) para carga máxima, todas as unidades são ligadas; 2) para carga intermediária, apenas as unidades das Barras 15 e 20 são ligadas; e 3) para carga mínima, apenas a unidade da Barra 8 é ligada. Assim, a alternativa que minimiza as perdas apresenta uma soma das violações dos limites de tensão ponderada pela duração anual de  $226,9^{h/ano}$ , o que acarreta um custo de operação (manutenção e violação) de R\$ 35.138,00, sendo o custo total igual R\$ 123.630,00. A maior violação observada na tensão neste caso ocorre para o nível de maior carregamento, sendo a tensão mínima observada igual a 0,9059 pu.

Quando é permitido o ajuste simultâneo no tap dos transformadores de distribuição, a quantidade e o tipo de bancos de capacitores necessários para o ajuste na tensão é significativamente alterado, sendo selecionados um banco fixo de 300 kvar, na Barra 22, e um banco automático de 900 kvar (ligado apenas no período de maior carregamento), na Barra 23, com um custo total de R\$ 40.553,60. A solução ótima é mostrada na Tabela 6, na qual as seis colunas finais apresentam a magnitude da tensão em pu no lado de baixa tensão (BT), obtidas pelo ML e pelo FC, para os diferentes níveis de carregamento (NC1, NC2 e NC3). Neste caso, as perdas anuais são de 1323 MWh (cerca de 83% do valor inicial).

Na Tabela 6, pode-se verificar a grande proximidade entre os valores obtidos pelo ML e pela solução do FC, confirmando a validade do modelo linearizado apresentado neste trabalho. Observar que neste caso o tap 3 não foi utilizado, para evitar sobretensões na rede no período de menor carregamento (coluna NC3).

### 4.3 Carga variável com banco de 600 kvar pré-existente

Para avaliar o efeito dos capacitores previamente instalados, foi considerada a existência de uma unidade fixa de 600 kvar instalada na Barra 8 e os mesmos níveis de carregamento definidos na seção anterior. Os custos de remoção e reinstalação do banco pré-existente são de 30% e de 80% do custo de uma unidade nova, ou seja, R\$ 300,00 e R\$ 800,00, respectivamente. Novamente, todas as 22 barras de carga (Barras 2 a 23) são candidatas à instalação da unidade pré-existente de 600 kvar da Barra 8 e das unidades fixas e automáticas da Tabela 2. Com a unidade fixa de 600 kvar instalada na Barra 8, a soma das violações dos limites de tensão

Tabela 6: Solução ótima para rede de 23 barras com carga variável e ajuste no tap

Barra	Tap ótimo	Tensão no lado de BT					
		NC1		NC2		NC3	
		ML	FC	ML	FC	ML	FC
1	—	1	1	1	1	1	1
2	1	0,9818	0,9816	0,9859	0,9858	0,9951	0,9951
3	1	0,9647	0,9642	0,9725	0,9724	0,9905	0,9904
4	1	0,9488	0,9481	0,9599	0,9597	0,9862	0,9861
5	1	0,9339	0,9330	0,9480	0,9477	0,9821	0,9820
6	2	0,9759	0,9747	0,9910	0,9906	1,0318	1,0316
7	2	0,9701	0,9685	0,9849	0,9845	1,0301	1,0300
8	2	0,9653	0,9634	0,9796	0,9791	1,0288	1,0287
9	2	0,9500	0,9483	0,9672	0,9667	1,0248	1,0246
10	2	0,9374	0,9357	0,9564	0,9560	1,0214	1,0212
11	2	0,9320	0,9307	0,9529	0,9525	1,0200	1,0199
12	2	0,9294	0,9281	0,9512	0,9508	1,0193	1,0192
13	2	0,9704	0,9698	0,9894	0,9892	1,0303	1,0302
14	2	0,9597	0,9593	0,9822	0,9821	1,0274	1,0273
15	2	0,9507	0,9505	0,9762	0,9761	1,0249	1,0249
16	2	0,9435	0,9435	0,9714	0,9713	1,0230	1,0229
17	2	0,9381	0,9382	0,9678	0,9677	1,0215	1,0215
18	2	0,9345	0,9347	0,9654	0,9653	1,0205	1,0205
19	2	0,9327	0,9329	0,9642	0,9641	1,0201	1,0200
20	2	0,9326	0,9307	0,9509	0,9504	1,0201	1,0199
21	2	0,9306	0,9284	0,9471	0,9465	1,0195	1,0193
22	2	0,9312	0,9286	0,9451	0,9444	1,0196	1,0194
23	2	0,9331	0,9301	0,9433	0,9427	1,0189	1,0187

nas barras de média tensão é de 0,9700 pu (durante as 6 horas de maior carregamento), 0,1878 pu (durante as 10 horas de carregamento médio) e 0 pu (durante as 8 horas de carregamento mínimo), resultando em um valor anual ponderado pela duração de  $2810^{h/ano}$  (cerca de 67% do valor anterior). Neste caso, a tensão mínima é de 0,8368 pu na Barra 23 (para o carregamento nominal) e as perdas médias ponderadas pela duração são de 160 kW, totalizando  $1404^{MWh/ano}$  (cerca de 87% do valor anterior). Notar que a instalação desta unidade fixa nas proximidades do centro de carga do alimentador provoca redução nas violações de tensão e nas perdas.

Quando é permitido o ajuste simultâneo no tap dos transformadores de distribuição, a solução ótima do modelo pro-

posto tem um custo total de R\$ 29.654,00 ( $C^{inv}=27600$  e  $C^{oper}=2054$ ) e consiste na instalação de uma unidade automática de 600 kvar na Barra 22 (ligada apenas durante o período de maior carregamento) e no remanejamento da unidade fixa de 600 kvar da Barra 8 para a Barra 23. A solução ótima é mostrada na Tabela 7 apresenta soma das violações dos limites de tensão de 0,0056 pu, apenas durante as 6 horas de maior carregamento, resultando em um valor anual ponderado pela duração de  $12^{h/ano}$ . Neste caso, a tensão mínima é de 0,9282 pu na Barra 12 (para o carregamento nominal) e as perdas médias ponderadas pela duração são de 149 kW, totalizando  $1306^{MWh/ano}$ .

Tabela 7: Solução ótima para rede de 23 barras com unidade pré-existente

Barra	Tap ótimo	Tensão no lado de BT					
		NC1		NC2		NC3	
		ML	FC	ML	FC	ML	FC
1	—	1	1	1	1	1	1
2	1	0,9818	0,9816	0,9872	0,9871	0,9964	0,9963
3	1	0,9647	0,9643	0,9751	0,9749	0,9930	0,9930
4	1	0,9488	0,9481	0,9637	0,9634	0,9900	0,9899
5	1	0,9339	0,9330	0,9530	0,9526	0,9872	0,9871
6	2	0,9759	0,9747	0,9977	0,9971	1,0384	1,0383
7	2	0,9700	0,9685	0,9930	0,9922	1,0382	1,0380
8	2	0,9653	0,9634	0,9890	0,9881	1,0382	1,0380
9	2	0,9500	0,9483	0,9780	0,9772	1,0356	1,0354
10	2	0,9374	0,9358	0,9688	0,9680	1,0338	1,0336
11	2	0,9321	0,9307	0,9653	0,9646	1,0324	1,0322
12	2	0,9294	0,9282	0,9636	0,9629	1,0317	1,0315
13	2	0,9704	0,9698	0,9947	0,9944	1,0356	1,0356
14	2	0,9597	0,9593	0,9876	0,9873	1,0327	1,0327
15	2	0,9507	0,9506	0,9816	0,9814	1,0303	1,0302
16	2	0,9435	0,9435	0,9768	0,9766	1,0283	1,0283
17	2	0,9381	0,9382	0,9732	0,9731	1,0269	1,0269
18	2	0,9345	0,9347	0,9708	0,9707	1,0259	1,0259
19	2	0,9327	0,9329	0,9696	0,9695	1,0254	1,0254
20	2	0,9327	0,9308	0,9648	0,9639	1,0340	1,0338
21	2	0,9306	0,9285	0,9626	0,9615	1,0350	1,0347
22	2	0,9312	0,9288	0,9621	0,9608	1,0366	1,0363
23	2	0,9316	0,9289	0,9633	0,9619	1,0389	1,0386

Caso o custo de remoção da unidade instalada na Barra 8 seja aumentado para R\$ 3.000,00, a solução anterior apresenta-

ria um acréscimo de R\$ 2.700,00 e deixaria de ser ótima. Neste caso, a solução ótima do modelo proposto com ajuste de tap tem um custo total de R\$ 31.415,00 ( $C^{inv}=29500$  e  $C^{oper}=1915$ ) e consiste na instalação de uma unidade automática de 900 kvar na Barra 23 (ligada apenas durante o período de maior carregamento) e na manutenção da unidade fixa de 600 kvar da Barra 8. A solução ótima é mostrada na Tabela 8 e não apresenta violações nos limites de tensão. Neste caso, a tensão mínima é de 0,9330 pu na Barra 22 (para o carregamento nominal) e as perdas médias ponderadas pela duração são de 145 kW, totalizando  $1268^{MWh/ano}$ .

Tabela 8: Solução ótima para rede de 23 barras unidade pré-existente e custo alterado

Barra	Tap ótimo	Tensão no lado de BT					
		NC1		NC2		NC3	
		ML	FC	ML	FC	ML	FC
1	—	1	1	1	1	1	1
2	1	0,9831	0,9830	0,9872	0,9872	0,9964	0,9964
3	1	0,9674	0,9670	0,9751	0,9750	0,9930	0,9930
4	1	0,9527	0,9523	0,9637	0,9637	0,9900	0,9900
5	1	0,9391	0,9387	0,9530	0,9530	0,9872	0,9872
6	1	0,9336	0,9331	0,9479	0,9478	0,9866	0,9867
7	2	0,9782	0,9774	0,9929	0,9929	1,0382	1,0382
8	2	0,9746	0,9737	0,9890	0,9888	1,0382	1,0382
9	2	0,9580	0,9576	0,9750	0,9751	1,0326	1,0328
10	2	0,9437	0,9440	0,9627	0,9631	1,0277	1,0280
11	2	0,9384	0,9390	0,9592	0,9597	1,0263	1,0266
12	2	0,9357	0,9365	0,9575	0,9580	1,0256	1,0259
13	2	0,9758	0,9758	0,9947	0,9948	1,0356	1,0357
14	2	0,9650	0,9654	0,9876	0,9877	1,0327	1,0328
15	2	0,9561	0,9567	0,9816	0,9818	1,0303	1,0304
16	2	0,9489	0,9497	0,9768	0,9770	1,0283	1,0285
17	2	0,9434	0,9444	0,9732	0,9735	1,0269	1,0270
18	2	0,9398	0,9409	0,9708	0,9711	1,0259	1,0260
19	2	0,9380	0,9392	0,9696	0,9699	1,0254	1,0256
20	2	0,9374	0,9378	0,9557	0,9562	1,0249	1,0252
21	2	0,9339	0,9342	0,9504	0,9510	1,0228	1,0232
22	2	0,9330	0,9332	0,9469	0,9476	1,0214	1,0218
23	2	0,9348	0,9347	0,9451	0,9459	1,0207	1,0211

Comparando o resultado obtido com os dois valores de custo de remoção, observa-se que quando este é pequeno torna-se atrativo remanejar a unidade pré-existente para o local que

tenha maior impacto na melhoria do nível da tensão (Barra 23), sendo possível minimizar os desvios de tensão com a instalação de uma unidade adicional de 600 kvar (instalando um total de 1200 kvar, como realizado no teste da Seção 4.2). Por outro lado, quando o custo de remoção é elevado torna-se atrativo manter a unidade no local original, mesmo que seja necessário instalar uma unidade adicional de 900 kvar (instalando um total de 1500 kvar).

#### 4.4 Desempenho computacional e qualidade das soluções obtidas

Em todos os testes, a solução ótima foi obtida em menos de 6 segundos, utilizando-se o pacote GLPK – GNU Linear Programming Kit (Makhorin, 2008), sem necessidade de configurações especiais, em um computador pessoal com processador Intel Core 2 Duo de 2,66 GHz, com 4 GB de memória RAM, com sistema operacional Windows XP. Os problemas inteiros mistos definidos pelas equações (6) a (31) foram resolvidos por intermédio da função “`lpx_intopt()`”, disponível na Versão 4.13 do GLPK e baseada no algoritmo *branch-and-bound*.

A qualidade das soluções obtidas pelo modelo linearizado pode ser avaliada por intermédio de comparação com a solução do modelo não linear, determinada por enumeração exaustiva. Para tanto foi utilizado um simulador (Alves, 2005; Alves *et alli*, 2006) que permite realizar a alocação otimizada de bancos de capacitores fixos e automáticos utilizando algoritmos genéticos ou enumeração exaustiva. Para a rede com carga constante, a solução ótima do problema não linear consiste na instalação de 3 unidades fixas de 900 kvar, nas Barras 17, 21 e 23, com um custo total de R\$ 52.174,00. O tempo de processamento necessário para enumeração das 41580 combinações foi de 1070 segundos, no mesmo computador descrito anteriormente. Observar que a melhor solução do modelo não linear é similar à solução obtida pelo modelo linearizado apresentado. Considerando os desvios determinados pela solução do fluxo de carga, o custo total da solução mostrada na Tabela 3 é de R\$ 52.594,00 (apenas 0,8% superior à solução ótima do modelo não linear). Por outro lado, quando utilizado o módulo baseado em algoritmo genético do mesmo simulador (Alves, 2005; Alves *et alli*, 2006), empregando uma população de 200 indivíduos e 100 gerações, foi possível obter uma solução com qualidade similar em 80% das execuções, sendo necessário um tempo de processamento médio de 245 segundos.

Para a rede com carga variável, a solução ótima do problema não linear consiste na instalação de 3 unidades fixas de 900 kvar, nas Barras 11, 16 e 21, com um custo total de R\$ 64.222,00. O tempo de processamento necessário para enumeração das 332640 combinações foi de 20 horas, no mesmo computador descrito anteriormente – vale ressaltar

que a melhor forma de operação das unidades automáticas também é determinada por enumeração, para garantir a obtenção da solução ótima. Além disto, a melhor solução do modelo não linear é similar à solução obtida pelo modelo linearizado apresentado. Considerando os desvios determinados pela solução do fluxo de carga, o custo total da solução mostrada na Tabela 5 é de R\$ 66.848,00 (cerca de 4% superior à solução ótima do modelo não linear). Quando utilizado o módulo baseado em algoritmo genético, empregando uma população de 200 indivíduos e 100 gerações, foi possível obter uma solução com qualidade similar em 85% das execuções, sendo necessário um tempo de processamento médio de 380 segundos. A Tabela 9 resume os tempos de processamento, sendo a segunda coluna destinada aos valores obtidos pelo modelo linearizado (ML), a terceira coluna aos valores médios obtidos pelo algoritmo genético e a quarta ao tempo para enumeração.

Tabela 9: Comparativo entre tempos de processamento

Carga	Tempo de processamento [segundos]		
	ML	Genético	Enumeração
Constante	2	245	1070
Variável	5	360	20 horas

## 5 CONCLUSÕES

Foi apresentado um modelo de otimização linear inteiro misto para alocação e re-alocação de bancos de capacitores fixos e automáticos em redes de distribuição de energia elétrica, considerando a variação diária da carga e a possibilidade de determinar, simultaneamente, o tap ótimo de operação dos transformadores de distribuição. O modelo permite minimizar os custos de investimento e operação do sistema além de minimizar os custos relacionados como o não atendimento dos limites de tensão.

As alternativas apresentadas para a abordagem tradicional não-linear permitiram a representação do problema de alocação por intermédio de um modelo com função objetivo e restrições lineares, cuja solução pode ser obtida por intermédio das funções disponíveis no pacote GLPK, sem necessidade de ajustes especiais. Em particular, o emprego de limites móveis de tensão, considerando o tap de operação dos transformadores de distribuição permitiu obter soluções de melhor qualidade, considerando uma importante característica das redes de distribuição do sistema elétrico brasileiro.

A comparação dos resultados obtidos utilizando a escolha do melhor tap para os transformadores de distribuição com as soluções sem ajuste de tap comprovam a importância de levar em conta este tipo ajuste, quando se busca manter a ten-

são dentro de limites específicos. Por outro lado, deve-se salientar que, embora este ajuste seja extremamente importante para a regulação da tensão, ele é pouco efetivo no que diz respeito à redução das perdas, pois não atua na redução das componentes reativas das correntes nas linhas da rede.

Nos testes realizados, que incluíram outras redes de distribuição, foi sempre observada grande proximidade entre os resultados obtidos pelo modelo linear apresentado e a solução do fluxo de carga não-linear. Desta forma, a solução ótima do modelo apresentado é de grande qualidade também para os modelos mais detalhados. Além disto, o algoritmo *brach-and-bound* permite ainda que sejam obtidas e armazenadas boas alternativas (não-ótimas) durante o processo de solução. Estas alternativas, embora não-ótimas para o modelo apresentado, podem ser posteriormente avaliadas segundo outros critérios e modelos, tornando-se muito úteis como soluções iniciais ou valores de referência.

## 6 AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho foi parcialmente apoiado pela Companhia Estadual de Energia Elétrica (CEEE), através de seus programas P&D ANEEL. Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio a esta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

Alcântara, M.V.P. (2005). Alocação de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica. Dissertação de Mestrado, UNICAMP-FEEC, Campinas, SP.

Alves, H.N., B.A. Souza, H.D.M. Braz e N. Kagan (2004). Optimal capacitor allocation in electrical distribution systems based on typical load profiles. *IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America*, São Paulo, SP, pp. 441–447.

Alves, H.N., B.A. Souza, e H.A. Ferreira (2005). Banks of automatic capacitors in electrical distribution systems: a hybrid algorithm of control. *SBA Controle & Automação*, Vol. 16, No. 1, pp. 93–99.

Alves, M.L. (2005). Módulo de alocação otimizada de reguladores de tensão e bancos de capacitores em alimentadores de distribuição, Dissertação de Mestrado, PUCRS-PPGEE, Porto Alegre, RS.

Alves, M.L., S. Haffner, L.L. dos Santos, A. Manzoni e F.A.B. Lemos (2006). MARCAD – uma ferramenta para alocação de equipamentos de regulação de tensão em sistemas de distribuição. *Anais da VII Conferência Internacional de Aplicações Industriais*, Recife, PE, pp. 1–8.

ABNT (1999), *NBR 5440 – Transformadores para redes aéreas de distribuição – Padronização*, 28p.

ANEEL (2001). *Resolução N°505*, de 26 de novembro de 2001. 19 p. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/>>. Acesso em: 29/01/2009.

ANEEL (2008). *Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional (PRODIST)*. Módulos 1 a 8, 379 p. Disponível em <<http://www.aneel.gov.br/>>. Acesso em: 29/01/2009.

Augugliaro, A., L. Dusonchet, S. Favuzza e E.R. Sanseverino (2004). Voltage regulation and power losses minimization in automated distribution networks by an evolutionary multiobjective approach. *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 19, No. 3, pp. 1516–1527.

Bae, Y.G. (1978). Analytical methods of capacitor allocation on distribution primary feeders. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-97, No. 4, pp. 1232–1238.

Baran, M.E. e F.F. Wu (1989a). Optimal capacitor placement on radial distribution systems. *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 4, No. 1, pp. 725–734.

Baran, M.E. e F.F. Wu (1989b). Optimal sizing of capacitors placed on a radial distribution system. *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 4, No. 1, pp. 735–743.

Chang, C.F. (2008). Reconfiguration and capacitor placement for loss reduction of distribution systems by ant colony search algorithm. *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 23, No. 4, pp. 1747–1755.

Chang, N. E. (1972). Generalized equation on loss reduction with shunt capacitor. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-91, No. 5, pp. 2189–2195.

Cook, R.F. (1959). Analysis of capacitor application by load cycle. *Trans. of the American Inst. of Electrical Engineers*, Vol. PAS-78, pp. 950–957.

Durán, H. (1968). Optimum number, location and size of shunt capacitors in radial distribution feeders, a dynamic programming approach, *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-87, No. 9, pp. 1769–1773.

Freitas, J.S., M.V. de Freitas, S. Haffner e F.A.B. Lemos (2004). Alocação de capacitores fixos e chaveados em redes de distribuição considerando diferentes níveis de carga. *XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, pp. 1–6.

Gallego R.A., A. Monticelli e R. Romero (2001). Optimal capacitor placement in radial distribution networks. *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 16, No. 4, pp. 630–637.



- González, J.F.V. (2003). Redução de perdas em redes primárias de distribuição de energia elétrica por instalação e controle de capacitores. Dissertação de Mestrado, UNICAMP-FEEC, Campinas, SP.
- Grainger, J.J. e S. Civanlar (1985a). Volt/var control on distribution systems with lateral branches using shunt capacitors and voltage regulators; Part I: The overall problem. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-104, No. 11, pp. 3278–3283.
- Grainger, J.J. e S. Civanlar (1985b). Volt/var control on distribution systems with lateral branches using shunt capacitors and voltage regulators; Part II: The solution method. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-104, No. 11, pp. 3284–3290.
- Grainger, J.J. e S. Civanlar (1985c). Volt/var control on distribution systems with lateral branches using shunt capacitors and voltage regulators; Part III: The numerical results. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-104, No. 11, pp. 3291–3297.
- Grainger, J.J., e S.H. Lee (1981). Optimum size and location of shunt capacitors for reduction of losses on distribution feeders. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-100, No. 3, pp. 1105–1118.
- Guimaraes, M., C.A. Castro e R. Romero (2008). Minimização de perdas de potência ativa em sistemas de distribuição utilizando reconfiguração e alocação de capacitores. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, Juiz de Fora, MG, pp.1–6.
- Haffner, S. e M.L. Alves (2005). Alocação ótima de bancos de capacitores e reguladores de tensão em redes radiais de distribuição de energia elétrica. *Proceeding of the 6th Latin-American Congress: Electricity Generation and Transmission*, Mar del Plata, Argentina, pp. 1–8.
- Haffner, S., L.A. Pereira e L. Gasperin (2008). Modelo aproximado para representação de redes de distribuição de energia elétrica. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, Juiz de Fora, MG, pp.1–8.
- Haghifam, M.-R. e O.P. Malik (2007). Genetic algorithm-based approach for fixed and switchable capacitors placement in distribution systems with uncertainty and time varying loads. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Vol. 1, No. 2, pp. 244–252.
- Huang, Y.C., H.T. Yang e C.L. Huang (1996). Solving the capacitor placement problem in a radial distribution system using Tabu Search approach. *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 11, No. 4, pp. 1868–1873.
- Kaplan, M. (1984). Optimization of number, location, size, control type, and control setting of shunt capacitors on radial distribution feeders. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-103, No. 9, pp. 2659–2665.
- Levitin, G., A. Kalyuzhny, A. Shenkman e M. Chertkov (2000). Optimal capacitor allocation in distribution systems using a genetic algorithm and a fast energy loss computation technique. *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 15, No. 2, pp. 623–628.
- Makhorin, A., (2008). *Modeling Language GNU MathProg*, Draft Edition for GLPK Version 4.34. Disponível em <<http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>>. Acesso em: 6/02/2009.
- Maxwell, M. (1960). The economic application of capacitors to distribution feeders. *Trans. of the American Institute of Electrical Engineers*, Vol. PAS-79, pp. 353–359.
- Mekhameer, S.F., M.E. El-Hawary, M.A. Moustafa, M.M. Mansour e S.A. Soliman (2002). State of the art in optimal capacitor allocation for reactive power compensation in distribution feeders. *Large Engineering Systems Conference on Power Engineering, LESCOPE*, Halifax, Canadá, pp. 61–75.
- Mendes, A., P.M. Franca, C. Lyra, C. Pissarra e C. Cavellucci (2005). Capacitor placement in large-sized radial distribution networks. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 152, No. 4, pp. 496–502.
- Miu, K.N., H.-D. Chiang e G. Darling (1997). Capacitor placement, replacement and control in large-scale distribution systems by a GA-based two-stage algorithm. *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 12, No. 3, pp. 1160–1166.
- Neagle, N.M. e D.R. Samson (1956). Loss reduction from capacitors installed on primary feeders. *Trans. of the American Inst. of Electrical Engineers*, Vol. PAS-75, No. 3, pp. 950–959.
- Ng, H.N., M.M. Salama e A.Y. Chikhani (2000). Classification of capacitor allocation techniques. *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 15, No. 1, pp. 387–392.
- Pereira Junior, B.R., A.M. Cossi e J.R.S. Mantovani (2006). Alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica utilizando algoritmo evolutivo multi-objetivo. *XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Salvador, BA, pp. 1–6.
- Pereira Junior, B.R. e J.R.S. Mantovani (2008). Alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição considerando as incertezas das cargas. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, Juiz de Fora, MG, pp.1–6.

- 
- Petinelli, A. E. (2002). Alocação ótima de capacitores em sistemas de distribuição radial, utilizando-se estratégias evolutivas. Dissertação de Mestrado, UFMA-CPGEE, São Luís, MA.
- Ponnavsikko, M. e K.S.P. Rao (1983). Optimal choice of fixed and switched shunt capacitors on radial distributors by the method of local variations. *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, Vol. PAS-102, No. 6, pp. 1607–1615.
- Romero, R. e R. Takehara (2006). Artificial immune systems applied to optimal capacitor placement in radial distribution networks. *IEEE PES Transmission & Distribution Conference & Exposition Latin America*, Caracas, Venezuela, pp. 1–7.
- Salama, M.M.A. e A.Y. Chikhani (1993). A simplified network approach to the var control problem for radial distribution systems. *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 8, No. 3, pp. 1529–1535.
- Salas, C.S.S. (2006). Alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas de distribuição radiais. Dissertação de Mestrado, UNESP-FEIS, Ilha Solteira, SP.
- Silva Junior, I.C., S. Carneiro Junior, E.J. Oliveira, J.L.R. Pereira e P.A.N. Garcia (2008). Metodologia heurística construtiva para alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica. *SBA Controle & Automação*, Vol. 19, No. 1, pp. 72–82.
- Sundhararajan, S. e A. Pahwa (1994). Optimal selection of capacitors for radial distribution systems using a genetic algorithm. *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 9, No. 3, pp. 1499–1505.
- Zhang, D., Z. Fu e L. Zhang (2008). Joint optimization for power loss reduction in distribution systems. *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 23, No. 1, pp. 161–169.