
SÍNTESE DE SISTEMAS ESTRITAMENTE REAIS POSITIVOS ATRAVÉS DO CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Márcio Roberto Covacic*
marciocovacic@uel.br

Edvaldo Assunção†
edvaldo@dee.feis.unesp.br

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira†
marcelo@dee.feis.unesp.br

Rodrigo Cardim†
rcardim@dee.feis.unesp.br

*Departamento de Engenharia Elétrica,
Centro de Tecnologia e Urbanismo,
Universidade Estadual de Londrina, UEL
Caixa Postal 6001, 86051-970, Londrina - PR.

†Departamento de Engenharia Elétrica,
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira,
UNESP - Univ Estadual Paulista,
Av. José Carlos Rossi 1370, 15385-000, Ilha Solteira - SP.

ABSTRACT

SPR Systems Synthesis Through Routh-Hurwitz Criterion

Given a linear time-invariant plant $G_{ol}(s)$ with one input and q outputs, where $q > 1$, a method based on the Routh-Hurwitz Stability Criterion is proposed to obtain a constant tandem matrix $F \in \mathbb{R}^q$, such that $FG_{ol}(s)$ is a minimum-phase system. From this solution, the system $FG_{ol}(s)$ is represented in state space by $\{A, B, FC\}$ and a constant output feedback matrix $K_o \in \mathbb{R}^1$ is obtained such that the feedback system $\{A - BK_oC, B, FC\}$ is Strictly Positive Real (SPR). The proposed procedure offers necessary and sufficient conditions for both problems. Initially, the general case, with a generic q , is analyzed. Following, the particular cases $q = 2$ and $q = 3$ are studied.

KEYWORDS: SPR Systems, Minimum Phase, Routh-Hurwitz Criterion, Output Feedback.

RESUMO

Dada uma planta $G_{ol}(s)$ linear e invariante no tempo com uma entrada e q saídas, sendo $q > 1$, é proposto um método, baseado no Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz, para a obtenção de uma matriz constante $F \in \mathbb{R}^q$ em série com a saída, de modo que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. A partir desta solução, o sistema $FG_{ol}(s)$ é representado em espaço de estados por $\{A, B, FC\}$ e é obtida uma matriz constante de realimentação da saída $K_o \in \mathbb{R}^1$, de modo que o sistema realimentado $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja Estritamente Real Positivo (ERP). O procedimento proposto fornece condições necessárias e suficientes para os dois problemas. Inicialmente, é analisado o caso geral, com q genérico. Em seguida, são estudados os casos particulares $q = 2$ e $q = 3$.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas ERP, Fase Mínima, Critério de Routh-Hurwitz, Realimentação da Saída.

Artigo submetido em 17/12/2008 (Id.: 00934)
Revisado em 29/04/2009, 14/10/2009, 04/03/2010
Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Alexandre Bazanella

1 INTRODUÇÃO

A importância dos sistemas ERP na análise e projeto de sistemas de controle é comprovada pelos resultados obtidos a respeito da estabilidade destes sistemas, como a hiperestabilidade assintótica de Popov (Anderson, 1968). Estes resultados possuem uma ampla gama de aplicações, como no projeto de sistemas de controle adaptativos (Barkana et al., 2006; Hsu et al., 1994; Huang et al., 1999; Kaufman et al., 1994; Landau, 1979; Owens et al., 1987; Teixeira, 1989), em sistemas de controle com estrutura variável (Cardim et al., 2008; Cardim et al., 2009; Collado et al., 2007; Covacic, Teixeira, Assunção e Cardim, 2008; DeCarlo et al., 1988; Shu et al., 2008; Teixeira, 1990; Teixeira, 1993; Teixeira et al., 2000; Teixeira et al., 2002; Teixeira et al., 2006) e na estabilização de sistemas incertos com realimentação da saída (Cunha et al., 2003; Steinberg e Corless, 1985; Xiang et al., 2005).

Um problema relacionado com este método de projeto é a chamada síntese ERP: dada uma planta linear invariante no tempo, $\{A, B, C\}$, controlável e observável, com m variáveis de entrada e p variáveis de saída, o objetivo é obter uma matriz constante de realimentação da saída K_o e uma matriz constante F em série com a saída, de modo que o sistema controlado $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja ERP. A matriz F combina as saídas da planta, tornando o sistema compatível com a igualdade $B^T P = FC$, que é uma das condições para um sistema ERP. Em (Teixeira, 1989; Teixeira, 1990), foi demonstrado que este problema é equivalente a um problema de estabilização com realimentação da saída. Para plantas com o mesmo número de variáveis de entrada e de saída, a condição necessária e suficiente para este problema é que todos os zeros de transmissão tenham parte real negativa e que $\det(CB) \neq 0$ (Kaufman et al., 1994; Owens et al., 1987; Teixeira, 1989).

Em (Boyd et al., 1994; Choi, 1997; Choi, 1998; Choi, 1999; Huang et al., 1999; Teixeira et al., 2000; Teixeira et al., 2002), foi estudada a solução deste problema usando Inequações Matriciais Lineares (LMIs). A vantagem deste método é que as LMIs, quando factíveis, podem ser resolvidas facilmente através de programas computacionais como *Matlab* (Gahinet et al., 1995) e *LMISol* (de Oliveira et al., 1997). Estes métodos permitem, também, outras especificações de projeto, como taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída (Bernussou et al., 1999; Teixeira et al., 2000; Teixeira et al., 2002). Para o problema acima, com $p > m$, são conhecidas apenas condições suficientes (Teixeira et al., 2002).

Outra ferramenta útil para a análise da estabilidade de um sistema é o Critério de Routh-Hurwitz (Dorf e Bishop, 1998; Ogata, 1997). Uma das suas mais importantes aplicações é a determinação da faixa de valores de um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ tais

que todas as raízes de um polinômio $d(s, k)$ possuam parte real negativa. Outras aplicações para o Critério de Routh-Hurwitz estão disponíveis na literatura. Em (Blondel e Lundvall, 1995), o critério é utilizado para determinar se um sistema é estabilizável, isto é, se existe um controlador que torna o sistema estável. Em (Peña, 2004), são apresentados alguns testes para checar as condições de Routh-Hurwitz e a positividade total de uma matriz, transformando-a em uma matriz triangular superior. Em (Hwang e Yang, 1999), o Critério de Routh-Hurwitz é utilizado para testar a propriedade Hurwitz de um segmento de polinômios $(1 - \lambda)p_o(s) + \lambda p_1(s)$, sendo que $0 \leq \lambda \leq 1$. Em (Bose, 1989; Yang e Hwang, 2002), o método é estendido para combinações convexas de polinômios complexos. Em (Barmish, 1984; Białas e Garloff, 1985; Guiver e Bose, 1983), é apresentado um método para a análise da estabilidade de polinômio, cujos coeficientes sofrem perturbações. Em (Hwang e Yang, 1999; Bandyopadhyay et al., 1994; Bandyopadhyay et al., 1997), o método é estendido para determinar modelos de intervalos de ordem reduzida para sistemas lineares em que cada coeficiente de $n(s)$ e $d(s)$ pertence a um intervalo. Em (Wei e Yedavalli, 1987), os coeficientes do polinômio característico dependem de um conjunto de parâmetros, com cada parâmetro pertencente a um intervalo. Existem outros métodos, por exemplo o teorema de Hermite-Biehler (Oliveira et al., 2003; Oliveira et al., 2009), que permitem a análise da estabilidade para plantas com ou sem atrasos de transporte.

Em (Teixeira et al., 2007), é apresentado um procedimento, baseado no Critério de Routh-Hurwitz (Dorf e Bishop, 1998; Ogata, 1997), para a determinação da faixa de valores de k (condições necessárias e suficientes) que tornam estável um sistema com uma entrada e uma saída (SISO) realimentado através de um controlador proporcional $G_c(s) = k$. O método reúne as raízes reais de todos os numeradores e denominadores da primeira coluna da tabela de Routh-Hurwitz e agrupa-os em ordem crescente, considerando os valores repetidos apenas uma vez. São obtidos, assim, os intervalos entre as raízes reais. Para obter a faixa de estabilidade, basta analisar um ponto de cada intervalo. A ideia foi estendida para o projeto de outros tipos de controladores, como o proporcional-integral-derivativo (PID) e é apresentado, também, em (Teixeira et al., 2007), um programa em *Matlab* que implementa este método, que está disponível na internet (<http://www.dee.feis.unesp.br/docentes/marcelo/fxestab/english/index.html>).

Em (Covacic, Teixeira e Assunção, 2008), é proposto um método baseado no Critério de Routh-Hurwitz para o estudo da estabilidade de sistemas incertos $\dot{x} = (A_o + \alpha \Delta A)x$, através da determinação da faixa de valores de α que garantem a estabilidade assintótica do sistema. O método também é utilizado para a determinação da faixa de valores de

k que garantem a estabilidade de sistemas de malha fechada $\dot{x} = (A - BKC)x$, com $K = kI$.

Neste trabalho, o Critério de Routh-Hurwitz é utilizado para a obtenção de uma matriz $F \in \mathbb{R}^q$, que combina as q saídas de uma planta $\{A, B, C\}$ com uma entrada, de modo que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, FC\}$ possuam parte real negativa. A partir deste sistema de fase mínima, é obtida, através de LMIs, uma matriz K_o que torna ERP o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$. Após a análise do caso geral, com q genérico, são estudados os casos particulares $q = 2$ e $q = 3$.

Na Seção 2, são apresentados os conceitos básicos sobre sistemas ERP. Na Seção 3, o Critério de Routh-Hurwitz é aplicado para a obtenção de um sistema de fase mínima. A partir deste sistema de fase mínima, pode ser obtido um sistema ERP, como é apresentado na Seção 4. A Seção 5 mostra dois exemplos de aplicação do método e a Seção 6 apresenta as conclusões finais.

2 SISTEMAS ERP

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável dada por (1).

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor das variáveis de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ a saída da planta, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de saída da planta.

O conceito de sistemas ERP é apresentado em (Anderson, 1968), assim como o Lema 1, que fornece a condição necessária e suficiente para que o sistema (1) seja ERP.

Lema 1 (Anderson, 1968) *A matriz de transferência do sistema (1), $G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B$, é ERP se e somente se existir uma matriz $P = P^T$, tal que:*

$$PA + A^T P < 0, \quad B^T P = C, \quad P > 0.$$

O Teorema 2 estabelece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz K que torna ERP o sistema de malha fechada da Fig. 1, com entrada $V(s)$ e saída $Y(s)$.

Teorema 2 (Kaufman et al., 1994; Owens et al., 1987; Teixeira, 1989): *Considere a Fig. 1. Então, existe uma matriz constante K , tal que o sistema da Fig. 1, com entrada $V(s)$ e saída $Y(s)$, dado pela matriz de transferência $(I + G_{ol}(s)K)^{-1}G_{ol}(s)$, seja ERP, se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

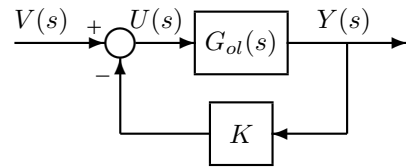


Figura 1: Sistema realimentado do Teorema 2.

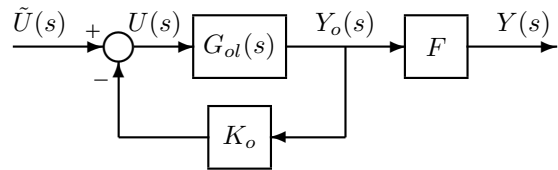


Figura 2: Sistema realimentado do Problema 1.

- (i) $CB = (CB)^T > 0$;
- (ii) *todos os zeros de transmissão da planta $\{A, B, C\}$ apresentam parte real negativa.*

Como definido em (Chen, 1999), os zeros de transmissão de um sistema cujo número de saídas p é maior ou igual ao número de entradas m são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Com base no Lema 1, foi proposto o seguinte problema:

Problema 1 *Dada a planta $\{A, B, C\}$ linear, invariante no tempo, controlável e observável, com $p \geq m$, $\text{posto}(C) = p$ e $\text{posto}(B) = \text{posto}(CB) = m$, obtenha condições necessárias e/ou suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes F e $K_o \in \mathbb{R}^{m \times p}$, para que o sistema descrito na Fig. 2, dado pela matriz de transferência $F(I + G_{ol}(s)K)^{-1}G_{ol}(s)$, seja ERP.*

Na Seção 3, é apresentado um método para a obtenção de um sistema de fase mínima através do Critério de Routh-Hurwitz, para plantas com uma entrada e q saídas, sendo $q > 1$. Na Seção 4, é descrita a obtenção de um sistema ERP a partir do sistema de fase mínima obtido.

3 OBTENÇÃO DE SISTEMAS DE FASE MÍNIMA ATRAVÉS DO CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Considere uma planta $G_{ol}(s) = N(s)D(s)^{-1}$, controlável e observável, com uma entrada e q saídas, sendo $D(s) = d(s)$

e $N(s) = [n_1(s) \ n_2(s) \ \dots \ n_q(s)]^T$ matrizes polinomiais, com:

$$n_i(s) = n_{i(n-1)}s^{n-1} + \dots + n_{i1}s + n_{i0}, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{(n-1)}s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0, \quad d_n \neq 0,$$

sendo que $n_1(s), \dots, n_q(s)$ e $d(s)$ não possuem raízes comuns (neste caso, $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas à direita (Chen, 1999)).

De acordo com o Teorema 2, existem matrizes F e K_o , sendo $K_o = KF$, tais que o sistema $\{A - BK_o C, B, FC\}$ é ERP se e somente se existir F tal que $FCB = (FCB)^T > 0$ e $\{A, B, FC\}$ for um sistema de fase mínima, isto é, os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$, que são os zeros de $FG_{ol}(s)$, apresentarem parte real negativa.

Seja $F = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q] \in \mathbb{R}^q$. Então, o produto $FG_{ol}(s)$ é dado por:

$$FG_{ol}(s) = FN(s)D(s)^{-1} = \frac{f_1 n_1(s) + \dots + f_q n_q(s)}{d(s)},$$

sendo:

$$\begin{aligned} f_1 n_1(s) + \dots + f_q n_q(s) &= f_1 (n_{1(n-1)}s^{n-1} + \dots + n_{11}s + \\ & n_{10}) + \dots + f_q (n_{q(n-1)}s^{n-1} + \dots + n_{q1}s + n_{q0}) \\ &= (f_1 n_{1(n-1)} + \dots + f_q n_{q(n-1)})s^{n-1} + \dots + \\ & (f_1 n_{11} + \dots + f_q n_{q1})s + (f_1 n_{10} + \dots + f_q n_{q0}). \end{aligned}$$

A condição $FCB = (FCB)^T > 0$ ocorre somente quando o grau relativo de $FG_{ol}(s) = FC(sI - A + BK_o C)^{-1}B$ é igual a 1 (Owens et al., 1987; Slotine e Li, 1991), isto é, grau($f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) + \dots + f_q n_q(s)$) = grau($d(s)$) - 1. Isto ocorre se e somente se:

$$f_1 n_{1(n-1)} + f_2 n_{2(n-1)} + \dots + f_q n_{q(n-1)} \neq 0.$$

Se $n_{1(n-1)} = n_{2(n-1)} = \dots = n_{q(n-1)} = 0$, o grau relativo do sistema é maior que 1, para qualquer $F \in \mathbb{R}^q$. Então, não existem matrizes F e K_o que tornam o sistema ERP.

Os zeros de transmissão da planta $G_{ol}(s)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que $N(s) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Sejam $z_{p1}, z_{p2}, \dots, z_{pk}$ os zeros de transmissão da planta. Então,

$$\begin{aligned} n_p(s) &= (s - z_{p1})(s - z_{p2}) \dots (s - z_{pk}), \\ n_i(s) &= n_p(s)\bar{n}_i(s), \quad i = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (2)$$

sendo $\bar{n}_1(s), \dots, \bar{n}_q(s)$ polinômios coprimos, isto é, sem raízes comuns. Os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de:

$$\begin{aligned} FN(s) &= f_1 n_1(s) + \dots + f_q n_q(s) \\ &= f_1 n_p(s)\bar{n}_1(s) + f_2 n_p(s)\bar{n}_2(s) + \dots + f_q n_p(s)\bar{n}_q(s). \end{aligned}$$

Então, os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $n_p(s)$ e as raízes de $[f_1 \bar{n}_1(s) + f_2 \bar{n}_2(s) + \dots + f_q \bar{n}_q(s)]$. Logo, se $n_p(s)$ possui pelo menos uma raiz com parte real não-negativa, não existe uma matriz $F \in \mathbb{R}^q$ tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima.

Se $f_1 \neq 0$, então:

$$\begin{aligned} FN(s) &= f_1 n_p(s) \left[\bar{n}_1(s) + \frac{f_2}{f_1} \bar{n}_2(s) + \dots + \frac{f_q}{f_1} \bar{n}_q(s) \right] \\ &= f_1 n_p(s) [\bar{n}_1(s) + f_{k2} \bar{n}_2(s) + \dots + f_{kq} \bar{n}_q(s)], \end{aligned} \quad (3)$$

sendo $f_{ki} = \frac{f_i}{f_1}$, para $i = 2, \dots, q$.

Se todas as raízes de $n_p(s)$ apresentam parte real negativa, então os valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima, se existirem, são tais que todas as raízes do polinômio:

$$r(s, f_k) = \bar{n}_1(s) + f_{k2} \bar{n}_2(s) + \dots + f_{kq} \bar{n}_q(s) \quad (4)$$

apresentam parte real negativa. Os resultados propostos em (Teixeira et al., 2007) permitem o estudo da posição das raízes do polinômio $FN(s)$.

3.1 Sistemas com Duas Saídas

Considere, agora, uma planta $G_{ol}(s) = N(s)D(s)^{-1}$ com uma entrada e duas saídas, sendo $D(s) = d(s)$ e $N(s) = [n_1(s) \ n_2(s)]^T$ matrizes polinomiais coprimas à direita. Seja $F = [f_1 \ f_2] \in \mathbb{R}^2$. Considerando que $f_1 \neq 0$, então, de (3), os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de:

$$FN(s) = f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1 n_p(s) [\bar{n}_1(s) + f_k \bar{n}_2(s)],$$

sendo $f_k = \frac{f_2}{f_1}$. A faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima, se existirem, pode ser determinada com exatidão através do Critério de Routh-Hurwitz, com o método descrito em (Teixeira et al., 2007). O Exemplo 1 ilustra este procedimento.

3.2 Sistemas com Três Saídas

Considere, agora, uma planta $G_{ol}(s) = N(s)D(s)^{-1}$ com uma entrada e três saídas, sendo $N(s)$ e $D(s)$ matrizes polinomiais coprimas à direita, $D(s) = d(s)I$ e $N(s) =$

$[n_1(s) \ n_2(s) \ n_3(s)]^T$. Seja $F = [f_1 \ f_2 \ f_3] \in \mathbb{R}^3$. Considerando que $f_1 \neq 0$, então, de (3), os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de:

$$FN(s) = f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) + f_3 n_3(s) \\ = f_1 n_p(s) [\bar{n}_1(s) + f_{k2} \bar{n}_2(s) + f_{k3} \bar{n}_3(s)],$$

sendo $f_{k2} = \frac{f_2}{f_1}$ e $f_{k3} = \frac{f_3}{f_1}$. Novamente, utilizando-se o método proposto em (Teixeira et al., 2007), é possível determinar o lugar geométrico dos ganhos do controlador, no plano (f_{k2}, f_{k3}) , que torna estável o sistema realimentado. Para alcançar este objetivo, pode-se escolher um intervalo de valores para f_{k3} , no qual deseja-se analisar a estabilidade. Então, fixando-se um valor de f_{k3} neste intervalo, pode-se obter os valores de f_{k2} (condições necessárias e suficientes) para a estabilidade do sistema de malha fechada, para o ganho f_{k3} escolhido. Este procedimento pode ser repetido quantas vezes forem necessárias, para uma boa visualização da região de estabilidade. O Exemplo 2 ilustra este procedimento.

Observação 1 Note que, na Subseção 3.1, quando o número de saídas da planta é $q = 2$, o método permite a determinação rápida da faixa de valores do parâmetro f_k que torna $FG_{ol}(s)$ um sistema de fase mínima. Quando $q = 3$, foi visto, na Subseção 3.2, que é necessário fixar um parâmetro (f_{k3}) para obter a faixa de valores do outro parâmetro (f_{k2}) para que $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. No caso geral, com q saídas, existem $q - 1$ parâmetros e $q - 2$ parâmetros devem ser fixados em intervalos dados para a busca de valores de um parâmetro que soluciona o problema. Esta busca pode tornar-se computacionalmente lenta, à medida que q aumenta. Este fato motiva o estudo de métodos que evitem buscas em regiões nas quais não existem soluções. Por exemplo, a busca pode utilizar o fato bem conhecido sobre a necessidade de um polinômio Hurwitz apresentar todos os coeficientes com o mesmo sinal, para restringir a região de busca. Este é um tópico para pesquisas futuras.

4 OBTENÇÃO DE UM SISTEMA ERP A PARTIR DE UM SISTEMA DE FASE MÍNIMA

Na Seção 3, foi apresentado um método baseado no Critério de Routh-Hurwitz para determinar exatamente uma matriz $F \in \mathbb{R}^{1 \times q}$ de modo que todas as raízes do polinômio $FN(s)$, que correspondem aos zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$, sendo $G_{ol}(s) = N(s)D(s)^{-1}$, possuam parte real negativa.

Obtida a matriz F de modo que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima, o segundo passo é determinar uma matriz de realimentação da saída K_o que torna ERP o sistema

$\{A - BK_o C, B, FC\}$. A solução deste problema é garantida através do Teorema 3, obtido diretamente do Lema 1. A solução do problema através de LMIs permite a adição de outras especificações, como taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída.

Teorema 3 Considere F tal que o sistema $\{A, B, FC\}$ seja de fase mínima. Então, uma solução para o Problema 1 é obtida através das seguintes LMIs, em termos de K_o e $P = P^T$:

$$PA + A^T P - C^T F^T K_o C - C^T K_o^T F C < 0, \quad (5)$$

$$B^T P = FC, \quad (6)$$

$$P > 0. \quad (7)$$

Prova: A prova deste teorema é obtida diretamente, utilizando-se o Lema 1, que foi apresentado em (Anderson, 1968). \square

Observação 2 Quando as condições do Teorema 3 são factíveis, o *software LMISol* (de Oliveira et al., 1997) pode ser utilizado para a determinação de K_o , F e $P = P^T$. A condição (6) é uma igualdade matricial linear e existem *softwares*, por exemplo, o LMI Control Toolbox do *Matlab* (Gahinet et al., 1995), que não permitem, diretamente, esta restrição.

5 EXEMPLOS

5.1 Exemplo 1

Considere a planta $G_{ol}(s)$, descrita por:

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B = N(s)D(s)^{-1}, \quad (8)$$

sendo:

$$D(s) = [s^3 + 3s^2 - 4s - 13],$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 + 5s - 6 \\ s^2 + 5s - 7 \end{bmatrix}.$$

De acordo com (Chen, 1999), uma representação da planta $G_{ol}(s)$ é dada por (1), sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O objetivo deste exemplo é a determinação de matrizes K_o e F para que o sistema $\{A - BK_o C, B, FC\}$ torne-se ERP.

As raízes de $n_1(s)$ são -6 e 1 e as raízes de $n_2(s)$ são $-6, 1401$ e $1, 1401$. Portanto, $n_1(s)$ e $n_2(s)$ não são polinômios Hurwitz. Então, é necessário encontrar uma matriz

$F = [f_1 \quad f_2] = f_1 [1 \quad f_k]$, sendo $f_k = f_2/f_1$, tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. Os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes do polinômio:

$$r(s, f_k) = (s^2 + 5s - 6) + f_k(s^2 + 5s - 7) \\ = (f_k + 1)s^2 + (5f_k + 5)s + (-7f_k - 6).$$

De acordo com o Critério de Routh-Hurwitz, utilizando o método proposto em (Teixeira et al., 2007), o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima se e somente se:

$$-1 < f_k < -0,85714.$$

Escolhendo-se $f_k = -0,9$ e $f_1 = 1$, tem-se $F = [1 \quad -0,9]$ e $FN(s) = 0,1s^2 + 0,5s + 0,3$. Os zeros de transmissão do sistema são $z_1 = -4,3028$ e $z_2 = -0,6972$. Logo, o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima.

Com a matriz F definida acima, as matrizes P e K_o foram obtidas através do Teorema 3. A solução obtida com o *LMI-Sol* foi:

$$P = \begin{bmatrix} 4,1209 & 2,0575 & 0,3000 \\ 2,0575 & 3,2709 & 0,5000 \\ 0,3000 & 0,5000 & 0,1000 \end{bmatrix},$$

$$K_o = [33,3846 \quad -31,0260].$$

Os autovalores de P são $\lambda_1 = 5,8492$, $\lambda_2 = 1,6196$ e $\lambda_3 = 0,0229$. Os zeros de transmissão do sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ são $z_1 = -4,3028$ e $z_2 = -0,6972$ e os autovalores de $(A - BK_oC)$ são $p_1 = -0,9777 + j0,4273$, $p_2 = -0,9777 - j0,4273$ e $p_3 = -3,4032$. Portanto, o sistema é ERP, como indica o diagrama de Nyquist da Fig. 3.

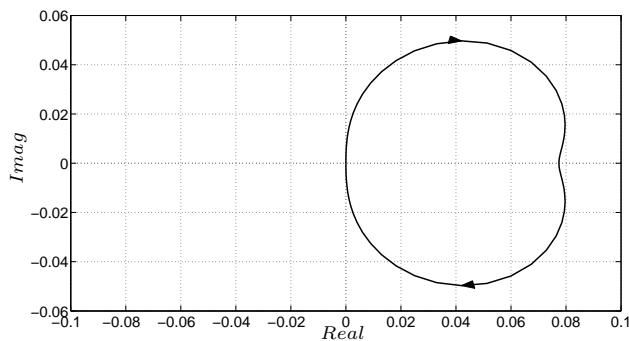


Figura 3: Diagrama de Nyquist do sistema de malha fechada.

5.2 Exemplo 2

Considere, agora, um sistema mecânico descrito em (Ogata, 2003), página 761, e dado por (1), sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36 & 36 & -0,6 & 0,6 \\ 18 & -18 & 0,3 & -0,3 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A função de transferência do sistema de malha aberta é dada em (8), sendo:

$$D(s) = [s^4 + 0,9s^3 + 54s^2],$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 + 0,3s + 18 \\ 0,3s + 18 \\ s^3 + 0,3s^2 + 18s \end{bmatrix}.$$

O objetivo deste exemplo é a determinação de matrizes K_o e F para que o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ torne-se ERP.

As raízes de $n_1(s)$ são $-0,15 \pm j4,24$, a raiz de $n_2(s)$ é -60 e as raízes de $n_3(s)$ são $-0,15 \pm j4,24$ e 0 . Portanto, como $n_1(s)$ e $n_2(s)$ não são polinômios de terceira ordem e $n_3(s)$ não é um polinômio Hurwitz, é necessário encontrar uma matriz $F = [f_1 \quad f_2 \quad f_3] = f_1 [1 \quad f_{k2} \quad f_{k3}]$, sendo $f_{k2} = f_2/f_1$ e $f_{k3} = f_3/f_1$, tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. Os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes do polinômio:

$$r(s, f_{k2}, f_{k3}) = (s^2 + 0,3s + 18) + f_{k2}(0,3s + 18) + \\ f_{k3}(s^3 + 0,3s^2 + 18s) = (f_{k3})s^3 + (1 + 0,3f_{k3})s^2 + \\ (0,3 + 0,3f_{k2} + 18f_{k3})s + (18 + 18f_{k2}).$$

A Fig. 4 mostra o lugar geométrico dos pares de valores de f_{k2} e f_{k3} tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima, de acordo com o Critério de Routh-Hurwitz, utilizando o método proposto em (Teixeira et al., 2007).

Escolhendo-se $f_{k2} = 0$, $f_{k3} = 2$ e $f_1 = 1$, tem-se $F = [1 \quad 0 \quad 2]$ e $FN(s) = 2s^3 + 1,6s^2 + 36,3s + 18$. Os zeros de transmissão do sistema são $z_1 = -0,5$ e $z_2 = z_3^* = -0,15 + j4,24$. Logo, o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima.

Com a matriz F definida acima, as matrizes P e K_o foram obtidas através do Teorema 3. A solução obtida com o *LMI-*

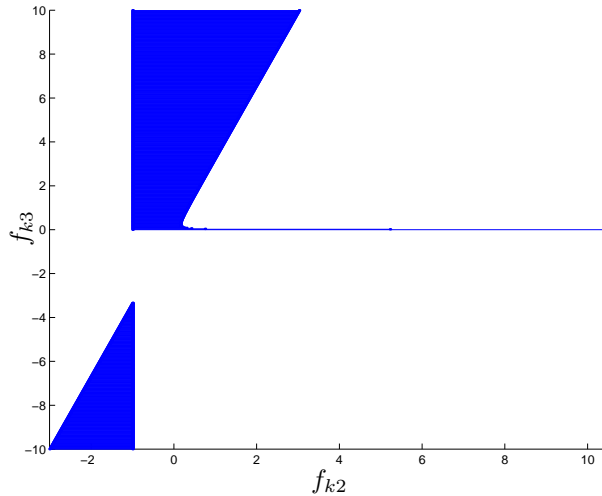


Figura 4: Valores de f_{k2} e f_{k3} que fornecem um sistema $\{A, B, FC\}$ de fase mínima.

Sol foi:

$$P = \begin{bmatrix} 23,3839 & -12,8880 & 1,0000 & 0,3569 \\ -12,8880 & 12,8320 & 0,0000 & 0,0648 \\ 1,0000 & 0,0000 & 2,0000 & 0,0000 \\ 0,3569 & 0,0648 & 0,0000 & 0,7083 \end{bmatrix},$$

$$K_o = [-25,5009 \quad 29,9621 \quad 4,3032].$$

Os autovalores de P são $\lambda_1 = 32,0592$, $\lambda_2 = 4,3310$, $\lambda_3 = 1,8480$ e $\lambda_4 = 0,6860$. Os zeros de transmissão do sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ são $z_1 = -0,5$, $z_2 = -0,15 + j4,24$ e $z_3 = -0,15 - j4,24$ e os autovalores de $(A - BK_oC)$ são $p_1 = -0,7945 + j4,4055$, $p_2 = -0,7945 - j4,4055$, $p_3 = -1,8071 + j0,8611$ e $p_4 = -1,8071 - j0,8611$. Portanto, o sistema é ERP, como indica o diagrama de Nyquist da Fig. 5.

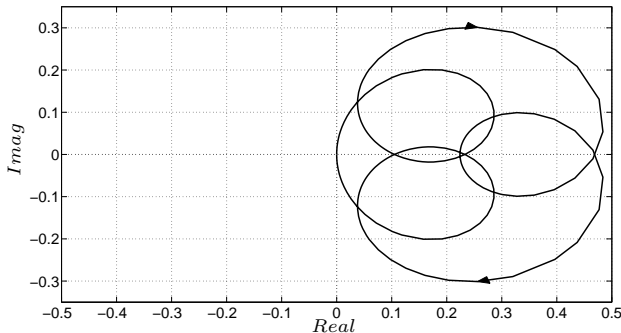


Figura 5: Diagrama de Nyquist do sistema de malha fechada.

6 CONCLUSÕES

Foi proposto um novo método baseado no Critério de Routh-Hurwitz para a obtenção (condições necessárias e suficientes) de um sistema de fase mínima a partir de uma planta com uma variável de entrada e duas de saída e de uma matriz $F \in \mathbb{R}^2$. O método foi inicialmente concebido para determinar todos os valores reais de f_k tais que todos os zeros de transmissão do sistema $FG_{ol}(s)$, sendo $G_{ol}(s)$ a matriz de transferência da planta (com uma entrada e duas saídas) e $F = f_1 [1 \quad f_k]$, possuam parte real negativa. A partir do sistema de fase mínima obtido, foi projetado um sistema ERP (foram apresentadas condições necessárias e suficientes) a partir de uma matriz de realimentação da saída K_o .

O problema foi analisado, também, para plantas com três ou mais variáveis de saída, sendo que o esforço computacional aumenta com o número de variáveis de saída. Os exemplos, para plantas com duas e três variáveis de saída, comprovam a eficiência do método.

Pelo conhecimento dos autores, a literatura especializada não apresenta condições necessárias e suficientes para este problema, baseadas somente em LMIs.

Os resultados apresentados podem ser diretamente aplicados no projeto de sistemas de controle com incertezas e/ou não-linearidades, utilizando-se controladores adaptativos e/ou com estrutura variável.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPESP e do CNPq.

REFERÊNCIAS

- Anderson, B. D. O. (1968). A simplified viewpoint of hyperstability, *IEEE Transactions on Automatic Control* **13**: 292–294.
- Bandyopadhyay, B., Ismail, O. e Gorez, R. (1994). Routh pade approximation for interval systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(12): 2454–2456.
- Bandyopadhyay, B., Upadhye, A. e Ismail, O. (1997). $\gamma - \delta$ Routh approximation for interval systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(8): 1127–1130.
- Barkana, I., Teixeira, M. C. M. e Hsu, L. (2006). Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control, *Automatica* **42**: 1611–1616.
- Barmish, B. R. (1984). Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients, *IEEE*

- Transactions on Automatic Control* **AC-29**(10): 935–936.
- Bernussou, J., Geromel, J. C. e de Oliveira, M. C. (1999). On strict positive real systems design: guaranteed cost and robustness issues, *Systems & Control Letters* **36**: 135–141.
- Białas, S. e Garloff, J. (1985). Stability of polynomials under coefficient perturbations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-30**(3): 310–312.
- Blondel, V. e Lundvall, C. (1995). A rational test for strong stabilization, *Automatica* **31**(8): 1197–1198.
- Bose, N. K. (1989). Tests for Hurwitz and Schur properties of convex combination of complex polynomials, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **36**(9): 1245–1247.
- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Covacic, M. R. (2008). Variable Structure Control of Switched Systems Based on Lyapunov-Metzler-SPR Systems, *Proceedings of the 2008 International Workshop on Variable Structure Systems*, Antalya, Turkey, pp. 18–23.
- Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Covacic, M. R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(9): 3505–3513.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd edn, Oxford University Press, Inc.
- Choi, H. H. (1997). A new method for variable structure control system design: a linear matrix inequality approach, *Automatica* **33**(11): 2089–2092.
- Choi, H. H. (1998). An explicit formula of sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties, *Automatica* **34**(8): 1015–1020.
- Choi, H. H. (1999). On the existence of linear sliding surfaces for a class uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties, *Automatica* **35**(10): 1707–1715.
- Collado, J., Lozano, R. e Johansson, R. (2007). Using an observer to transform linear systems into strictly positive real systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(6): 1082–1088.
- Covacic, M. R., Teixeira, M. C. M. e Assunção, E. (2008). Análise de estabilidade de sistemas incertos através do critério de routh, *Semina: Ciências Exatas e da Terra* **29**(2): 119–128.
- Covacic, M. R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Cardim, R. (2008). Comparative study of LMI-based output feedback SPR synthesis for plants with different number of inputs and outputs, *Proceedings of the 2008 International Workshop on Variable Structure Systems*, Antalya, Turkey, pp. 130–135.
- Cunha, J. P. V. S., Hsu, L., Costa, R. R. e Lizarralde, F. (2003). Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(12): 2245–2250.
- de Oliveira, M. C., Farias, D. P. e Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's Guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.
- DeCarlo, R. A., Žak, S. H. e Mathews, G. P. (1988). Variable structure control of multivariable systems: a tutorial, *Proceedings of IEEE* **76**(3): 212–232.
- Dorf, R. C. e Bishop, R. H. (1998). *Modern Control Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox - For Use with Matlab*, The Math Works, Inc.
- Guiver, J. P. e Bose, N. K. (1983). Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-28**(1): 106–107.
- Hsu, L., Araújo, A. e Costa, R. R. (1994). Analysis and design of I/O based variable-structure adaptive-control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(1): 4–21.
- Huang, C. H., Ioannou, P. A., Maroulas, J. e Safonov, M. G. (1999). Design of strictly positive real systems using constant output feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(3): 569–573.
- Hwang, C. e Yang, S. F. (1999). Comments on the computation of interval Routh approximants, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(9): 1782–1787.
- Kaufman, H., Barkana, I. e Sobel, K. (1994). *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*, Communications and Control Engineering Series, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Landau, I. (1979). *Adaptive Control - The Model Reference Approach*, Marcel Dekker, New York, NY, USA.

- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.
- Ogata, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno*, Pearson Prentice Hall, São Paulo, Brasil.
- Oliveira, V. A., Cossi, L. V., Teixeira, M. C. M. e Silva, A. M. F. (2009). Synthesis of PID controllers for a class of time delay systems, *Automatica* **45**(7): 1778–1782.
- Oliveira, V. A., Teixeira, M. C. M. e Cossi, L. (2003). Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem, *Linear Algebra and its Applications* **369**: 203–216.
- Owens, D. H., Prätzel-Wolters, D. e Ilchmann, A. (1987). Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization, *IMA Journal of Mathematical Control & Information* **4**(2): 167–181.
- Peña, J. M. (2004). Characterizations and stable tests for the Routh-Hurwitz conditions and for total positivity, *Linear Algebra and its Applications* **393**: 319–332.
- Shu, Z., Lam, J., Gao, H., Du, B. e Wu, L. (2008). Positive observers and dynamic Output-Feedback controllers for interval positive linear systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I* **55**(10): 3209–3222.
- Slotine, J. J. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Steinberg, A. e Corless, M. (1985). Output feedback stabilization of uncertain dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**(10): 1025–1027.
- Teixeira, M. C. M. (1989). *Sistemas reais positivos e controle adaptativo*, Tese de doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- Teixeira, M. C. M. (1990). Condições para tornar um sistema estritamente real positivo e aplicação no controle com EVMD utilizando somente as saídas da planta, 8^o Congresso Brasileiro de Automática, pp. 291–296.
- Teixeira, M. C. M. (1993). Output control with dynamical compensators and strictly positive real systems, *International Journal of Control* **57**(5): 1101–1105.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Covacic, M. R. (2007). Proportional controllers: Direct method for stability analysis and MATLAB implementation, *IEEE Transactions on Education* **50**(1): 74–78.
- Teixeira, M. C. M., Covacic, M. R. e Assunção, E. (2006). Design of SPR systems with dynamic compensators and output variable structure control, *Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems*, Alghero, Italy, pp. 328–333.
- Teixeira, M. C. M., Covacic, M. R., Assunção, E. e Lordelo, A. D. S. (2002). Design of SPR systems and output variable structure controllers based on LMI, *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications - Proceedings of the 7th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, pp. 133–144.
- Teixeira, M. C. M., Lordelo, A. D. S. e Assunção, E. (2000). On LMI based design of SPR systems and output variable structure controllers, *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications - Proceedings of the 6th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, pp. 199–208.
- Wei, K. H. e Yedavalli, R. K. (1987). Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-32**(10): 907–909.
- Xiang, J., Su, H. e Chu, J. (2005). Robust sliding mode output feedback control design using ILMI approach, *Proceedings of 2005 American Control Conference*, Portland, OR, USA, pp. 4078–4083.
- Yang, S. F. e Hwang, C. (2002). A test for robust Hurwitz stability of convex combination of complex polynomials, *Journal of the Franklin Institute* **339**: 129–144.