
SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CHUA COM MELHOR DESEMPENHO UTILIZANDO *BACKSTEPPING* MODIFICADO E COMPUTAÇÃO EVOLUTIVA

Erick Vile Grinits*
egrinits@mre.gov.br

Celso Pascoli Bottura†
cpbottura@fee.unicamp.br

*Ministério das Relações Exteriores
Esplanada dos Ministérios, Bloco H
CEP 70170-900 - Brasília DF

†DMCSI - FEEC - UNICAMP
Caixa Postal 6101
CEP 13081-970 - Campinas SP

RESUMO

Considera-se, neste trabalho, a sincronização otimizada de dois sistemas caóticos de Chua. Propõe-se um procedimento baseado em modificação da técnica de *backstepping* aliado a um algoritmo genético de forma a se conseguir um melhor desempenho na sincronização de dois sistemas de Chua em termos de esforço de controle em comparação ao método de *backstepping* tradicional. A modificação no *backstepping* clássico fundamenta-se em recente Extensão ao Princípio de Invariância de La Salle. Como ilustração da eficácia do método proposto, são apresentadas simulações em Matlab.

PALAVRAS-CHAVE: Sincronização de sistemas caóticos, *backstepping* modificado, algoritmos genéticos, circuito de Chua.

ABSTRACT

Synchronization of Chua's System with Improved Performance Using Modified Backstepping and Evolutionary Computation

It is considered, in this paper, the optimized synchronization

of two Chua's chaotic systems. We propose a methodology based on a modification of backstepping technique allied with a genetic algorithm in order to achieve a better performance in the synchronization of two Chua's systems in terms of control effort when compared to the traditional backstepping method. The modification of classic backstepping is based on a recent Extension to La Salle's Invariant Principle. Matlab simulations are presented to show the effectiveness of the approach.

KEYWORDS: Chaos synchronization, modified backstepping, genetic algorithms, Chua's circuit.

1 INTRODUÇÃO

A sincronização de sistemas caóticos é uma aplicação importante, por exemplo, na área de segurança em sistemas de comunicação. A finalidade de um sistema de comunicação é a transmissão de sinais portadores de informação a partir de um transmissor, estabelecido num dado local, para um receptor, localizado a uma dada distância do transmissor. O envio de informação é feito por um canal de comunicação, que provê uma conexão física entre a saída do transmissor e a entrada do receptor. Para que uma mensagem possa ser conduzida pelo canal, ela deve ser processada numa forma adequada para transmissão. Tal operação é designada *mo-*

Artigo submetido em 21/12/2005 (Id.: 00674)

Revisado em 03/03/2009

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Liu Hsu

dulação. Num processo de modulação, alguma(s) característica(s) do sinal portador é(são) alterada(s) de acordo com um sinal modulador. Tradicionalmente, tanto o sinal portador quanto o modulador são sinais senoidais (Haykin, 1989). Disso resulta que a potência transmitida é concentrada numa faixa estreita de frequências, o que acarreta uma alta densidade espectral de potência. Como apontam Kolumbán et al. (1997), isso traz uma série de desvantagens, dentre as quais a elevada probabilidade de interceptação desses sinais por receptores não autorizados. Visando-se a um maior grau de segurança na transmissão de informações, técnicas de espalhamento de espectro têm sido propostas. Em Dixon (1994), por exemplo, adicionalmente a um esquema de modulação digital, uma seqüência pseudo-aleatória é usada com o propósito de espalhar o espectro do sinal transmitido. Uma exigência dos métodos de espalhamento de espectro é o sincronismo das seqüências pseudoaleatórias no transmissor e no receptor, a fim de que a informação seja satisfatoriamente recuperada no destinatário. Uma desvantagem dessa abordagem, contudo, é a elevada complexidade dos circuitos geradores dessas seqüências (Kolumbán et al., 1997).

Sinais caóticos, por outro lado, podem ser gerados empregando-se circuitos muito simples. Além disso, dado que são sinais cujos espectros assemelham-se aos de ruído, podem ser empregados em vários contextos com o objetivo de aumentar a segurança na transmissão de informações à luz da estratégia de espalhamento de espectro (Cuomo et al., 1993). De fato, a descoberta da possibilidade de sincronização de sistemas caóticos (Pecora e Carrol, 1990) permitiu o desenvolvimento de esquemas eficientes de transmissão segura de informações confidenciais (p. ex., Cuomo et al., 1993). Recentemente, especialistas da área de controle não linear voltaram sua atenção ao estudo da sincronização de sistemas caóticos e sua potencial aplicação em comunicações (p. ex., Fradkov e Pogromsky, 1996). Nesse contexto, Yang et al. (2001) propuseram a aplicação do *backstepping* (Krstic et al., 1995) visando à sincronização de dois sistemas de Chua; aqui, o estado do sistema que representa o circuito receptor converge assintoticamente ao do transmissor. A sistematização proporcionada pelo *backstepping* torna o método atrativo, visto que é aplicável a uma vasta classe de sistemas não lineares, incluindo-se vários sistemas caóticos e hipercaóticos presentes na literatura.

Como assinalam Mascolo e Grassi (1997), a introdução de técnicas sistemáticas de *backstepping* em problemas de controle de caos exige menor esforço de controle em comparação a outras metodologias de controle não linear, como linearização por realimentação. No entanto, como apresentado por Grinits e Bottura (2003), em algumas aplicações o esforço de controle resultante da aplicação do *backstepping* tradicional também pode ser considerado por demais elevado. De fato, magnitudes elevadas de esforço no controle de um

sistema conduzem a um excessivo gasto de energia. É interessante, dessa maneira, o desenvolvimento de metodologias que mantenham a sistematização dos processos de *backstepping* e simultaneamente incorporem mecanismos de otimização de forma a reduzir o esforço de controle.

Técnicas tradicionais, tais como métodos baseados em gradiente e busca aleatória, têm sido consideradas insatisfatórias quando aplicadas em problemas de otimização não linear (Fogel, 2000), pois estes geralmente apresentam propriedades como descontinuidade e multimodalidade. Por outro lado, o grande sucesso que os algoritmos genéticos (AG's) têm apresentado em problemas de otimização extremamente complexos fez com que se tornassem uma técnica de otimização mais eficaz e apropriada para várias aplicações (Michalewicz, 1996). Em particular, os AG's são ferramentas muito úteis no projeto de sistemas de controle – tanto no desenvolvimento de estruturas de controladores quanto como uma estratégia de obtenção de parâmetros para um controlador cuja estrutura já esteja estabelecida *a priori*. Com relação a esta última abordagem, Dracopoulos (1997) ressalta que sua vantagem reside no fato de que é possível o uso de condições de estabilidade já estabelecidas e conhecidas, ao mesmo tempo em que é obtido um melhor desempenho.

É conveniente, portanto, a utilização de um AG para a obtenção dos valores dos parâmetros de um controlador projetado através da técnica de *backstepping* que leve a um melhor desempenho em termos de esforço de controle no problema de sincronização de dois sistemas caóticos de Chua.

Entretanto, visto que a lei de controle obtida por meio do *backstepping* baseia-se no emprego de funções de Lyapunov – ou seja, os objetivos de estabilização e controle são atingidos através da construção de funções de Lyapunov cujas derivadas em cada passo devem ser não positivas – não seria, em princípio, possível a introdução de um AG para otimizar os parâmetros do controlador, pois as condições demandadas pelo Método Direto de Lyapunov e pelo Princípio de Invariância (Krstic et al., 1995), nos quais a técnica de *backstepping* se baseia, estabelecem fortes restrições no espaço de busca paramétrico.

A modificação no *backstepping* tradicional, introduzida em (Grinits e Bottura, 2003), faz uso de uma generalização do Princípio de Invariância de La Salle (Rodrigues et al., 2000) que inclui o caso em que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema pode ser positiva num conjunto limitado do espaço de estados. Isso permite que as condições de estabilidade tornem-se menos severas, aumentando a região factível do espaço de busca paramétrico e permitindo o emprego de AG's na busca de parâmetros que conduzam a um melhor desempenho do controlador em termos de esforço de controle.

Propõe-se, neste trabalho, a aplicação do *backstepping* modificado, agregado a um AG, no projeto de um controlador de melhor desempenho no contexto da sincronização de dois sistemas caóticos de Chua.

A próxima seção revê a Extensão do Princípio de Invariância. Na seguinte, tem-se o projeto da lei de controle, conforme o *backstepping* modificado, para a sincronização de dois sistemas de Chua. Logo após, um AG é utilizado na otimização dos parâmetros do controlador obtido. São feitas comparações entre a lei de controle resultante e o controlador construído com base no *backstepping* tradicional de Yang et al. (2001). Finalmente, conclusões e perspectivas são apresentadas.

2 EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA

É revista, nesta seção, a recentemente introduzida Extensão ao Princípio de Invariância. Sua prova pode ser encontrada em Rodrigues, Alberto & Bretas (2000). Considere a seguinte equação diferencial autônoma (com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$):

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

Teorema. Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções C^1 . Seja $C := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) > 0\}$. Suponha que $l := \sup_{\mathbf{x} \in C} V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ e que $\bar{\Omega}_l := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq l\}$ seja limitado. Seja $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ e seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ de (1) limitada para $t \geq 0$ converge ao conjunto invariante B quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ existe para todo $t \geq 0$, $\varphi(t, \mathbf{x}_0) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ converge ao maior conjunto invariante de (1) contido em $\bar{\Omega}_l$.

No teorema acima, se se supor que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada radialmente, ou seja, se $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, então toda solução de (1) será limitada para $t \geq 0$ e as conclusões do teorema são válidas para todas as soluções.

3 SINCRONIZAÇÃO DE CIRCUITOS DE CHUA COM BACKSTEPPING MODIFICADO

O circuito de Chua contém três elementos acumuladores de energia (um indutor L e dois capacitores C_1 e C_2), um resistor linear R e um resistor não linear $I(v_1)$. Suas equações dinâmicas são as seguintes:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{R} (v_2 - v_1) - I(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R} (v_1 - v_2) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2, \end{aligned} \quad (2)$$

onde C_1, C_2, L e R são parâmetros do circuito, i_L é a corrente no indutor L e v_1 e v_2 são as tensões nos capacitores C_1 e C_2 , respectivamente. Em Yang et al. (2001), a não-linearidade é cúbica: $I(v_1) = Av_1 + Bv_1^3$. Os parâmetros podem, por exemplo, assumir os valores: $C_1 = 1,2\text{nF}$, $C_2 = 12\text{nF}$, $R = 2\text{k}\Omega$, $L = 3\text{mH}$ e $A = -4,285 \times 10^{-4}\text{S}$ e $B = 5 \times 10^{-4}\text{SV}^{-2}$. Dada a elevada discrepância de ordens de grandeza entre esses valores, nos sistemas tratados em Yang et al. (2001) foram introduzidas as seguintes mudanças de escala e de variáveis: $x_1 = v_1, x_2 = v_2, x_3 = Ri_L$ e $\kappa = t/RC_2$. Dessa forma, reescreve-se (2) de modo a se obter o seguinte conjunto de equações diferenciais adimensionais:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\kappa} &= \alpha [x_2 - x_1 - I(x_1)] \\ \frac{dx_2}{d\kappa} &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{d\kappa} &= -\beta x_2, \end{aligned} \quad (3)$$

onde $I(x_1) = ax_1 + bx_1^3$ e κ é uma “unidade de tempo adimensional” com $\kappa = 4,17 \times 10^4 t$. Os parâmetros do sistema (3) adotam os seguintes valores: $\alpha = C_2/C_1 = 10$, $\beta = R^2 C_2/L = 16$, $a = -0,857$ e $b = 1$.

Sob a óptica de controle de sistemas, a sincronização de dois sistemas de Chua é um problema similar ao caso seguidor, pois almeja-se que um sistema-escravo Σ_2 siga um sistema-mestre Σ_1 . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : & \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1^3 - 0,143x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -16x_2 \end{cases} \\ \Sigma_2 : & \begin{cases} \dot{y}_1 = 10(y_2 - y_1^3 - 0,143y_1) + u \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + y_3 \\ \dot{y}_3 = -16y_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$. Em (4), é adotada a notação $\dot{p} = dp/d\kappa$. Objetiva-se, pois, determinar u de modo que se verifique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow 0. \quad (5)$$

Com base nas equações dos sistemas Σ_1 e Σ_2 , obtém-se o seguinte sistema de erros:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -16e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ \dot{e}_3 &= 10e_2 - 1,43e_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u, \end{aligned} \quad (6)$$

onde $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ é o erro de sincronização e $e_1 := x_3 - y_3$, $e_2 := x_2 - y_2$ e $e_3 := x_1 - y_1$. Ressalta-se que, com essa mudança de variáveis, o sistema de erros (6) tem a forma de um *sistema não linear de realimentação estrita* (Krstic et al., 1995), para o qual são aplicáveis as técnicas *backstepping*.

Objetiva-se, portanto, a regulação do estado e na origem com o menor esforço de controle possível e duração aceitável do transitório.

Passo 1. Define-se, inicialmente, a variável auxiliar correspondente à primeira variável de estado:

$$z_1 := e_1. \quad (7)$$

Tem-se, portanto:

$$\dot{z}_1 = -16e_2. \quad (8)$$

Introduz-se a seguinte função de Lyapunov associada ao subsistema (8):

$$V_1 = \frac{1}{2} (z_1 - 1)^2. \quad (9)$$

É importante destacar que o sentido da expressão “função de Lyapunov” neste trabalho inclui o caso em que sua derivada pode assumir valores positivos. A derivada de (9) ao longo de (8) é dada por:

$$\dot{V}_1 = z_1 (-16e_2) - \dot{z}_1. \quad (10)$$

Considerando e_2 como uma entrada de controle virtual e definindo-se a seguinte lei de controle intermediária

$$e_2 = \alpha_1 := \frac{c_{11}}{16} z_1, \quad (11)$$

onde $c_{11} \in \mathfrak{R}$ é um escalar constante, tem-se:

$$\dot{V}_1 = -c_{11} z_1^2 - \dot{z}_1. \quad (12)$$

Passo 2. Define-se a variável auxiliar correspondente à segunda variável de estado:

$$z_2 := e_2 - \alpha_1 = e_2 - \frac{c_{11}}{16} z_1. \quad (13)$$

Pode-se exprimir, dessa maneira, o subsistema z_1 em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_1 = -16 \left(z_2 + \frac{c_{11}}{16} z_1 \right) = -c_{11} z_1 - 16z_2. \quad (14)$$

Derivando-se (13), tem-se:

$$\dot{z}_2 = e_1 - e_2 + e_3 + c_{11} e_2. \quad (15)$$

Introduz-se a função de Lyapunov intermediária

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} (z_2 - 1)^2. \quad (16)$$

A derivada de (16) ao longo de (14) e (15) é expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 (-c_{11} z_1 - 16z_2) + c_{11} z_1 + 16z_2 + \\ & z_2 (e_1 - e_2 + e_3 + c_{11} e_2) - \dot{z}_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Considerando e_3 como uma entrada de controle virtual e definindo-se a seguinte lei de controle intermediária

$$e_3 = \alpha_2 := 16z_1 - e_1 + e_2 - c_{11} e_2 - c_{12} z_1 - c_{22} z_2, \quad (18)$$

onde $c_{12}, c_{22} \in \mathfrak{R}$ são escalares constantes, chega-se a:

$$\dot{V}_2 = -c_{11} z_1^2 - c_{22} z_2^2 - c_{12} z_1 z_2 + c_{11} z_1 + 16z_2 - \dot{z}_2. \quad (19)$$

Passo 3. Define-se a variável auxiliar correspondente à última variável de estado:

$$z_3 := e_3 - \alpha_2 = e_1 + (c_{22} - 1) e_2 + e_3 + (c_{12} - 16) z_1 + c_{22} z_2. \quad (20)$$

Tendo-se em vista (20), pode-se exprimir o subsistema z_2 em sua forma definitiva:

$$\dot{z}_2 = -(c_{12} - 16) - c_{22}z_2 + z_3. \quad (21)$$

Derivando-se (20), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & (c_{11} - 1) e_1 + (251 - c_{11} - 16c_{12}) e_2 + \\ & + (-2, 43 + c_{11}) e_3 - c_{22} (c_{12} - 16) z_1 - \\ & - c_{22}^2 z_2 + c_{22} z_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u. \end{aligned} \quad (22)$$

A função de Lyapunov do sistema completo é

$$V = V_3 = V_2 + \frac{1}{2} (z_3 - 1)^2. \quad (23)$$

A derivada de (23) ao longo de (14), (21) e (22) é expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_{11}z_1^2 - c_{22}z_2^2 - c_{12}z_1z_2 - \dot{z}_3 + \\ & + (c_{11} + c_{12} - 16) z_1 + (c_{22} + 16) z_2 - z_3 + \\ & + z_3 [(c_{11} - 1) e_1 + (251 - c_{11} - 16c_{12}) e_2 + \\ & + (-2, 43 + c_{11}) e_3 - c_{22} (c_{12} - 16) z_1 + (1 - c_{22}^2) z_2 + \\ & + c_{22} z_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u]. \end{aligned} \quad (24)$$

Define-se agora a lei de controle:

$$\begin{aligned} u = & (c_{11} - 1) e_1 + (251 - c_{11} - 16c_{12}) e_2 + \\ & + (-2, 43 + c_{11}) e_3 - c_{22} (c_{12} - 16) z_1 - (c_{22}^2 - 1) z_2 + \\ & + c_{22} z_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 + c_{13}z_1 + c_{23}z_2 + c_{33}z_3, \end{aligned} \quad (25)$$

onde c_{13} , c_{23} , $c_{33} \in \mathfrak{R}$ são escalares constantes. Substituindo (25) em (22) e (24), chega-se, respectivamente, à expressão do subsistema z_3 :

$$\dot{z}_3 = -c_{13}z_1 - (c_{23} + 1) z_2 - c_{33}z_3 \quad (26)$$

e à expressão da derivada da função de Lyapunov de todo o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_{11}z_1^2 - c_{22}z_2^2 - c_{33}z_3^2 - c_{12}z_1z_2 - c_{13}z_1z_3 - \\ & - c_{23}z_2z_3 + (c_{11} + c_{12} + c_{13} - 16) z_1 + \\ & + (c_{22} + c_{23} + 17) z_2 + (c_{33} - 1) z_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Seguindo a notação adotada na Seção 2, o conjunto C , no qual $\dot{V}_3 > 0$, é definido como

$$\begin{aligned} C := \{z \in \mathfrak{R} : & -c_{11}z_1^2 - c_{22}z_2^2 - c_{33}z_3^2 - c_{12}z_1z_2 - \\ & - c_{13}z_1z_3 - c_{23}z_2z_3 + (c_{11} + c_{12} + c_{13} - 16) z_1 + \\ & + (c_{22} + c_{23} + 17) z_2 + (c_{33} - 1) z_3 > 0\}. \end{aligned} \quad (28)$$

De acordo com a Extensão ao Princípio de Invariância, a regulação do sistema de erros (6) – e, portanto, a sincronização dos dois sistemas de Chua (4) – será obtida se o conjunto C for limitado, visto que a função de Lyapunov (23) é ilimitada radialmente. A equação $\dot{V}_3 = 0$ expressa muitos tipos de superfícies quádricas; o conjunto C será limitado caso a superfície quádrica $\dot{V}_3 = 0$ – que representa a fronteira de C – seja um elipsóide real. Nesse caso, em termos das matrizes

$$\begin{aligned} M_1 = & \begin{bmatrix} -c_{11} & -\frac{c_{12}}{2} & -\frac{c_{13}}{2} \\ -\frac{c_{12}}{2} & -c_{22} & -\frac{c_{23}}{2} \\ -\frac{c_{13}}{2} & -\frac{c_{23}}{2} & -c_{33} \end{bmatrix}, \\ M_2 = & \begin{bmatrix} & M_1 & & \\ & & M_2^{14} & \\ & & M_2^{24} & \\ M_2^{14} & M_2^{24} & M_2^{34} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

onde

$$\begin{aligned} M_2^{14} = & 0,5 (c_{11} + c_{12} + c_{13} - 16), \\ M_2^{24} = & 0,5 (c_{22} + c_{23} + 17), \\ M_2^{34} = & 0,5 (c_{33} - 1), \end{aligned} \quad (30)$$

as seguintes condições devem ser satisfeitas (Zwillinger, 1996): $rank(M_1) = 3$; $rank(M_2) = 4$; $\det(M_2) < 0$; as partes reais dos autovalores de M_1 devem ter o mesmo sinal.

Tanto a forma de C quanto o desempenho do controlador em termos do esforço de controle dependem dos valores assumidos pelo conjunto de parâmetros $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$.

4 OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DO CONTROLADOR COM ALGORITMO GENÉTICO

De acordo com o Teorema de *No Free Lunch* (Wolpert & Macready, 1997), não existe uma única ferramenta que resolva *todos* os problemas de maneira ótima. Na resolução de problemas de otimização, por exemplo, métodos clássicos e dedicados mostram-se mais eficientes do que algoritmos evolutivos quando são válidas hipóteses restritivas acerca do espaço de busca, tais como: continuidade, existência de derivadas, convexidade, unimodalidade, etc. Por outro lado, como destaca Von Zuben (2000), algoritmos evolutivos são capazes de lidar com problemas para os quais não é possível ou é muito custoso obter uma descrição detalhada, ou ainda junto aos quais não é possível supor restrições muito fortes (ambas condições necessárias para a aplicação de ferramentas de solução dedicadas). Por exemplo, algoritmos de programação linear requerem que a função-objetivo seja linear; caso ela não seja linear, algoritmos de busca baseados no gradiente requerem que a função-objetivo seja diferenciável e que se possa calcular essa derivada a um baixo custo computacional. Na ausência de linearidade e na impossibilidade de se obter a derivada (seja porque ela não existe ou por representar uma etapa muito custosa) da função-objetivo, os algoritmos evolutivos passam a representar uma das poucas alternativas de se chegar à solução.

Para o problema

$$\{c_{i,j}\} = \arg \min_{\{c_{i,j}\}} \left[\left(\begin{array}{c} \text{magnitude} \\ \text{de } u \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{duração do transitório} \\ \text{das variáveis de estado de } e \end{array} \right) \right], \quad (31)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, não é possível obter formalização e descrição apropriadas para o uso de métodos convencionais (baseados em gradientes, por exemplo). De fato, a função-objetivo (31) não permite o cômputo de derivadas e características do espaço de busca cujo conhecimento é necessário para a aplicação desses métodos – continuidade, convexidade, etc. – não são passíveis de verificação. Opta-se, portanto, pela utilização de técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva na busca de valores adequados para $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$.

O AG é utilizado *off-line* na busca em uma população de controladores (i.e., numa população de conjuntos de parâmetros $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}\}$) o membro mais apto a ser implementado.

AG's são algoritmos estocásticos cujos métodos de busca modelam fenômenos biológicos baseados nas teorias de Darwin (Michalewicz, 1996). Um dos requisitos para o AG

encontrar uma solução adequada para um dado problema é que os indivíduos da população (i.e., os candidatos à solução) devem estar codificados numa forma que permita ao AG operar de forma eficiente. Na tarefa de otimização presente, a população tem 100 cromossomos, com seis genes cada (relativos ao conjunto de seis parâmetros), cujos alelos podem assumir qualquer valor no intervalo $[-10, 10]$ com precisão de quatro dígitos após a casa decimal. Foi escolhida essa forma de representação porque ela simplifica o processo de codificação/descodificação, conduzindo a um fácil monitoramento da dinâmica de operação do AG.

O AG incorpora operações de seleção, *crossover* e mutação. No processo de seleção, uma nova geração é formada selecionando-se indivíduos da população existente de acordo com seu *fitness*. Com base na idéia de que, na média, os membros da população da geração atual devem ser tão bons quanto (ou melhores que) os da geração anterior na maximização da função de *fitness*, utiliza-se uma variação da *estratégia elitista* (Michalewicz, 1996) na qual os 20 melhores indivíduos sobrevivem, sem alterações, na geração seguinte. O *crossover* combina as características de dois cromossomos para formar uma prole de dois indivíduos, que podem substituir indivíduos de menor *fitness*. Utiliza-se aqui o *crossover aritmético*, combinação linear de dois cromossomos (Michalewicz, 1996). Os 80 cromossomos de melhor *fitness* são selecionados para reprodução; destes, os cromossomos-pais são selecionados aleatoriamente, com igual probabilidade. O operador de *mutação* evita que o AG convirja para soluções locais. Emprega-se aqui a *mutação não uniforme*, que permite que o operador faça a busca de maneira uniforme inicialmente e localmente em gerações mais avançadas (Michalewicz, 1996). O AG foi rodado durante 100 gerações.

A função de *fitness* leva em conta o objetivo do projeto: magnitudes de esforço de controle tão pequenas quanto possível sem um aumento excessivo da duração do transitório. Uma duração adequada do transitório deve ser não maior que $\kappa_t = 5$ unidades de tempo. Para cada cromossomo na geração t , perfaz-se uma simulação de modo a se avaliar sua performance (i.e., a performance do controlador correspondente) em termos da função de *fitness*

$$fitness = \frac{1}{p + \int_0^5 |u(\tau)| + \beta \|e(\tau)\|_2 d\tau}, \quad (32)$$

onde a norma Euclidiana representa o efeito do transitório e β é um fator ponderador; aqui, $\beta = 100$. Antes de se proceder às simulações, cada indivíduo é considerado factível ou infactível em termos das condições associadas às matrizes (29). Os indivíduos factíveis são os que tornam o conjunto C limitado. Os cromossomos infactíveis são penalizados com $p = 10^{10}$. São executadas simulações apenas para os indivíduos

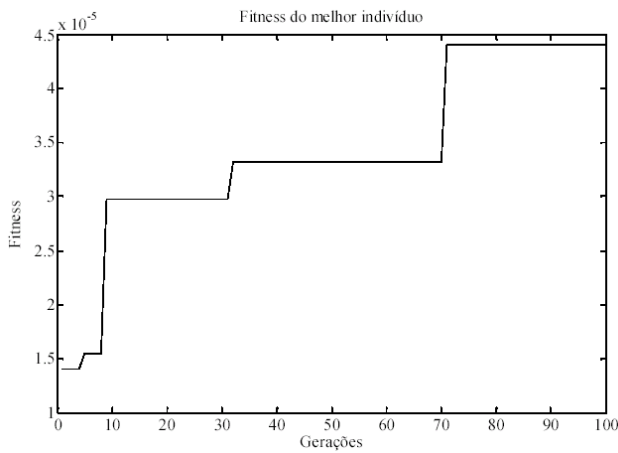


Figura 1: Evolução do *fitness* do melhor indivíduo.

factíveis (nesse caso, $p = 0$).

As condições iniciais são as mesmas empregadas em Yang et al. (2001): $\mathbf{x}(0) = [2, 3 \ 1, 2 \ 3, 1]^T$ e $\mathbf{y}(0) = [0, 1 \ 3, 2 \ 1, 1]^T$. A Figura 1 apresenta a evolução do *fitness* do melhor indivíduo ao longo de 100 gerações.

Após 100 gerações, o melhor cromossomo tem *fitness* $4,4018 \times 10^{-5}$ e é composto pelos seguintes genes:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 8,6335; & c_{22} &= 4,0573; & c_{33} &= 1,4028; \\ c_{12} &= 9,9884; & c_{13} &= 2,4803; & c_{23} &= 0,2082. \end{aligned} \quad (33)$$

O conjunto C correspondente a esses parâmetros é dado por:

$$\begin{aligned} C = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : & -8,6335z_1^2 - 4,0573z_2^2 - 1,4028z_3^2 - \\ & -9,9884z_1z_2 - 2,4803z_1z_3 - 0,2082z_2z_3 + \\ & +5,1023z_1 + 21,2656z_2 + 0,4028z_3 > 0 \} \end{aligned} \quad (34)$$

e sua fronteira é um elipsóide. Como C é um conjunto convexo e a função de Lyapunov (23) é uma função convexa, o $\sup_{\mathbf{z} \in C} V(\mathbf{z})$ localiza-se na fronteira de C . O conjunto $\bar{\Omega}_l$ é uma esfera e C está contido em $\bar{\Omega}_l$. Assim, toda solução converge para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. A introdução da lei de controle (25) com parâmetros (33)

$$\begin{aligned} u &= 11,6637(x_1 - y_1) + 106,1457(x_2 - y_2) + \\ & + 3,4176(x_3 - y_3) - 10x_1^3 + 10y_1^3 \end{aligned} \quad (35)$$

no sistema Σ_2 faz com que o estado \mathbf{z} convirja para a origem $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Levando-se em conta as expressões (7), (13) e (20), o estado \mathbf{e} converge para a origem $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

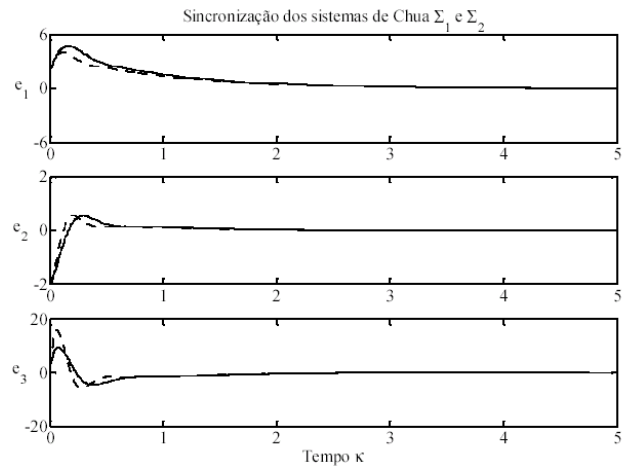


Figura 2: Evolução no tempo das variáveis de estado de \mathbf{e} .

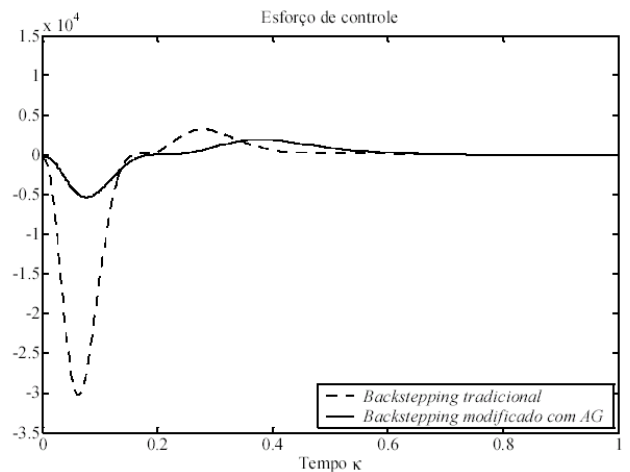


Figura 3: Redução do esforço de controle.

A Figura 2 mostra a evolução no tempo κ das variáveis de estado e_1 , e_2 e e_3 quando a lei de controle (34) é aplicada ao sistema (6) (linhas sólidas). A Figura 2 também contém as respostas temporais obtidas aplicando-se o método apresentado em Yang et al. (2001) (linhas tracejadas). Note que a sincronização entre os sistemas de Chua Σ_1 e Σ_2 é conseguida em ambos os casos com $\kappa_t = 5$.

A Figura 3 traz o esforço de controle requerido para a sincronização quando é aplicado o controlador (34) no sistema (6) (linha sólida). A Figura 3 também mostra a evolução do esforço de controle quando é aplicada a lei de controle obtida seguindo a metodologia do *backstepping* tradicional de Yang et al. (2001) (linha tracejada). Observe que a magnitude do esforço de controle é reduzida quando o controlador obtido através do *backstepping* modificado com parâmetros otimizados via AG é aplicado.

Comparando-se a metodologia apresentada com esquemas de sincronização baseados em observadores (Nijmeijer e Mareels, 1997), uma desvantagem (deste método e de Yang et al. (2001)) é a utilização de várias variáveis de estado dos sistemas mestre e escravo na formação da lei de controle. No entanto, esta abordagem pode ser empregada na sincronização de diversos tipos de sistemas não lineares, incluindo-se vários sistemas caóticos e hipercaóticos. Além disso, a introdução de observadores pode ser um meio de se compensar esse ponto. Deve-se salientar, ainda, que é possível haver soluções melhores que a obtida, levando-se em conta o caráter não determinístico do AG.

Perspectiva futura interessante de análise é a adaptação da metodologia proposta para o caso de sincronização de vários sistemas caóticos.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho propôs um procedimento baseado em modificação da técnica de *backstepping* aliado a um algoritmo genético objetivando-se um melhor desempenho na sincronização de dois sistemas caóticos de Chua em termos de esforço de controle em comparação ao método de *backstepping* tradicional. Simulações em Matlab foram apresentadas de forma a ilustrar a eficácia da metodologia proposta.

REFERÊNCIAS

- Cuomo, K. M., Oppenheim, A. V. & Strogatz, S. H. (1993) Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications. *IEEE Trans. Circuits Syst., II*, 40(10): 626-633.
- Dixon, R. C. (1994) *Spread Spectrum Communication Systems with Commercial Applications*. 3.ed. New York, NY, John Wiley & Sons.
- Dracopoulos, D. (1997) Genetic Algorithms and Genetic Programming for Control. In: Dasgupta, D. & Michalewicz, Z. (eds.) *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*. Berlin, Springer-Verlag.
- Fogel, D. (2000) Introduction to Evolutionary Computation. In: Bäck, T., Fogel, D. & Michalewicz, Z. (eds.) *Evolutionary Computation I*; Basic Algorithms and Operators. Philadelphia, PA, Institute of Physics Publishing.
- Fradkov, A. L. & Pogromsky, A. (1996) Speed Gradient Control of Chaotic Continuous-Time Systems. *IEEE Trans. Circuits Syst., I*, 43(11): 907-913.
- Grinitis, E. V. & Bottura, C. P. (2003) Control of Chaotic Systems with Improved Performance Using Modified Backstepping and Genetic Algorithms. *Proc. of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Houston, TX, 426-431.
- Haykin, S. (1989) *An Introduction to Analog and Digital Communications*. New York, NY, John Wiley & Sons.
- Kolumbán, G., Kennedy, M. P. & Chua, L. O. (1997) The Role of Synchronization in Digital Communications Using Chaos – Part I: Fundamentals of Digital Communications. *IEEE Trans. Circuits Syst., I*, 44(10): 927-936.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I. & Kokotovic, P. (1995) *Non-linear and Adaptive Control Design*. New York, NY, John Wiley & Sons.
- Mascolo, S. & Grassi, G. (1997) Controlling Chaos via Backstepping Design. *Physical Review E*, 56(5): 6166-6169.
- Michalewicz, Z. (1996) *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. 3.ed. Berlin, Springer-Verlag.
- Nijmeijer, H. & Mareels, I. (1997) An Observer Looks at Synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst., I*, 44(10): 882-890.
- Pecora, L. M. & Carrol, T. L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8): 821-824.
- Rodrigues, H., Alberto, L. & Bretas, N. (2000) On the Invariance Principle: Generalizations and Applications to Synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst., I*, 47(5): 730-739.
- Von Zuben, F. J. (2000) *Computação Evolutiva: Uma Abordagem Pragmática*. DCA/FEEC, Unicamp.
- Wolpert, D. H. & Macready, W. G. (1997) No Free Lunch Theorems for Optimization. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, 1(1): 67-82.
- Yang, T., Li, X. F. & Shao, H. H. (2001) Chaotic Synchronization Using Backstepping Method with Application to the Chua's Circuit and Lorenz System. *Proc. of the American Control Conference*. Arlington, VA, 2299-2300.
- Zwillinger, D. (1996) *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*. Boca Raton, FL, CRC Press.