
MINIMIZAÇÃO DO CUSTO \mathcal{H}_∞ DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASO NOS ESTADOS

André F. Caldeira *
caldeiraaf@gmail.com

Márcio F. Miranda[†]
fantini@coltec.ufmg.br

Valter J. S. Leite^{*,†}
valter@ieee.org

Eduardo N. Gonçalves^{*,§}
eduardong@des.cefetmg.br

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – CEFET-MG / UFSJ,
Av. Amazonas, 7675, 31510-000, Belo Horizonte – MG – Brasil.

[†]*Campus* Divinópolis / CEFET-MG,

R. Álvares Azevedo 400, 35500-970, Divinópolis – MG – Brasil.

[‡]COLTEC / UFMG,

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-010, Belo Horizonte – MG – Brasil.

[§]*Campus II* / CEFET-MG,

Av. Amazonas, 7675, 30510-000, Belo Horizonte – MG – Brasil.

ABSTRACT

\mathcal{H}_∞ cost minimization of uncertain discrete time systems with delay in the state

This paper deals with uncertain discrete-time systems with time varying delay affecting the state vector. It is considered that the uncertainties are represented in a polytopic domain and they may be present in all matrices of the model of the system. Conditions expressed as Linear Matrix Inequalities (LMIs) are proposed for the \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation and for the design of robust state feedback control gains that minimize the \mathcal{H}_∞ norm from the perturbation input to the system output. These conditions are established by using parameter dependent Lyapunov-Krasovskii (L-K) functions. Slack matrix variables — via Finsler's Lemma — are employed to decouple the matrices of the system from the L-K function ones. The “Jensen's inequality” is

used to handle crossed terms in the development of the conditions, yielding a less conservative over bound w.r.t. other approaches in the literature. The provided conditions are delay-dependent. Numerical examples are presented to illustrate the efficacy of the proposed conditions and they are used to establish comparisons with other techniques available in the literature.

KEYWORDS: Time-varying delay, discrete-time systems, \mathcal{H}_∞ robust control, linear matrix inequalities, parameter dependent Lyapunov-Krasovskii function, Finsler's Lemma, Jensen's inequality.

RESUMO

Neste trabalho são investigados sistemas lineares incertos e discretos no tempo com atraso variante no tempo afetando o vetor de estados. É considerado que as incertezas são representadas em um domínio politópico e que elas podem estar presentes em todas as matrizes do modelo do sistema. Condições expressas como Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Li-*

Artigo submetido em 11/08/2010 (Id.: 01182)

Revisado em 01/10/2010, 07/12/2010

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Luis Fernando Alves Pereira

near Matrix Inequalities) são propostas para o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ e para a síntese de ganhos robustos de realimentação de estados que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada de perturbação e a saída do sistema. Essas condições são estabelecidas com a utilização de funções de Lyapunov-Krasovskii (L-K) dependentes de parâmetro. Variáveis matriciais de folga — via Lema de Finsler — são empregadas para desacoplar as matrizes do sistema das matrizes da função de L-K. A “desigualdade de Jensen” é usada para manipular os termos cruzados que aparecem no desenvolvimento das condições, fornecendo uma majoração menos conservadora que outras encontradas na literatura. As condições propostas são dependentes do atraso. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficácia da proposta e para estabelecer comparações com outras encontradas na literatura.

PALAVRAS-CHAVE: Atraso variante no tempo, Sistemas discretos no tempo, controle robusto \mathcal{H}_∞ , Desigualdades matriciais lineares, Função de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros, Lema de Finsler, Desigualdade de Jensen.

1 INTRODUÇÃO

A presença de atrasos em sistemas controlados digitalmente é inevitável. Sistemas robóticos, processos de usinagem, redes de comunicação de dados são exemplos de processos que partilham de atrasos que interferem tanto na estabilidade quanto no desempenho desses sistemas. A investigação de sistemas lineares sujeitos a atrasos nos estados tem recebido grande atenção nos últimos anos, como pode ser observado em vários livros nessa área. Veja os trabalhos de Malek-Zavarei e Jamshidi (1987), Dugard e Verriest (1997), Mahmoud (2000), Niculescu (2001), Gu et al. (2003), Niculescu e Gu (2004).

Condições para análise de estabilidade e para síntese de controladores estabilizantes para tais sistemas podem ser classificadas em dependentes ou independentes do atraso. Observa-se que a utilização de condições independentes do atraso, para análise de sistemas estáveis com atrasos limitados, pode levar a resultados muito conservadores. Por outro lado, condições dependentes do atraso levam, em geral, a resultados conservadores se aplicadas em sistemas cuja estabilidade independe do valor do atraso (Miranda e Leite, 2008), (Leite e Miranda, 2008a). As técnicas mais utilizadas para investigar sistemas com atrasos são as baseadas em funções (funcionais no caso contínuo no tempo) de Razumikhin ou de Lyapunov-Krasovskii (L-K), sendo que as funções de L-K têm sido mais utilizadas a partir da década de 90 (Niculescu, 2001). O estudo de sistema contínuos

no tempo com atrasos nos estados recebeu muito mais atenção nos últimos anos do que os sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Veja por exemplo o trabalho de Richard (2003) e referências internas. Nesse contexto, o trabalho de Li e de Souza (1997) apresenta resultados que tornaram-se um marco no contexto de sistemas com atrasos. De Oliveira e Geromel (2004) apresentam um estudo para a síntese de compensadores dinâmicos para sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados. Nessa síntese, a estrutura do sistema é reproduzida no controlador que resulta em uma função de transferência não-racional. Esse mesmo tipo de controlador é investigado por Ghiggi et al. (2008) considerando a saturação no sinal de controle. Condições baseadas no teorema do ganho pequeno são investigadas por Valmórbida et al. (2007) estendendo-se os resultados de Zhang et al. (2001). Nesse caso, o atraso é interpretado como uma perturbação limitada em norma que afeta o sistema. Leite et al. (2007) investigam uma classe mais geral de sistemas com atrasos nos estados, denominada sistemas neutrais, e fornecem condições independentes do atraso para a análise de estabilidade robusta.

Uma das razões para o maior investimento da comunidade acadêmica em sistemas contínuos no tempo com atrasos nos estados vem do fato de que a estabilidade de sistemas discretos no tempo com atrasos invariantes no tempo e precisamente conhecidos pode ser investigada utilizando-se um sistema aumentado livre de atrasos (Kapila e Haddad, 1998). Porém, essa técnica apresenta limitações importantes para o estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atrasos variantes no tempo e para síntese de controladores robustos. Além disso, a maior parte das condições encontradas na literatura é independente do atraso e baseada na estabilidade quadrática (Zhu e Yang, 2008). Nas condições baseadas em estabilidade quadrática, emprega-se uma função de L-K cujas matrizes são independentes da incerteza, o que pode levar a resultados conservadores (Leite, 2005).

Diversas abordagens podem ser encontradas na literatura para a classe dos sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Algumas delas lidam com sistemas precisamente conhecidos (Gao et al., 2004), (Zuo et al., 2004), (Song et al., 1999). Em (Fridman e Shaked, 2005b) e (Fridman e Shaked, 2005a) são propostas condições dependentes do atraso, convexas para análise de estabilidade e não convexas para síntese de controladores. Esses trabalhos utilizam a abordagem de sistemas descritores (singulares) e as incertezas são tratadas como limitadas em norma. Oliveira e Coutinho (2008) apresentam um estudo sobre sistemas discretos no tempo, incertos, representados por transformações

não lineares fracionais (NFT, do inglês *nonlinear fractional transformation*). Nesse caso, os autores consideram que o atraso nos estados é invariante no tempo. Em (Xu e Chen, 2004) é utilizada uma abordagem não convexa para a síntese de controladores robustos \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo e incertezas limitadas em norma. Em (Du et al., 2008) são tratadas condições para a estabilização robusta de sistemas chaveados com atrasos nos estados e incertezas limitadas em norma. As condições de síntese não são convexas. Condições para controle robusto \mathcal{H}_∞ são propostas para sistemas discretos no tempo precisamente conhecidos com atraso variante no tempo nos estados em (He et al., 2008) e (Palhares et al., 2005). Nesse último, são também considerados os sistemas contínuos no tempo e incerteza do tipo politópica afetando todas as matrizes do sistema. Diferente da proposta deste trabalho, as condições de síntese de He et al. (2008) não são convexas, embora tratem apenas de sistemas precisamente conhecidos. Condições convexas independentes do atraso para análise de estabilidade robusta e para a síntese robusta de sistemas discretos no tempo e incertezas politópicas foram propostas em (Leite et al., 2009) para atraso invariantes no tempo presentes nos estados e em (Leite e Miranda, 2008b) para atraso variante no tempo. A estabilização robusta \mathcal{H}_∞ aliada à estabilidade exponencial é tratada no contexto de sistemas com atrasos variantes no tempo em (Hongji et al., 2007). Porém, a condição de síntese proposta não é convexa. Em (Huijiao et al., 2007), é considerada a classe dos sistemas descritores (singulares) com atraso variante no tempo nos estados e incertezas limitadas em norma, sendo propostas condições de análise e de síntese robustas.

Neste trabalho, são propostas condições convexas baseadas no trabalho de Zhu e Yang (2008). São utilizadas funções de L-K dependente de parâmetro para a estimação do custo \mathcal{H}_∞ e para síntese de ganhos robustos, por realimentação de estados com minimização do custo \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares incertos, discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados. A utilização da desigualdade de Jensen permite uma majoração das funções empregadas de maneira menos conservadora que outras abordagens disponíveis na literatura. Além disso, o Lema de Finsler — veja (De Oliveira, 2004) e (De Oliveira e Skelton, 2001) — permitiu a obtenção de condições convexas em que as matrizes da função de L-K não estão acopladas com as matrizes do sistema. Por consequência, é possível tratar a presença de incertezas politópicas em todas as matrizes do sistema. São apresentados exemplos numéricos em que se evidencia o menor conservadorismo da técnica proposta neste trabalho comparativamente a outras condições disponíveis na literatura.

Notação: \mathbb{R} (\mathbb{R}_+) denotam, respectivamente, os conjuntos dos números reais, (reais positivos), \mathbb{N} (\mathbb{N}_*) conjunto dos números naturais (excluindo o 0) e $\mathcal{I}[a, b]$ representa o conjunto de todos inteiros n tal que $a \leq n \leq b$. $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado no tempo da amostra k . \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e nula, respectivamente, de dimensões apropriadas. $M = \text{diag}\{M_1, M_2\}$ representa a bloco-diagonal da matriz M formado por matrizes M_1 e M_2 na diagonal principal. $M > \mathbf{0}$ ($M < \mathbf{0}$) significa que M é definida positiva (negativa). M^T representa a transposição de M . O símbolo \star é usado para indicar os blocos simétricos em relação à diagonal das LMIs. \otimes denota o produto de Kronecker.

2 PRELIMINARES

Considere o sistema linear incerto discreto no tempo sujeito a atraso nos estados dado por

$$\Omega(\alpha) : \begin{cases} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} \\ &+ B(\alpha)u_k + B_w(\alpha)w_k, \\ z_k &= C(\alpha)x_k + C_d(\alpha)x_{k-d_k} \\ &+ D(\alpha)u_k + D_w(\alpha)w_k, \end{cases} \quad (1)$$

em que k é o instante de amostragem e as matrizes $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_d(\alpha)$, $D(\alpha)$ e $D_w(\alpha)$ são matrizes incertas, invariantes no tempo, adequadamente definidas em termos de $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de estados no instante k , $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^m$, que representa os m sinais de controle, $w_k = w(k) \in \mathbb{R}^v$, que contém v entradas exógenas, e $z_k = z(k) \in \mathbb{R}^p$, o vetor de p sinais de saída de ponderação. Essas matrizes podem ser descritas por um politopo \mathcal{D} com vértices conhecidos:

$$\mathcal{D} = \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+m+v} : \right. \\ \left. \Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Omega_i, \alpha \in \Upsilon \right\}, \quad (2)$$

em que

$$\Upsilon = \left\{ \alpha : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i \in \mathcal{I}[1, N] \right\} \quad (3)$$

e

$$\Omega_i = \left[\begin{array}{cc|cc} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \quad (4)$$

O atraso, denotado por d_k , é suposto variante no tempo, sendo dado por:

$$d_k \in \mathcal{I}[\underline{d}, \bar{d}], (\underline{d}, \bar{d}) \in \mathbb{N}_*^2 \quad (5)$$

com \underline{d} , \bar{d} representando os valores mínimo e máximo de d_k , respectivamente. Qualquer $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ pode ser

escrito como uma combinação convexa dos N vértices Ω_i , $i \in \mathcal{I}[1, N]$, de \mathcal{D} . A lei de controle considerada é:

$$u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k} \quad (6)$$

com $[K|K_d] \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$. Observe que a lei de controle (6) depende do conhecimento do valor de d_k a cada amostragem. O valor de d_k pode ser conhecido utilizando, por exemplo, algum tipo de registro de tempo nas medidas ou estimativas dos valores dos estados (Srinivasagupta et al., 2004). No caso de não ser possível conhecer o atraso d_k , é suficiente fazer $K_d = \mathbf{0}$ e a lei de controle recupera a forma mais comumente usada na literatura, dada por $u_k = Kx_k$. Usando (6) em (1)-(4), o sistema incerto em malha fechada resultante é dado por

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \begin{cases} x_{k+1} &= \tilde{A}(\alpha)x_k + \tilde{A}_d(\alpha)x_{k-d_k} \\ &+ B_w(\alpha)w_k, \\ z_k &= \tilde{C}(\alpha)x_k + \tilde{C}_d(\alpha)x_{k-d_k} \\ &+ D_w(\alpha)w_k, \end{cases} \quad (7)$$

com $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+v} : \right.$$

$$\left. \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{\Omega}_i, \quad \alpha \in \Upsilon \right\} \quad (8)$$

com

$$\tilde{\Omega}_i = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_i & \tilde{A}_{di} & B_{wi} \\ \hline \tilde{C}_i & \tilde{C}_{di} & D_{wi} \end{array} \right], \quad i \in \mathcal{I}[1, N], \quad (9)$$

em que as matrizes \tilde{A}_i , \tilde{A}_{di} , \tilde{C}_i e \tilde{C}_{di} são definidas como

$$\tilde{A}_i = A_i + B_i K, \quad \tilde{A}_{di} = A_{di} + B_i K_d, \quad (10)$$

$$\tilde{C}_i = C_i + D_i K, \quad \tilde{C}_{di} = C_{di} + D_i K_d \quad (11)$$

Neste trabalho, tanto o sistema (1) quanto o sistema (7) são considerados com condições iniciais nulas, isto é,

$$x_k = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{I}[-\bar{d}, 0] \quad (12)$$

O principal objetivo deste artigo é o de prover soluções convexas, dependentes do valor do atraso, para os seguintes problemas:

Problema 1 (Estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞)

Dado o sistema incerto $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$, determine, se possível, um valor estimado para $\gamma > 0$, para todo $w_k \in \ell_2$ exista um $z_k \in \ell_2$, tal que

$$\|z_k\|_2 < \gamma \|w_k\|_2 \quad (13)$$

seja verificado para todo $\alpha \in \Upsilon$. Neste caso, γ é chamado um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema (7)¹.

Problema 2 (Síntese robusta \mathcal{H}_∞) Dado o sistema incerto $\Omega(\alpha) \in \mathcal{D}$ e um escalar $\gamma > 0$ determine, se possível, ganhos robustos K e K_d , tais que o sistema incerto em malha fechada $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$, dado por (7)-(11), seja robustamente estável, para todo $w_k \in \ell_2$ e $z_k \in \ell_2$ satisfazendo (13).

Nos problemas 1 e 2 é necessário que o sistema $\tilde{\Omega}(\alpha)$ seja assintoticamente estável. Em sistemas com atrasos nos estados, as condições para verificar que um ponto de equilíbrio foi atingido, e portanto, para caracterizar a estabilidade, são mais elaboradas que no caso de sistemas sem atrasos. Por exemplo, em sistemas livres de atrasos, $x_k = \mathbf{0}$ assegura que $x_{k+1} = Ax_k = \mathbf{0}$, o que nem sempre é verdade para $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k}$. Uma caracterização da estabilidade assintótica para sistemas com atrasos é dada em, por exemplo, (Miranda e Leite, 2008).

Para a investigação desses problemas utiliza-se a seguinte candidata a função de L-K:

$$V(\alpha, k) = \sum_{v=1}^8 V_v(\alpha, k) > 0 \quad (14)$$

com

$$V_1(\alpha, k) = x_k^T P(\alpha) x_k; \quad (15)$$

$$V_2(\alpha, k) = \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T Q_1(\alpha) x_j; \quad (16)$$

$$V_3(\alpha, k) = \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} x_j^T Q_2(\alpha) x_j; \quad (17)$$

$$V_4(\alpha, k) = \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j^T Q_3(\alpha) x_j; \quad (18)$$

$$V_5(\alpha, k) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\bar{d}} \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} x_j^T Q_1(\alpha) x_j; \quad (19)$$

$$V_6(\alpha, k) = \delta \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1-\bar{d}} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m; \quad (20)$$

$$V_7(\alpha, k) = \bar{d} \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m^T Z_1(\alpha) y_m; \quad (21)$$

¹No caso do sistema possuir condições iniciais não-nulas, o custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ deve satisfazer $\|z_k\|_2 < \gamma \|w_k\|_2 + \gamma \bar{V}(\alpha, 0)$, em que $\bar{V}(\alpha, 0) = \max_{\alpha \in \Upsilon} V(\alpha, 0)$ é a função de Lyapunov-Krasovskii avaliada em $k = 0$ para uma dada condição inicial. Para a definição de $V(\alpha, k)$ veja equação (14).

$$V_8(\alpha, k) = \underline{d} \sum_{\ell=-\underline{d}}^{-1} \sum_{m=k+\ell}^{k-1} y_m^T Z_2(\alpha) y_m; \quad (22)$$

em que

$$y_j = x_{j+1} - x_j; \quad \delta = \bar{d} - \underline{d} \quad (23)$$

e as matrizes $P(\alpha)$, $Q_j(\alpha)$, $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, e $Z_\ell(\alpha)$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$, são dadas por

$$\left. \begin{aligned} P(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, & Q_j(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_{ji} \\ Z_\ell(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_{\ell i} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

com $\alpha \in \Upsilon$. Essa candidata a função de L-K é baseada em (Zhu e Yang, 2008), em que as matrizes definidas em (24) são consideradas independentes do parâmetro α . Além disso, em (Zhu e Yang, 2008) as incertezas que afetam o sistema são do tipo limitadas em norma. Na presente proposta, a dependência em α de (24) permite que a função de L-K (14)-(22) seja aplicada a sistemas com incertezas do tipo politópica. Isso resulta na obtenção de procedimentos de análise ou de síntese que podem ser menos conservadores. Para ser uma função de L-K, é necessário que (14)-(22) seja definida positiva e satisfaça

$$\Delta V(\alpha, k) = V(\alpha, k+1) - V(\alpha, k) < 0 \quad (25)$$

$\forall [x_k^T \ x_{k-d_k}^T]^T \neq \mathbf{0}$ e $\forall \alpha \in \Upsilon$. Uma condição suficiente para a positividade de (14)-(22) é obtida impondo-se $P_i > \mathbf{0}$, $Q_{ji} > \mathbf{0}$ e $Z_{\ell i} > \mathbf{0}$, para $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$ e $i \in \mathcal{I}[1, N]$.

Os seguintes lemas são utilizados para provar as condições propostas neste trabalho.

Lema 1 (Lema de Finsler) Seja $\omega \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathcal{Q}(\alpha) = \mathcal{Q}(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{s \times r}$ de tal forma que $\text{posto}(\mathcal{B}(\alpha)) < r$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\omega^T \mathcal{Q}(\alpha) \omega < \mathbf{0}$, $\forall \omega : \mathcal{B}(\alpha) \omega = \mathbf{0}$, $\omega \neq \mathbf{0}$.
- ii) $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times s} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{X}(\alpha)^T < \mathbf{0}$.

Prova: A prova segue passos semelhantes a prova presente em (De Oliveira e Skelton, 2001) substituindo matrizes precisamente conhecidas por matrizes dependentes de parâmetros. \square

Lema 2 (Desigualdade de Jensen) Para qualquer matriz constante $\mathbf{0} < M = M^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $d_1 \in \mathbb{N}$, $d_2 \in \mathbb{N}$ e uma função vetorial $f(i) : \mathcal{I}[d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é verificado

$$- (d_2 - d_1 + 1) \sum_{i=d_1}^{d_2} f(i)^T M f(i) \leq - \left(\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i) \right)^T M \left(\sum_{i=d_1}^{d_2} f(i) \right) \quad (26)$$

desde que as somas sejam bem definidas.

Prova: A prova pode ser vista em (Zhu e Yang, 2008). \square

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção são apresentados resultados para estimação do custo \mathcal{H}_∞ de (7) e para síntese de ganhos robustos \mathcal{H}_∞ tais que a lei de controle (6) aplicada em (1) resulte em um sistema robustamente estável em malha fechada.

3.1 Estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞

Teorema 1 Se existirem matrizes $\mathbf{0} < P_i = P_i^T$, $\mathbf{0} < Q_{ji} = Q_{ji}^T$, $\mathbf{0} < Z_{\ell i} = Z_{\ell i}^T$, $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$, e um escalar $\mu > 0$ tais que $\Lambda_i < \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, Λ_i definido em (27)

então, o sistema linear incerto com atraso nos estados (7)-(9) é robustamente estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ entre a entrada w_k e a saída z_k dado por $\sqrt{\mu}$. Além disso, (14)-(24) é uma função de Lyapunov-Krasovskii para esse sistema.

Prova: A positividade de (14) é claramente assegurada assumindo-se $P_i = P_i^T > \mathbf{0}$, $Q_{ji} = Q_{ji}^T > \mathbf{0}$, $Z_{\ell i} = Z_{\ell i}^T > \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$ e a estrutura apresentada em (24). Para a estabilidade, é necessário verificar (25) que é calculado conforme segue.

$$\Delta V_1(k) = x_{k+1}^T P(\alpha) x_{k+1} - x_k^T P(\alpha) x_k \quad (28)$$

$$\Delta V_2(k) \leq x_k^T Q_1(\alpha) x_k - x_{k-d_k}^T Q_1(\alpha) x_{k-d_k} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \quad (29)$$

$$\Delta V_3(k) = x_k^T Q_2(\alpha) x_k - x_{k-\bar{d}}^T Q_2(\alpha) x_{k-\bar{d}} \quad (30)$$

$$\Delta V_4(k) = x_k^T Q_3(\alpha) x_k - x_{k-\underline{d}}^T Q_3(\alpha) x_{k-\underline{d}} \quad (31)$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} P_i + \bar{d}^2 Z_{1i} & -\bar{d}^2 Z_{1i} - \delta^2 Q_{4i} - \underline{d}^2 Z_{2i} & F_1 A_{di} + G_1 C_{di} - F_3^T \\ +\delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} - F_1 - F_1^T & +F_1 A_i + G_1 C_i - F_2^T & \\ * & (\delta + 1)Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} + \bar{d}^2 Z_{1i} & F_2 A_{di} + G_2 C_{di} + A_i^T F_3^T + C_i^T G_3^T \\ * & +\delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} - P_i - Z_{1i} - Z_{2i} & -Q_{1i} - 2Q_{4i} + F_3 A_{di} \\ * & +F_2 A_i + A_i^T F_2^T + G_2 C_i + C_i^T G_2^T & +A_{di}^T F_3^T + G_3 C_{di} + C_{di}^T G_3^T \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -F_4^T & -F_5^T & -G_1 - F_6^T & F_1 B_{wi} + G_1 D_{wi} - F_7^T \\ Z_{1i} + A_i^T F_4^T + C_i^T G_4^T & Z_{2i} + A_i^T F_5^T + C_i^T G_5^T & -G_2 + A_i^T F_6^T + C_i^T G_6^T & F_2 B_{wi} + G_2 D_{wi} \\ Q_{4i} + A_{di}^T F_4^T + C_{di}^T G_4^T & Q_{4i} + A_{di}^T F_5^T + C_{di}^T G_5^T & -G_3 + A_{di}^T F_6^T + C_{di}^T G_6^T & +A_i^T F_7^T + C_i^T G_7^T \\ -Q_{2i} - Z_{1i} - Q_{4i} & 0 & -G_4 & F_3 B_{wi} + G_3 D_{wi} \\ * & -Q_{3i} - Z_{2i} - Q_{4i} & -G_5 & +A_{di}^T F_7^T + C_{di}^T G_7^T \\ * & * & \mathbf{I}_p - G_6 - G_6^T & F_4 B_{wi} + G_4 D_{wi} \\ * & * & * & F_5 B_{wi} + G_5 D_{wi} \\ * & * & * & -G_7^T + F_6 B_{wi} + G_6 D_{wi} \\ * & * & * & -\mu \mathbf{I}_v + F_7 B_{wi} + B_{wi}^T F_7^T \\ & & & +G_7 D_{wi} + D_{wi}^T G_7^T \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Delta V_5(k) = (\bar{d} - \underline{d}) x_k^T Q_1(\alpha) x_k - \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x_i^T Q_1(\alpha) x_i \quad (32)$$

$$S_2 \leq -(d_k - \underline{d}) \sum_{m=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m - (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^T Q_4(\alpha) (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})$$

resultando em

$$\Delta V_6(k) \leq \delta^2 y_k^T Q_4(\alpha) y_k - (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^T Q_4(\alpha) (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}) - (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^T Q_4(\alpha) (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k}) \quad (33)$$

Usando δ dado em (23), $\Delta V_6(k)$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta V_6(k) &= \delta^2 y_k^T Q_4(\alpha) y_k - \delta \sum_{m=k-\bar{d}}^{k-\underline{d}-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m \\ &= \delta^2 y_k^T Q_4(\alpha) y_k - \underbrace{\delta \sum_{m=k-\bar{d}}^{k-d_k-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m}_{S_1} \\ &\quad - \underbrace{\delta \sum_{m=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m}_{S_2} \end{aligned}$$

$$\Delta V_7(k) = \bar{d}^2 y_k^T Z_1(\alpha) y_k - \bar{d} \underbrace{\sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} y_j^T Z_1(\alpha) y_j}_{S_3}$$

Aplicando o Lema 2 em S_3 e considerando y_j dado em (23) tem-se

$$S_3 \leq - \left(\sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} y_j \right)^T Z_1(\alpha) \left(\sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} y_j \right) - (x_k - x_{k-\bar{d}})^T Z_1(\alpha) (x_k - x_{k-\bar{d}})$$

Aplicando o Lema 2, é possível obter

$$S_1 \leq -(\bar{d} - d_k) \sum_{m=k-\bar{d}}^{k-d_k-1} y_m^T Q_4(\alpha) y_m - (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^T Q_4(\alpha) (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})$$

o que leva a

$$\Delta V_7(k) \leq \bar{d}^2 y_k^T Z_1(\alpha) y_k - (x_k - x_{k-\bar{d}})^T Z_1(\alpha) (x_k - x_{k-\bar{d}}) \quad (34)$$

A diferença $\Delta V_8(k)$ pode ser computada pelo mesmo procedimento adotado para o cálculo de $\Delta V_7(k)$, resultando em

$$\Delta V_8(k) \leq \underline{d}^2 y_k^T Z_2(\alpha) y_k - (x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_2(\alpha) (x_k - x_{k-\underline{d}}) \quad (35)$$

Portanto, somando-se (28)-(35), obtém-se $\Delta V(\alpha, k) \leq \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\alpha) \tilde{\omega} < 0$, em que $\tilde{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{M}_i$, $\alpha \in \Upsilon$, \tilde{M}_i é dada em (36) e $\tilde{\omega} = [x_{k+1}^T \ x_k^T \ x_{k-d_k}^T \ x_{k-\bar{d}}^T \ x_{k-\underline{d}}^T]^T$.

Para o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ , considere o sistema (7) robustamente estável com condições iniciais nulas, (12), $\mu = \gamma^2$, $w_k \in \ell_2$ e o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ dado por

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k] \quad (37)$$

Neste caso, tem-se que $V(\alpha, 0) = 0$ e $V(\alpha, \infty)$ aproxima-se de zero quando w_k tender a zero, na medida em que k aumenta; ou de uma constante $\varphi < \infty$, no caso de w_k tender a $\phi < \infty$. Assim, usando (25), J definido em (37) pode ser majorado como

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \Delta V(\alpha, k)] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} [z_k^T z_k - \mu w_k^T w_k + \tilde{\omega}^T \tilde{M}(\alpha) \tilde{\omega}] \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$J \leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega^T M(\alpha) \omega \quad (38)$$

em que

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \quad (39)$$

$$M_i = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{M}_i & \mathbf{0} \\ \hline \star & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & -\mu \mathbf{I} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (40)$$

e

$$\omega = [\tilde{\omega}^T \mid z_k^T \ w_k^T]^T. \quad (41)$$

Assim, uma condição para assegurar a estabilidade robusta de (7) com custo \mathcal{H}_∞ dado por γ é

$$\omega^T M(\alpha) \omega < 0 \text{ sujeito a (7),} \quad (42)$$

com $M(\alpha)$ e ω definidos respectivamente em (39) e (41). A condição (42) é, pelo Lema 1, equivalente a

$$M(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{X}(\alpha)^T < \mathbf{0}, \quad (43)$$

com

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_n & A(\alpha) & A_d(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_w(\alpha) \\ \mathbf{0} & C(\alpha) & C_d(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_p & D_w(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Portanto, a condição de análise (27), que pode ser escrita como $M_i + \mathcal{X} \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i^T \mathcal{X}^T < \mathbf{0}$, com

$$\mathcal{X}(\alpha) = \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T & F_5^T & F_6^T & F_7^T \\ G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T & G_5^T & G_6^T & G_7^T \end{bmatrix}^T$$

e \mathcal{B}_i obtido pela troca das matrizes dependentes de α em (44) pelas respectivas i -ésimas matrizes vértices, é suficiente para recuperar (43). Para isso, basta multiplicar cada desigualdade (27) por α_i e somar em $i = 1, \dots, N$, o que resulta em (43) que por sua vez é equivalente a (42). Logo, o sistema (7) é robustamente estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. \square

Observação 1 No caso de sistemas com incertezas variantes no tempo, isto é, $\alpha = \alpha_k = \alpha(k)$, as condições aqui formuladas podem ser diretamente adaptadas considerando a abordagem da estabilidade quadrática. Nesse caso, os termos da função de Lyapunov-Krasovskii são obtidos usando $\tilde{P}_i = \tilde{P}$, $\tilde{Q}_{ji} = \tilde{Q}_j$, $\tilde{Z}_{\ell i} = \tilde{Z}_\ell$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$, o que resulta em condições similares às do Teorema 1 com essas matrizes independentes do parâmetro incerto. Essas condições, por tratarem a estabilidade quadrática com variáveis matriciais extras, são ditas *EQ-extra*.

É possível utilizar as condições estabelecidas no Teorema 1 para formular o seguinte problema convexo para a busca do menor valor de $\mu = \gamma^2$ tal que (27) seja factível:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty} : \begin{cases} \min & \mu \\ P_i > \mathbf{0}; Q_{ji} > \mathbf{0}; Z_{\ell i} > \mathbf{0}, \\ i \in \mathcal{I}[1, N], j \in \mathcal{I}[1, 4], \ell \in \mathcal{I}[1, 2] \\ F_h, G_h, h \in \mathcal{I}[1, 7] \\ \text{tal que} & \Lambda_i < \mathbf{0} \end{cases} \quad (45)$$

em que Λ_i é dado em (27).

3.2 Controle robusto \mathcal{H}_∞

Teorema 2 Se existirem matrizes $W \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $W_d \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{P}_i = \tilde{P}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{Q}_{ji} =$

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} P_i + \bar{d}^2 Z_{1i} + \delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} & -\bar{d}^2 Z_{1i} - \delta^2 Q_{4i} - \underline{d}^2 Z_{2i} & \mathbf{0} \\ \star & (\delta + 1)Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{3i} + \bar{d}^2 Z_{1i} & \mathbf{0} \\ \star & +\delta^2 Q_{4i} + \underline{d}^2 Z_{2i} - P_i - Z_{1i} - Z_{2i} & -Q_{1i} - 2Q_{4i} \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Z_{1i} & Z_{2i} \\ Q_{4i} & Q_{4i} \\ -Q_{2i} - Z_{1i} - Q_{4i} & \mathbf{0} \\ \star & -Q_{3i} - Z_{2i} - Q_{4i} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$\tilde{Q}_{ji}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, $\mathbf{0} < \tilde{Z}_{\ell i} = \tilde{Z}_{\ell i}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$, $d_k \in \mathcal{I}[\underline{d}, \bar{d}]$ com \bar{d} e \underline{d} pertencentes a \mathbb{N}_* , um escalar $0 < \theta \leq 1$ e um valor dado $\mu > 0$ tais que $\Xi_i < \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$ e Ξ_i definido em (46) ...

é verificado, então o sistema incerto (1)-(5) sujeito à lei de controle (6) com

$$K = WF^{-1} \quad \text{e} \quad K_d = W_d F^{-1} \quad (47)$$

é robustamente estável, com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$. Além disso, (14)-(24) é uma função de Lyapunov-Krasovskii que garante a estabilidade do sistema de malha fechada resultante, (7)-(11).

Prova: Para demonstrar a suficiência da condição de síntese (46) observa-se, inicialmente, que se essa é verificada, então é assegurada a regularidade de F , uma vez que, do bloco (1, 1) de (46), tem-se $F + F^T > \tilde{P}_i + \bar{d}^2 \tilde{Z}_{1i} + \delta^2 \tilde{Q}_{4i} + \underline{d}^2 \tilde{Z}_{2i} > \mathbf{0}$. Além disso, existe um escalar real $\kappa \in]0, 2[$ tal que, para $\theta \in]0, 1]$, $\kappa(\kappa - 2) = -\theta$. Assim, substituindo o bloco (6, 6) de (46) por $\kappa(\kappa - 2)\mathbf{I}_p$, as variáveis de otimização W e W_d por KF e $K_d F$, respectivamente, usando (10)-(11) e pré e pós-multiplicando a desigualdade resultante à esquerda por T e à direita por T^T , em que

$$T = \text{bloco-diag} \{ \mathbf{I}_5 \otimes F^{-T}, G, \mathbf{I}_{p+v} \} \quad (48)$$

com $G \in \mathbb{R}^{p \times p}$, obtém-se $\hat{\Xi}_i < \mathbf{0}$, com $\hat{\Xi}_i$ definido em (49), na próxima página.

Note-se que, assumindo $G = -\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p$, o bloco (6, 6) de (49) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} G(\kappa^2 - 2\kappa)G^T &= \left(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\right)(\kappa^2 - 2\kappa)\left(-\frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{\kappa}\right)\mathbf{I}_p \\ &= \mathbf{I}_p - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p - \frac{1}{\kappa}\mathbf{I}_p \\ &= \mathbf{I}_p + G + G^T \end{aligned} \quad (50)$$

o que assegura a verificação de (27), com $P_i = F^{-T}\tilde{P}_i F^{-1}$, $Q_{ji} = F^{-T}\tilde{Q}_{ji} F^{-1}$, $Z_{\ell i} = F^{-T}\tilde{Z}_{\ell i} F^{-1}$, $i \in \mathcal{I}[1, N]$, $j \in \mathcal{I}[1, 4]$, $\ell \in \mathcal{I}[1, 2]$, $F_1 = F^{-1}$, $G_6 = -G$ e matrizes $F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ e G_7 nulas. \square

As condições estabelecidas no Teorema 2 proporcionam uma solução convexa para o Problema 2. Esse tipo de solução pode ser eficientemente obtida usando-se, por exemplo, algoritmos de pontos interiores (Boyd et al., 1994). Nesta proposta, a convexidade foi obtida, dentre outras técnicas, pela supressão de parte das variáveis de folga que faziam produto com os ganhos K e K_d que devem ser determinados. Esse procedimento assegura a convexidade ao custo da introdução de algum conservadorismo. Portanto, o custo garantido \mathcal{H}_∞ obtido no projeto de K e K_d via Teorema 2 é sempre maior ou igual ao obtido pelo Teorema 1 aplicado ao sistema incerto em malha fechada resultante.

Destaca-se também que todas as matrizes do sistema podem ser possuir incertezas politópicas, diferindo esta proposta do que é frequentemente encontrado na literatura. A síntese de ganhos robustos K e K_d pode ser feita de forma a minimizar o custo garantido \mathcal{H}_∞ , $\gamma = \sqrt{\mu}$, do sistema em malha fechada. Nesse caso, pode-se resolver o seguinte problema convexo de otimização:

De forma semelhante ao que foi observado no caso da estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞ , pode-se obter formulações convexas baseadas na estabilidade quadrática, isto é, usando-se matrizes independentes de parâmetro em (14)-(24). Nesse caso, os resultados obtidos tanto na estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞ quanto na síntese de ganhos robustos que minimizam o custo garantido \mathcal{H}_∞ serão, em geral, mais conservadores. Nesse caso, as variáveis de folga podem ser úteis na síntese de ganhos descentralizados baseados na estabilidade quadrática, uma vez que não será necessário impor nenhum tipo de estrutura adicional nas matrizes da função.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nos exemplos seguintes são analisados os custos garantidos \mathcal{H}_∞ de sistemas representados por (7), incluindo diagramas de máximos valores singulares, $\bar{\sigma}$, da relação entre a entrada de perturbação, w_k , e a saída de ponderação, z_k . Neste caso, os diagramas são calculados considerando-se atrasos constantes. Assim, para cada $d \in \mathcal{I}[\underline{d}, \bar{d}]$ os valores singulares máximos são calculados como

$$\bar{\sigma}(\omega) = \max_{\substack{i \in \mathcal{I}[1, n] \\ \omega \in [0, \frac{\pi}{T_s}]}} \sqrt{\lambda_i(G(j\omega, d)G(j\omega, d)^H)},$$

em que M^H é a matriz transposta conjugada de M , $\lambda_i(M)$ denota o i -ésimo autovalor de M , ω é a frequência angular calculada no intervalo $[0, \frac{\pi}{T_s}]$, em que T_s é o período de amostragem e

$$G(j\omega, d) = (C + C_d(j\omega)^{-d})(j\omega I - A - A_d(j\omega)^{-d})^{-1}B_w + D_w \quad (52)$$

Exemplo 1 Considere o problema de estabilização robusta com minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ , γ , do sistema estudado em (He et al., 2008) e representado por (1) com:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.14 & 0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ B = B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{0.1} \end{bmatrix}, \\ C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando esse sistema são realizados dois experimentos numéricos. Primeiramente, utiliza-se o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ dado em (51), para a síntese de ganhos

robustos $[K|K_d]$ em duas situações: *i)* $d_k \in \mathcal{I}[1, 3]$ e *ii)* $d_k \in \mathcal{I}[1, 4]$. Os pares de ganhos robustos obtidos em cada caso são:

$$[K|K_d]_{i)} = \begin{bmatrix} 0.2308 & -0.3585 & | & 0.4362 & -0.0966 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$[K|K_d]_{ii)} = \begin{bmatrix} -0.0168 & -0.3120 & | & 0.3639 & -0.0954 \end{bmatrix} \quad (54)$$

que resultam, em $\gamma_{i)} = 0.376$ e $\gamma_{ii)} = 0.412$. Em (He et al., 2008), para esses mesmos intervalos de atraso, foram obtidos os valores de custo garantido \mathcal{H}_∞ iguais a 0.39 e 0.44, respectivamente. Portanto, a técnica proposta em (He et al., 2008) mostra-se mais conservadora, atingindo, neste exemplo, estimações de custo garantido \mathcal{H}_∞ que são 3.7% e 6.8%, respectivamente, mais elevados do que empregando a proposta deste trabalho. Para se ter uma ideia do ajuste dos valores estimados com o custo garantido ótimo do sistema, são apresentados na Figura 1 os diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada com cada um dos ganhos (53), na parte superior, e (54), na parte inferior, e para cada um dos valores de atraso contemplado em cada síntese, indicados em (—). Além disso, em cada diagrama é apresentada a curva de $\bar{\sigma}_{\text{máx}}(\omega)$, indicada em (—), que toma o valor máximo de $\bar{\sigma}(\omega)$ em relação aos valores dos atrasos, em cada valor de frequência. Pode-

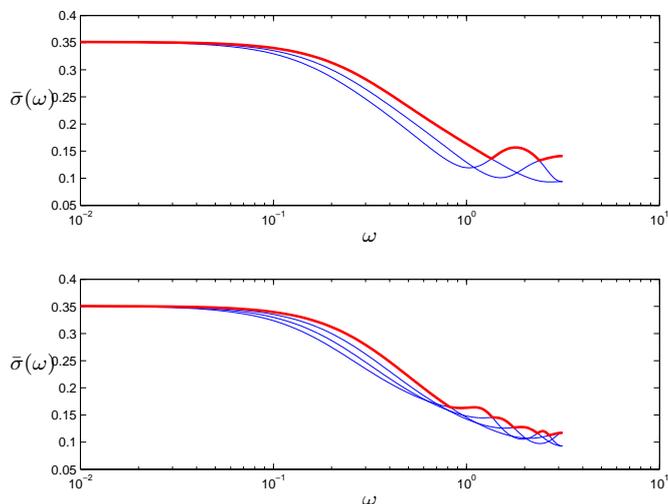


Figura 1: $\bar{\sigma}(\omega)$ para o sistema em malha fechada considerando valores de atraso em $\mathcal{I}[1, 3]$ (parte superior) e em $\mathcal{I}[1, 4]$ (parte inferior) indicados em (—) e a curva $\bar{\sigma}_{\text{máx}}(\omega)$ em (—)

se verificar que os valores obtidos para o caso de atraso variante no tempo, estimados com a técnica proposta, estão próximos do custo garantido \mathcal{H}_∞ do sistema com

atrasos constantes no tempo, em torno de 0.35. Esse valor representa um limite inferior do custo garantido \mathcal{H}_∞ se o atraso varia no tempo.

No segundo experimento buscou-se determinar o maior valor de \bar{d} tal que, se $d_k \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$ o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$, (51), é factível. Utilizando-se o par de ganhos K e K_d é possível determinar um atraso máximo $\bar{d} = 24$, com $\gamma_{\bar{d}=24} = 5.122$ para

$$K = [0.1400 \quad -0.9002] \text{ e } K_d = [0.0003 \quad -0.1000] \quad (55)$$

Utilizando-se apenas o ganho K , ou seja, fazendo $K_d = \mathbf{0}$, é possível determinar um atraso máximo $\bar{d} = 23$ com $\gamma_{\bar{d}=23} = 4.875$ para

$$K = [0.1400 \quad -0.8842] \text{ e } K_d = \mathbf{0} \quad (56)$$

Na Figura 2 são mostrados os valores de custo garantido \mathcal{H}_∞ obtidos para esse sistema por meio do problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$, (51), quando \bar{d} é aumentado a partir de 1. São mostrados dois conjuntos de pontos, um considerando a síntese do par de ganhos K e K_d , marcados com (\square) , e outro considerando a síntese de K com $K_d = \mathbf{0}$, marcados com (\times) .

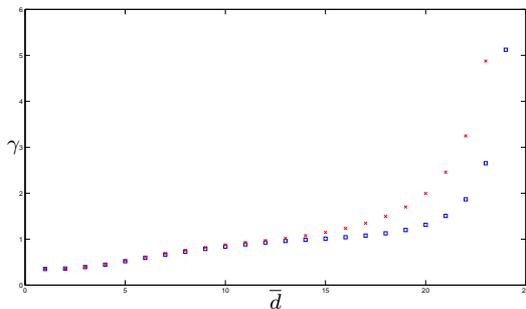


Figura 2: Relação entre o aumento do \bar{d} e o custo garantido \mathcal{H}_∞ , γ , para o sistema em malha fechada sintetizados pelo problema $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ em duas situações: com a síntese de K e K_d (\square) e com a síntese de K e usando $K_d = \mathbf{0}$ (\times)

Nota-se pela análise da Figura 2 que, neste exemplo, a realimentação do estado atrasado — que exige o conhecimento do atraso a cada amostragem — só impacta significativamente o custo garantido \mathcal{H}_∞ estimado pelo procedimento de síntese para valores de atraso \bar{d} superiores a 15.

Exemplo 2 Um modelo discreto no tempo com atraso nos estados para um forno com acionamento elétrico para tratamento térmico de metais é utilizado por Chu et al. (1993) e Chu (1995). Esse forno é dividido em cinco zonas de aquecimento, cada uma com um sensor

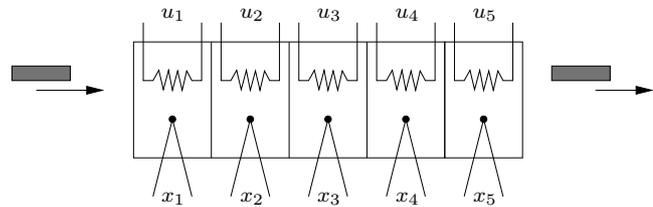


Figura 3: Diagrama esquemático do forno para tratamento de metais.

de temperatura e um atuador, como ilustrado na Figura 3. O modelo do processo é fornecido na estrutura $x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d) + Bu(k)$, com $d = 15$, e matrizes A , A_d e B dadas por (57)-(59). Note-se que a matriz A desse modelo não é Schur-estável. Em (Chu, 1995) um ganho estabilizante de dimensões 5×5 é obtido considerando-se um sistema precisamente conhecido e um atraso de tempo fixo e conhecido, $d = 15$. Em (Leite et al., 2009) são propostas condições *independentes do atraso* para a síntese de ganhos robustos com desempenho \mathcal{H}_∞ garantido e é feita uma adaptação desse modelo, considerando-se a presença de incertezas, falhas do atuador e a possibilidade de impor estrutura nos ganhos de malha fechada. Porém, o atraso é considerado invariante no tempo.

Neste exemplo, o mesmo modelo de incertezas proposto por Leite et al. (2009) é investigado considerando-se que as matrizes do sistema são incertas sendo dadas por $A(\rho) = (1 + \rho)A$, $A_d(\eta) = (1 + \eta)A_d$, $B(\sigma) = (1 + \sigma)B$, $C(\rho) = 0.03(1 + \rho)C$, $C_d(\rho) = 10C(\rho)$, $D(\sigma) = 0.01(1 + \sigma)D$, $B_w(\sigma) = (1 + \sigma)B_w$ e $D_w(\sigma) = (1 + \sigma)D_w$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_w = \text{bloco-diag}\{0.1, 0.2, -0.4\}$$

e $|\rho| \leq 0.3$, $|\eta| \leq 0.3$, $|\sigma| \leq 0.42$. Nesse caso, tem-se uma representação de incertezas na forma politópica com 8 vértices, obtidos pelas combinações dos valores extremos de ρ , η e σ . Para comparação com a solução proposta em (Leite et al., 2009), em que o modelo é considerado com atraso fixo $d = 15$, assume-se neste exemplo $d_k \in \mathcal{I}[15, 16]$. Os valores de custo garantido \mathcal{H}_∞ obtidos via a solução do problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ são $\gamma_1 = 4.2$, para K e K_d , e $\gamma_2 = 6.21$, usando-se somente K . Esses valores são maiores que os apresentados em (Leite et al., 2009), respectivamente iguais a 3.5 e 4.87. Esse aumento no valor do custo estimado é consequência

$$A = \begin{bmatrix} 0.97421 & 0.15116 & 0.19667 & -0.05870 & 0.07144 \\ -0.01455 & 0.88914 & 0.26953 & 0.11866 & -0.22047 \\ 0.06376 & 0.12056 & 1.00049 & -0.03491 & -0.02766 \\ -0.05084 & 0.09254 & 0.28774 & 0.82569 & 0.02570 \\ 0.01723 & 0.01939 & 0.29285 & 0.03544 & 0.87111 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.01000 & -0.08837 & -0.06989 & 0.18874 & 0.20505 \\ 0.02363 & 0.03384 & 0.05282 & -0.09906 & -0.00191 \\ -0.04468 & -0.00798 & 0.05618 & 0.00157 & 0.03593 \\ -0.04082 & 0.01153 & -0.07116 & 0.16472 & 0.00083 \\ -0.02537 & 0.03878 & -0.04683 & 0.05665 & -0.03130 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.53706 & -0.11185 & 0.09978 & 0.04652 & 0.25867 \\ -0.51718 & 0.73519 & 0.57518 & 0.40668 & -0.12472 \\ 0.29469 & 0.31528 & 1.16420 & -0.29922 & 0.23883 \\ -0.20191 & 0.19739 & 0.41686 & 0.66551 & 0.11366 \\ -0.11835 & 0.16287 & 0.20378 & 0.23261 & 0.36525 \end{bmatrix} \quad (59)$$

direta do atraso ser variante no tempo. Utilizando-se os ganhos obtidos no problema $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ e fechando-se a malha, o custo garantido \mathcal{H}_∞ pode ser avaliado utilizando-se o problema de otimização $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\infty}$, sendo encontrado $\gamma_3 = 3.27$, para K e K_d , e $\gamma_4 = 4.22$ usando-se somente K . As curvas indicadas por (—) na Figura 4

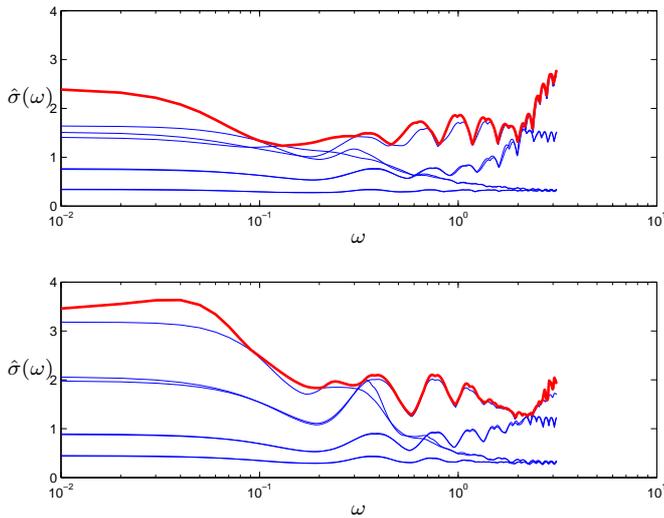


Figura 4: Diagrama de $\hat{\sigma}(\omega)$ para o sistema em malha fechada usando K e K_d , parte superior, e apenas K , parte inferior, para $d_k \in \mathcal{I}[15, 16]$

correspondem aos valores de

$$\hat{\sigma}(\omega) = \max_{d_k \in \mathcal{I}[\underline{d}, \bar{d}]} \bar{\sigma}(\omega) \quad (60)$$

com $\underline{d} = 15$ e $\bar{d} = 16$, para cada um dos 8 vértices do sistema em malha fechada. A envoltória dessas curvas,

indicada por (—), mostra o máximo de $\hat{\sigma}(\omega)$, cujos máximos são 2.78, para K e K_d , e 3.63, usando-se somente K , representando limites inferiores para os custos garantidos \mathcal{H}_∞ para o sistema com atraso variante no tempo, em cada caso.

Utilizando os ganhos K e K_d determinados pela solução de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ com $d_k \in \mathcal{I}[15, 16]$, foram feitas simulações para cada um dos vértices que determinam o polítopo associado ao sistema investigado neste exemplo. Em todos os casos, foram aplicados os sinais w_k mostrados na Figura 5, supondo condições iniciais nulas. Na Figura 6 são

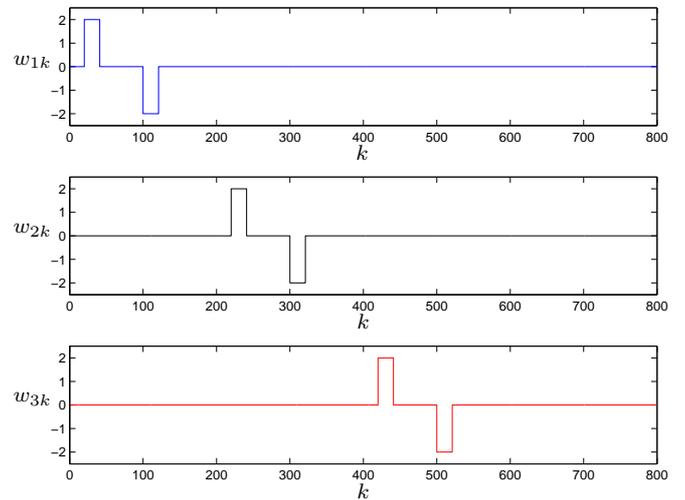


Figura 5: Sinal $w_k = [w_{1k} \ w_{2k} \ w_{3k}]$ aplicado no modelo do forno, em malha fechada

apresentadas as três saídas do sistema, calculadas para cada um dos 8 vértices do sistema em malha fechada e utilizando uma mesma sequência (aleatória) de valores

de atraso. Pode ser observado que a relação dos sinais de

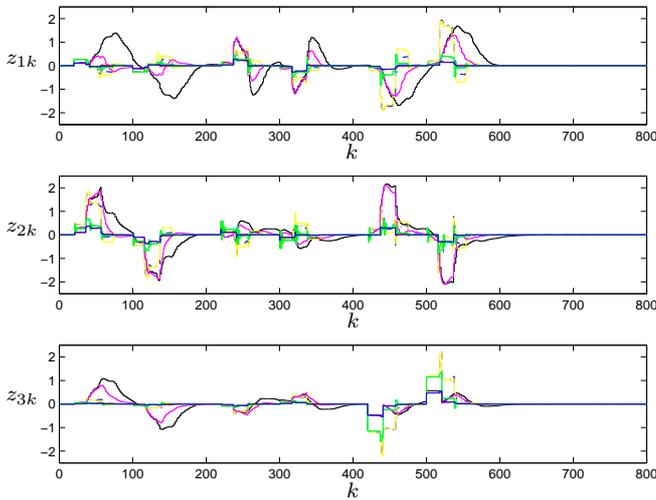


Figura 6: Conjunto das saídas $z_k = [z_{1k}^T \ z_{2k}^T \ z_{3k}^T]^T$ obtidas para cada um dos vértices do politopo de malha fechada do modelo do forno à aplicação do sinal w_k mostrado na Figura 5.

saída pelos sinais de entrada é inferior ao valor estimado ($\gamma_3 = 3.27$). Note que a escolha do sinal de entrada w_k , composta por um conjunto de 3 pulsos conforme Figura 5, foi feita de forma a se perceber nos sinais de saída o efeito de cada uma de suas componentes. Percebe-se que, para o pulso utilizado, a componente de entrada w_{2k} é a que provoca menores efeitos nas variáveis de saída. O maior efeito dessa entrada é verificado na componente da saída z_{1k} , que é uma combinação linear dos estados x_{1k} e x_{2k} . Por outro lado, os efeitos das entradas w_{1k} e w_{2k} mostram-se com valores de pior caso bastante próximos entre si. Os sinais de controle gerados durante as simulações são mostrados na Figura 7. Observa-se que as maiores amplitudes dos sinais de controle ocorrem sempre na primeira zona de aquecimento. Em todos os casos, os sinais de controle são limitados em ± 10 .

Exemplo 3 Em Palhares et al. (2005) é investigada a síntese de ganhos de realimentação de estados para o sistema (1) em que

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.1 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 3], C_d = [0 \ 0], D = 1, D_w = 0$$

Em (Palhares et al., 2005), usando um algoritmo iterativo que visa a minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ e

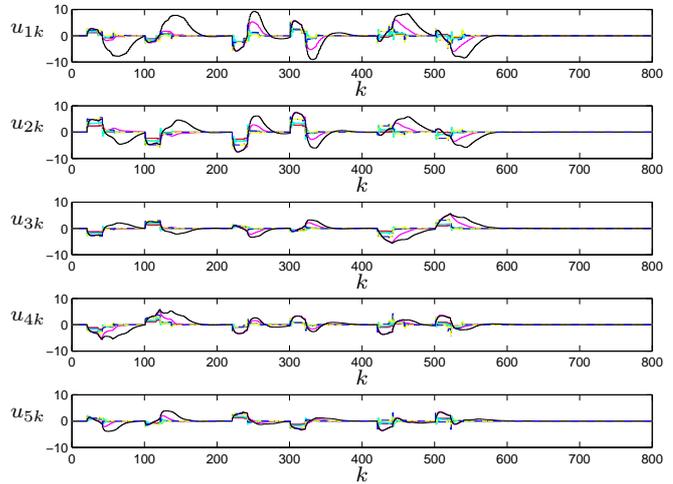


Figura 7: Conjunto dos sinais de controle $u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k}$ utilizados no controle em malha fechada.

considerando $d_k \in \mathcal{I}[0, 5]$ foi determinado

$$K = [0.3793 \quad -1.1163] \quad (61)$$

como solução do problema de otimização não linear proposto. Como discutido em (Palhares et al., 2005), esse ganho melhora os resultados obtidos com as técnicas propostas em (Song et al., 1999) e (Kim et al., 2001).

Neste exemplo, é considerado $d_k \in \mathcal{I}[1, 5]$ e resolvido o problema de otimização $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\infty}$ que resulta em

$$K = [-0.8986 \quad 1.3258], K_d = \mathbf{0} \quad (62)$$

com $\gamma = 2.12$. Na Figura 8 são apresentados os diagramas de valores singulares máximos, $\bar{\sigma}(\omega)$, obtidos para o sistema em malha fechada utilizando-se o ganho fornecido por Palhares et al. (2005) (—) e o apresentado em (62) (- - -), para atrasos $d \in \mathcal{I}[1, 5]$.

Pode-se perceber que o ganho obtido pela solução do problema (51) resulta em um diagrama de valores singulares máximos com pico 67% menor — portanto, menos conservador — que o verificado com o ganho proposto por Palhares et al. (2005).

Como no exemplo 1, são apresentados na Figura 9 os valores de custo garantido \mathcal{H}_∞ obtidos em função do atraso máximo. São mostrados dois conjuntos de pontos, um considerando a síntese do par de ganhos K e K_d , marcados com \square , e outro considerando a síntese de K com $K_d = \mathbf{0}$, marcados com \times . Nessa figura fica evidente a vantagem da realimentação dos estados atrasados: usando apenas K e fazendo $K_d = \mathbf{0}$, o problema (51) é factível até $\bar{d} = 286$, atingindo nesse caso, um custo garantido \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 9.94$ com

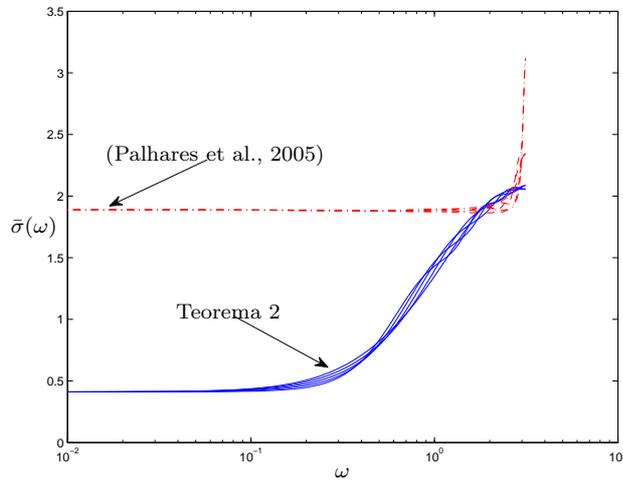


Figura 8: Diagramas de valores singulares máximos para o sistema em malha fechada utilizando o ganho (61) (---) e o ganho (62) (—).

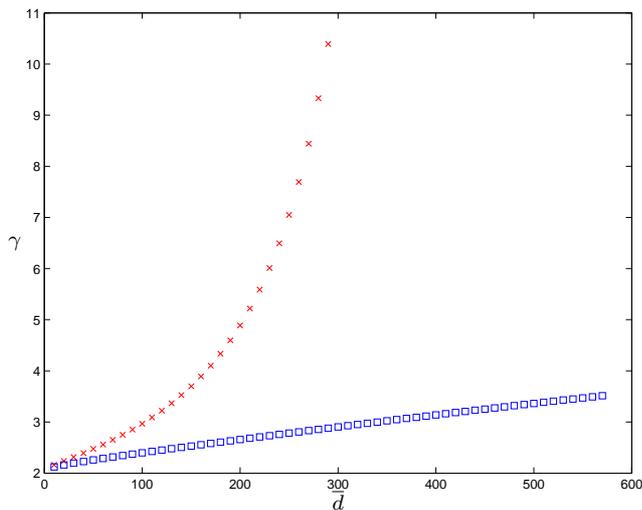


Figura 9: Relação entre o aumento do \bar{d} e o custo garantido \mathcal{H}_∞ , γ , para o sistema em malha fechada em duas situações: com a síntese de K e K_d (\square) e com a síntese de K e usando $K_d = \mathbf{0}$ (\times)

$K = [-0.7438 \quad 1.0281]$. Por outro lado, se são projetados K e K_d , a realimentação do estado atrasado propicia a factibilidade do problema convexo (51) até $\bar{d} = 556$, situação em que o custo garantido \mathcal{H}_∞ é de $\gamma = 3.48$, para $K = [-0.5563 \quad 0.6715]$ e $K_d = [-0.0552 \quad 0.0661]$. Nota-se, portanto, que neste exemplo, a realimentação do estado atrasado — que exige, portanto, o conhecimento do atraso a cada amostragem — impacta significativamente o custo garantido \mathcal{H}_∞ estimado no pro-

cedimento de síntese de ganhos robustos, especialmente para atrasos mais elevados.

Na Figura 10 é mostrada uma simulação temporal em que são apresentadas a perturbação w_k (—) e as respostas temporais do sistema quando é utilizado o ganho proposto em (Palhares et al., 2005) (—) e com o ganho dado em (62) (---). O atraso utilizado é o mesmo apre-

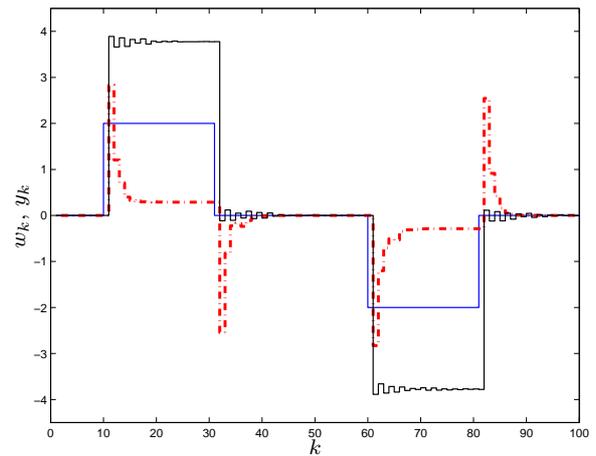


Figura 10: Simulações temporais: perturbação w_k , (—), e saída do sistema usando (61), (—), e (62), (---).

sentado por Palhares et al. (2005) e é exibido na parte superior da Figura 11. Os respectivos sinais de controle podem ser comparados na parte inferior da Figura 11. Embora a condição proposta neste trabalho seja sufici-

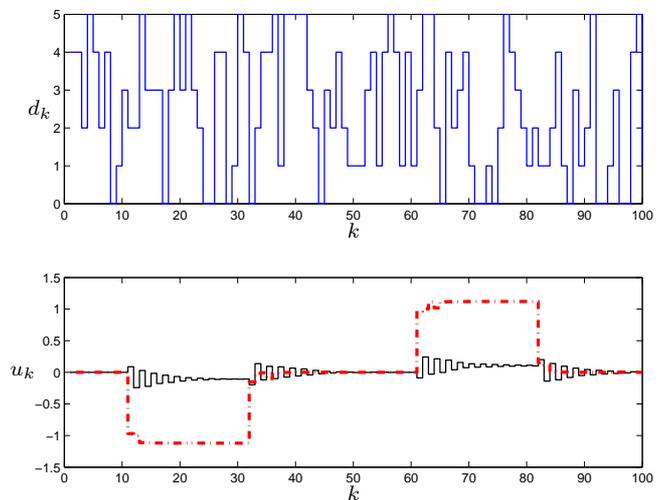


Figura 11: Parte superior: atraso d_k usado na simulação. Parte inferior: sinais de controle obtidos com (61), (—), e (62), (---).

ente para assegurar a estabilidade em casos de atrasos positivos, o uso do atraso nulo mostrou-se estável na si-

mulação. Essa escolha foi feita para que fosse utilizado os mesmos atrasos propostos por Palhares et al. (2005). Salienta-se que fazendo-se o projeto para $d_k \in \mathcal{I}[1, 6]$ os resultados obtidos são praticamente iguais aos apresentados para $d_k \in \mathcal{I}[1, 5]$. Neste exemplo, observa-se que os sinais de controle apresentados na Figura 11 possuem comportamento bastante distintos. No caso do projeto feito por Palhares et al. (2005) o sinal de controle mostra-se oscilatório em torno do zero. Por outro lado, usando (62) o sinal de controle não apresenta comportamento oscilatório, atingindo valores que tendem a rejeitar a perturbação. Daí o comportamento mais favorável da saída em linha cheia na Figura 10 em relação à saída em linha traço-ponto.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram propostas condições convexas para a estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞ e para a síntese de ganhos de realimentação de estados robustos com minimização do custo \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares incertos, discretos no tempo com atraso variante no tempo nos estados. As condições propostas são do tipo dependente do atraso. A abordagem empregada utiliza funções de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, o que permite reduzir o conservadorismo dos procedimentos de análise e de síntese em relação à utilização de funções com matrizes independentes do parâmetro incerto. Foi utilizada a desigualdade de Jensen que permitiu uma majoração das funções empregadas resultando em condições menos conservadoras. Além disso, o uso do Lema de Finsler resulta em condições convexas, em um espaço de busca aumentado, nas quais as matrizes da função de Lyapunov-Krasovskii não estão acopladas com as matrizes do sistema. Isso permite tratar a presença de incertezas politópicas em todas as matrizes do sistema. As condições aqui propostas foram aplicadas em exemplos numéricos tomados da literatura e os resultados alcançados comparados com os obtidos por outros trabalhos da área. Nesses exemplos é evidenciado o menor conservadorismo desta proposta.

No prosseguimento deste trabalho, espera-se investigar condições para a síntese de controladores no contexto de seguimento de modelos. Nesse caso, modelos livres de atraso poderiam ser especificados como forma de caracterizar a resposta temporal de sistemas com atrasos nos estados e a aproximação do comportamento do sistema em malha fechada com o modelo poderia ser medida por um índice do tipo \mathcal{H}_∞ . Outras investigações de interesse tratam dos casos em que *i*) a taxa de variação do atraso é limitada; *ii*) os sistemas são variantes no tempo; e *iii*)

as condições aqui propostas são aliadas a condições que tratem de saturação dos sinais de entrada e/ou de saída.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio do CEFET-MG (bolsa de mestrado), da FAPEMIG (Projeto Universal e Programa Pesquisador Mineiro) e do CNPq (processos PQ 308620/2009–7 e 313247/2009–9). Os autores agradecem os revisores anônimos pelas observações e sugestões que ajudaram a melhorar a apresentação deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Chu, J. (1995). Application of a discrete optimal tracking controller to an industrial electric heater with pure delays, *Journal of Process Control* **5**(1): 3–8.
- Chu, J., Su, H. e Hu, X. (1993). A time-delay control algorithm for an industrial electric heater, *Journal of Process Control* **3**(4): 219–224.
- De Oliveira, M. C. (2004). Novos testes de estabilidade para sistemas lineares, *SBA Controle & Automação* **15**(1): 17–23.
- De Oliveira, M. C. e Geromel, J. C. (2004). Synthesis of non-rational controllers for linear delay systems, *Automatica* **40**(2): 171–188.
- De Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag, New York, pp. 241–257.
- Du, D., Jiang, B. e Zhou, S. (2008). Delay-dependent robust stabilisation of uncertain discrete-time switched systems with time-varying state delay, *International Journal of Systems Science* **39**(3): 305–313.
- Dugard, L. e Verriest, E. I. (1997). *Stability and Control of Time-delay Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Fridman, E. e Shaked, U. (2005a). Delay dependent \mathcal{H}_∞ control of uncertain discrete delay system, *European Journal of Control* **11**(1): 29–37.

- Fridman, E. e Shaked, U. (2005b). Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay system, *International Journal of Control* **78**(4): 235–246.
- Gao, H., Lam, J., Wang, C. e Wang, Y. (2004). Delay-dependent robust output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay, *IEE Proceedings — Control Theory and Applications* **151**(6): 691–698.
- Ghiggi, I., Bender, A. e Gomes da Silva Jr., J. M. (2008). Dynamic non-rational anti-windup for time-delay systems with saturating inputs, *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, pp. 277–282.
- Gu, K., Kharitonov, V. L. e Chen, J. (2003). *Stability of Time-delay Systems*, Control Engineering, Birkhäuser, Boston.
- He, Y., Wu, M., Han, Q.-L. e She, J.-H. (2008). Delay-dependent h_∞ control of linear discrete-time systems with an interval-like time-varying delay, *International Journal of Systems Science* **39**(4): 427–436.
- Hongji, T., Yanwu, H. e Xiaomei, Z. (2007). Robust stabilization and \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays, *Chinese Control Conference*.
- Huijiao, W., Anke, X., Renquan, L. e Yun, C. (2007). Delay-dependent robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete singular time-varying delay systems based on a finite sum inequality, *Chinese Control Conference*.
- Kapila, V. e Haddad, W. M. (1998). Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay, *Automatica* **34**(9): 1141–1144.
- Kim, K. T., Cho, S. H., Bang, K. H. e Park, H. B. (2001). \mathcal{H}_∞ control for discrete-time linear systems with time-varying delays in state, *Proceedings of the 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Vol. 1, pp. 707–711.
- Leite, V. J. S. (2005). *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*, Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas (SP), Brasil.
- Leite, V. J. S. e Miranda, M. F. (2008a). Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach, *Mathematical Problems in Engineering* pp. 1–15.
- Leite, V. J. S. e Miranda, M. F. (2008b). Stabilization of discrete time-varying delay systems: a convex parameter dependent approach, *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, Seattle.
- Leite, V. J. S., Peres, P. L. D., Castelan, E. B. e Tarbouriech, S. (2007). Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo, *SBA Controle & Automação* **18**(4): 434–446.
- Leite, V. S. J., Tarbouriech, S. e Peres, P. L. D. (2009). Robust \mathcal{H}_∞ state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **26**: 357–373.
- Li, X. e de Souza, C. E. (1997). Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(8): 1144–1148.
- Mahmoud, M. S. (2000). *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Malek-Zavarei, M. e Jamshidi, M. (1987). *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- Miranda, M. F. e Leite, V. J. S. (2008). Síntese convexa para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes, *SBA Controle & Automação* **19**(3): 242–255.
- Niculescu, S.-I. (2001). *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Vol. 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, London.
- Niculescu, S.-I. e Gu, K. (eds) (2004). *Advances in Time-Delay Systems*, Vol. 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer, London.
- Oliveira, M. Z. e Coutinho, D. F. (2008). Estabilidade robusta de sistemas lineares em tempo discreto sujeitos a atraso no estado, *SBA Controle & Automação* **19**: 270–280.
- Palhares, R. M., Campos, C. D., Ekel, P. Y., Leles, M. C. R. e D’Angelo, M. F. S. V. (2005). Delay-dependent robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain linear systems with time-varying delays, *Computers & Mathematics with Applications* **50**(1-2): 13–32.

- Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica* **39**(10): 1667–1694.
- Song, S.-H., Kim, J.-K., Yim, C.-H. e Kim, H.-C. (1999). \mathcal{H}_∞ control of discrete-time linear systems with time-varying delays in state, *Automatica* **35**(9): 1587–1591.
- Srinivasagupta, D., Schättler, H. e Joseph, B. (2004). Time-stamped model predictive previous control: an algorithm for previous control of processes with random delays, *Computers & Chemical Engineering* **28**(8): 1337–1346.
- Valmórbida, G., Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. (2007). Condições LMI do teorema do ganho pequeno escalonado para análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso, *SBA Controle & Automação* **18**(4): 447–458.
- Xu, S. e Chen, T. (2004). Robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers, *Systems & Control Letters* **51**(3-4): 171–183.
- Zhang, J., Knopse, K. R. e Tsiotras, P. (2001). Stability of time-delay systems: equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(3): 482–486.
- Zhu, X.-L. e Yang, G.-H. (2008). Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay, *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, Seattle, WA, USA, pp. 1644–1649.
- Zuo, Z., Wang, J. e Huang, L. (2004). Robust stabilization for non-linear discrete-time systems, *International Journal of Control* **77**(4): 384–388.