
APLICAÇÃO DO MÉTODO GMRES EM ESTUDOS DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

José E. O. Pessanha*
pessanha@dee.ufma.br

Alex A. Paz†
alarpazp@gmail.com

Ricardo Prada†
prada@ele.puc-rio.br

*IEE-DEE-UFMA, Avenida dos Portugueses s/n, Campus do Bacanga, São Luís, Ma, - Brasil - 65080-040

†PUC/RJ-DEE, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ - Brasil - 22453-900

ABSTRACT

This paper investigates the GMRES iterative method performance for solving the sublinear problem associated to the DAEs solution present in power system stability analysis in time domain. It is shown that the unpreconditioned GMRES fails due to a phenomenon known as “stagnation”. It was used an incomplete factors preconditioner with threshold - ILUT, unsuccessfully. Through the preconditioner image matrix (original power system Jacobian matrix) condition number, it was checked its bad condition, resulting, therefore, in a low quality preconditioner, justifying the GMRES failure. The image matrix was then preprocessed (scaling, normalizing and reordering) improving its characteristics acting positively over the preconditioner quality. After these actions, the GMRES solved efficiently the linear systems associated to each numerical experiment, all presenting bad conditioned original Jacobian matrices.

KEYWORDS: BDF, GMRES, Preconditioner, Jacobian Matrix, Power Systems Stability.

RESUMO

Este artigo investiga o desempenho do método iterativo GMRES no subproblema linear de uma das etapas de solução

das EDAs presentes em análises no domínio do tempo de estabilidade de sistemas elétricos. Mostra-se que o GMRES sem pré-condicionamento falha devido ao fenômeno da “estagnação”. Foi testado um pré-condicionador de fatores incompletos tipo ILUT, sem êxito. Através do número de condicionamento da matriz imagem do pré-condicionador (matriz Jacobiana do sistema elétrico), comprovou-se o seu mau condicionamento, resultando, portanto, num pré-condicionador de baixa qualidade, justificando a falha do GMRES. Optou-se por pré-processar (escalonamento, normalização e reordenamento) a matriz imagem o que, de fato, melhorou as suas características refletindo positivamente na qualidade do pré-condicionador. Após essas ações, o GMRES solucionou eficientemente os sistemas lineares associados a cada experimento numérico, todos apresentando inicialmente matrizes Jacobianas muito mal-condicionadas.

PALAVRAS-CHAVE: BDF, GMRES, Pré-Condicionador, Matriz Jacobiana, Estabilidade de Sistemas de Energia Elétrica.

LISTA DE SÍMBOLOS

DAEs - Differential Algebraic Equations

BDF - Método Regressivo de Diferenciação

EDAs - Equações Diferenciais e Algébricas

GMRES - Método Iterativo Resíduo Mínimo Generalizado

Artigo submetido em 14/07/2010 (Id.: 1171)

Revisado em 01/09/2010, 20/12/2010, 08/07/2011

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Antonio Carlos Zambroni de Souza

ILU - Pré-condicionador de Fatores Triangulares Incompletos

ILUT - Pré-condicionador de Fatores Triangulares Incompletos com regra de eliminação de elementos não-nulos

RCM - Reordenamento Reverse Cuthill-McKee

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento e/ou a adaptação de métodos numéricos para aplicação em análises computacionais de estabilidade de sistemas elétricos no domínio do tempo costumam despertar interesse em função das dificuldades de solução das EDAs que representam a rede e seus componentes. Dependendo da limitação do método numérico usado e das condições de operação, a solução dessas equações pode exigir grande esforço computacional e até mesmo não ser obtida. O presente trabalho procurou integrar e aproveitar adequadamente os avanços na solução das EDAs e investiga o uso do método iterativo GMRES (Saad and Schultz, 1986) para o subproblema linear do tipo $A.x = b$. A opção pelo GMRES está baseada nas suas características adequadas para solucionar o subproblema linear, já que a matriz de coeficientes A , que neste caso é a matriz Jacobiana do sistema elétrico incluindo dispositivos dinâmicos é bloco-diagonal dominante, altamente esparsa e não-simétrica (Pai et al., 1995). Portanto, ao invés de se usar um método direto tradicional, cuja característica é fornecer uma solução para o sistema linear em um número fixo de passos sujeitos apenas a erros de arredondamento, opta-se pelo método iterativo GMRES que gera uma seqüência de vetores solução após se estabelecer o vetor inicial $x(0)$ (Chen, 2005).

Durante o desenvolvimento deste trabalho, notou-se que a maior parte das referências consultadas estava associada à aplicação de métodos iterativos baseados no subespaço Krylov em estudos envolvendo sistemas de energia elétrica para a solução do subproblema linear do fluxo de carga (Galiana et al., 1993; Flueck and Chiang, 1998; Semlyen, 1996; Borges et al., 1996; Borges et al., 1997; Pai and Dag, 1997; Dag and Semlyen, 2003; Chen and Shen, 2006; Pessanha et al., 2009). Pouco se encontrou com relação às análises no domínio do tempo (Decker et al., 1996; Pai et al., 1995; Chaniotis and Pai, 2000; Kulkarni et al., 2001). Uma justificativa para isso pode estar associada aos problemas de lentidão ou de não-convergência apresentados inicialmente pelos métodos iterativos, principalmente os não pré-condicionados. Por outro lado, podem apresentar bom desempenho em ambiente computacional paralelo e distribuído (Chen et al., 2009). Esta classe de métodos voltou a despertar interesse com o avanço nas técnicas de pré-condicionamento, pois a convergência passou a ser atingida em poucas iterações, mesmo em ambiente computacional serial. Este é, portanto, o enfoque principal do presente artigo.

Foram investigadas formas para melhorar o desempenho do GMRES e entre as encontradas optou-se por trabalhar na qualidade do pré-condicionador ILUT (Saad, 2003) construído com base na matriz Jacobiana calculada no início do processo de solução. Verificou-se que, se esta matriz estiver bem condicionada, a qualidade do pré-condicionador resultante dela é boa para o GMRES atingir a convergência em poucas iterações. O condicionamento da matriz Jacobiana é melhorado se escalonada, normalizada e reordenada antes da construção do pré-condicionador. Estes procedimentos resultam, de fato, num pré-condicionador ILUT de boa qualidade, agindo positivamente no desempenho do GMRES, como comprovado na seção de experimentos numéricos. Nestes experimentos foram considerados diferentes sistemas elétricos, sendo um deles real, operando sob diferentes condições de operação, onde a cada experimento procurou-se dificultar a solução do sistema linear.

2 SOLUÇÃO DAS EDAS: BREVE HISTÓRICO

Diferentes algoritmos numéricos de integração têm feito parte de programas computacionais para análises de estabilidade de sistemas elétricos no domínio do tempo. O método trapezoidal implícito tem encontrado bastante espaço nesses algoritmos, principalmente por ser o único método multipasso A-estável, mas pode não fornecer aproximações precisas para grandes passos de integração (Miller and Michel, 1982; Press et al., 1998; Burden and Faires, 1989). Apesar desta restrição, existem algoritmos que fazem uso do trapezoidal implícito com controle do passo de integração para este tipo de análise (EPRI, 1987) Uma vantagem deste método é a sua menor sensibilidade em relação à transição entre regiões de estabilidade e instabilidade para reduções drásticas do passo de integração, comportamento característico de operações de chaveamento de linhas e/ou simulação de faltas.

O problema da limitação do passo foi bastante atenuado com o método BDF de ordem e passo variável apresentado em (Gear, 1971). Em (Stubbe et al., 1989) este método foi usado para reproduzir fenômenos de curta e de longa duração numa mesma simulação. Na seqüência, (Astic et al., 1994) apresentou uma versão mais aprimorada combinando o método BDF com o de Adams limitando a ordem máxima do método em 2 e o passo de integração no intervalo [0,0001s - 40s], mostrando-se muito eficiente para a solução de EDAs rígidas, encontradas com freqüência no problema de interesse. Outro programa computacional (Jardim et al., 2006) usa um algoritmo de integração de passo e de ordem variável solucionando simultaneamente as equações algébricas e diferenciais, através dos métodos multipassos Adams-Bashforth-Moulton e BDF. Grande parte desses algoritmos faz uso de

métodos diretos com algum tipo de técnica de esparsidade para a solução dos sistemas lineares.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

As referências consultadas na Seção 1 enfocam a tradicional estabilidade transitória angular e o método trapezoidal implícito com solução simultânea (ou alternada). Uma proposta aqui é estender a faixa de fenômenos e incluir os de longa duração, como os de estabilidade de tensão, e para tal, é desejável um método de integração estável em termos de variação do comprimento do passo. Como mencionado na Seção 2, em simulações envolvendo fenômenos de longa duração, é desejável que o método de integração varie o comprimento do passo sempre que possível, visando desta forma melhorar a eficiência computacional do processo de solução. Optou-se, portanto, pelo método BDF com mecanismo de passo variável (Brenan et al., 1996) por apresentar tais características e também pela experiência de parte dos autores com o método (Paz, 2004; Pessanha et al., 2005). O presente trabalho surge então com uma nova proposta para o problema: o BDF-GMRES.

O Método BDF

Os modelos de equipamentos e dispositivos dinâmicos de controle são representados por um sistema de equações diferenciais e algébricas, cuja formulação geral é descrita por:

$$F(t, y, y') = 0 \quad y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (1)$$

F , y e y' são vetores n -dimensionais, com y representando as variáveis de estado associadas às máquinas síncronas, controles e outros dispositivos dinâmicos da rede; variáveis algébricas do estator da máquina e da rede. Já o vetor y' representa as derivadas dessas variáveis, sendo t (tempo) a variável independente. O processo de solução aproxima a derivada de (1) a cada iteração k por diferenças e o sistema resultante (2) é solucionado por um método de Newton a cada intervalo de tempo de acordo com (3) (Brown et al., 1994).

$$F\left(t_n, y_n, \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) = 0; \quad h_n = t_n - t_{n-1} \quad (2)$$

$$y_n^{k+1} = y_n^k - \left(\frac{1}{h_n} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} F\left(t_n, y_n^k, \frac{y_n^k - y_{n-1}}{h_n}\right) \quad (3)$$

O processo de aproximação de (1) é feito através do método BDF com um mecanismo de variação e seleção do passo de

integração e da ordem (1 a 5) do método, através de uma estratégia conhecida como coeficiente-fixo direcionado. Esta seleção se baseia no cálculo dos erros de truncamento e interpolação polinomial, são fixados o passo e a ordem dos últimos intervalos, até satisfazer a condição de convergência para iniciar outro processo de seleção (Brenan et al., 1996).

Se a simulação envolver um sistema de energia elétrica de com centenas de máquinas e dispositivos de controle, os custos para computar e fatorar a matriz A de (3) dominam o custo da integração. No presente trabalho este subproblema linear, representado por (4), é solucionado a cada iteração Newton através do método iterativo GMRES, onde A é a matriz Jacobiana do sistema de ordem $n \times n$; x e b são vetores n -dimensionais. O parâmetro α está associado ao passo ou a ordem do método e β é um vetor que depende da solução de intervalos anteriores.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &= y^{k+1} - y^k \\ b &= -F(t, y^k, \alpha y^k + \beta) \end{aligned} \quad (4)$$

O Método GMRES

Este método soluciona (4) assumindo x_0 como uma estimativa inicial da solução e fazendo $x = x_0 + z$ obtém-se o sistema equivalente (5), com r_0 correspondendo ao resíduo inicial. É escolhido $z = z_L$ no subespaço Krylov $K_L = \{r_0, Ar_0, \dots, A^{L-1}r_0\}$ e $x_L = x_0 + z_L$ é especificado unicamente pela condição (6), onde $\|\cdot\|_2$ corresponde a norma Euclidiana. Aqui, a matriz A corresponde a matriz de iteração de (3).

$$\begin{aligned} Az &= r_0 \\ r_0 &= b - Ax_0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\|b - Ax_L\|_2 = \min_{z \in K_L} \|r_0 - Az\|_2 \quad (6)$$

A base ortonormal do subespaço Krylov (K_L) é construída usando-se o processo de Arnoldi resultando numa matriz V_L de dimensão ($n \times L$) e numa matriz (superior) de Hessenberg (H_L) de dimensão ($L \times L$), tal que:

$$H_L = V_L^T A V_L \quad V_L^T V_L = I_L \quad (7)$$

I_L é uma matriz identidade $L \times L$. Se os vetores que compõem o subespaço Krylov forem linearmente independentes, a dimensão de K_{L+1} é $L + 1$, então as matrizes V_{L+1} e \vec{H}_L , esta última dada por (8), satisfazem (9).

$$\vec{H}_L = \begin{bmatrix} H_L \\ r^T \end{bmatrix}, \text{ onde } r = (0, \dots, 0, H_{L+1,L})^T \quad (8)$$

$$Av_L = V_{L+1} \vec{H}_L \quad (9)$$

Qualquer vetor $x_0 + K_L$ pode ser escrito como:

$$x = x_0 + V_L y \quad (10)$$

onde y é um vetor m -dimensional. Definindo:

$$J(y) = \|b - Ax\|_2 = \|b - A(x_0 + V_L y)\|_2 \quad (11)$$

A equação (11) resulta em:

$$b - Ax = b - A(x_0 + V_L y) \quad (12)$$

Como o lado esquerdo de (12) corresponde ao resíduo da solução iterativa e uma vez que os vetores coluna de V_L são ortonormais, então:

$$J(y) = \|b - A(x_0 + V_L y)\|_2 = \|\beta e_1 - \hat{H}_L y\|_2$$

$$\beta = \|r_0\|_2 \quad (13)$$

onde e_1 é vetor unitário em \mathfrak{R}^{L+1} . A aproximação do GMRES é feita através de um vetor único $x_0 + K_L$ que minimiza a Equação (13). Por (11) e (13), esta aproximação pode ser obtida simplesmente como $x_L = x_0 + V_L y_L$ onde o vetor y_L minimiza a função $J(y) = \|\beta e_1 - \hat{H}_L y\|_2$; isto é:

$$x_L = x_0 + V_L y_L$$

$$y_L = \arg \min_y \|\beta e_1 - \hat{H}_L y\|_2 \quad (14)$$

O GMRES não precisa computar e armazenar a matriz de iteração de forma explícita, uma vez que o processo envolve apenas sua multiplicação pelo vetor v , como mostrado em (9). Por outro lado, este método se torna ineficiente quando L for grande, pois o espaço de memória e o custo computacional são diretamente proporcionais a sua dimensão. Para superar este problema deve-se reiniciar o processo iterativo após um número m pré-especificado de iterações (Saad, 2003). As informações acumuladas são eliminadas e os resultados mais recentes são usados como valores iniciais para as próximas m iterações. Não existem regras para se estabelecer um valor ótimo para m e se este for muito pequeno, o processo de convergência pode ser lento, ou até mesmo falhar. Por outro lado se excessivo, um considerável espaço de memória será usado. Em (Bacher and Bullinger, 1996) observou-se que o valor de m para um desempenho ótimo do GMRES(m), ou pelo menos para garantir convergência, não está relacionado diretamente com a dimensão do sistema. Para sistemas até 233 barras sugere-se $m > 50$ para assegurar convergência, e para sistemas maiores $m \geq 10$.

4 PRÉ-CONDICIONAMENTO

A convergência do processo iterativo pode não ocorrer devido a um fenômeno associado ao GMRES- m conhecido como “estagnação”, que se manifesta quando a matriz de coeficientes não é definida positiva (Saad, 2003). Este problema pode ser resolvido através de uma prática onde se pré-condiciona a matriz original via uma matriz de transformação M (ou de pré-condicionamento). De uma forma geral, a eficiência e o tipo do pré-condicionamento dependem de certas propriedades da matriz de coeficientes, tais como simetria, definida positiva, diagonal dominante, etc. Ao invés de solucionar o sistema original (4), este é substituído por um equivalente (15) de forma que $M \approx A$ para que a convergência seja obtida em poucas iterações (Saad, 2003).

$$\underbrace{(M^{-1}A)}_{\tilde{A}} x = \underbrace{M^{-1}b}_{\tilde{b}} \quad (15)$$

Existem basicamente dois caminhos para se construir pré-condicionadores; um para uma aplicação específica e outro para uso mais geral. O primeiro pode ser bem eficiente, mas requer completo conhecimento do problema, além de ser sensível a qualquer variação, mesmo pequena, comprometendo a eficiência do processo iterativo. Aqui, não é objetivo desenvolver um pré-condicionador para o problema de interesse, e sim fazer uso de um de aplicação geral baseado em fatores incompletos (ILU).

Pré-condicionadores ILU

Estes pré-condicionadores diferem com base na regra de eliminação de elementos não-nulos que surgem em posições antes ocupadas por elementos nulos durante o processo de fatoração. Cada elemento não-nulo pode ser eliminado em função da sua posição, da sua magnitude, ou de uma combinação destes. A referência (Pai et al., 1995) usa pré-condicionamento tipo ILU(s) em análises no domínio do tempo, com s sendo um número inteiro positivo. Para este tipo de pré-condicionador, todos os novos elementos não-nulos com nível superior a s são descartados. Este método, entretanto, pode não ser robusto o bastante para certas classes de problemas. Para matrizes que não apresentem característica de diagonal dominante, ILU(s) pode ter que armazenar muitos elementos não-nulos pequenos, pouco contribuindo para a qualidade do pré-condicionador, além de apresentar um custo computacional alto. Um pré-condicionador mais eficiente pode ser obtido com elementos não-nulos sendo aceitos, ou não, em função de seus valores absolutos. Desta forma, apenas elementos não-nulos que contribuem para a melhoria da qualidade do pré-condicionador são armazenados e usados. Aqui é usada a regra proposta por (Saad, 2003) que fixa uma tolerância τ e um número ρ de elementos não-nulos permitidos nas linhas dos fatores incompletos. A cada etapa do processo de eliminação todos os elementos não-nulos inferiores a uma tolerância relativa obtida pelo produto da tolerância absoluta τ pela norma-2 da linha correspondente são eliminados, e os restantes pelo menos os ρ maiores em valores absolutos são mantidos.

Escalonamento, Normalização e Reordenamento da Matriz Jacobiana

Um pré-condicionador ILU pode apresentar vantagens e desvantagens desde a sua construção até a sua aplicação. As principais vantagens são simplicidade e versatilidade para diferentes tipos de problemas, menor custo computacional para construção, armazenamento e aplicação. Por outro lado, está sujeito a problemas de estabilidade numérica e de imprecisão dos seus fatores incompletos quando a fatoração envolver elementos pivô muito pequenos (Chow and Saad, 1997), resultando em um pré-condicionador de baixa qualidade que vai reduzir a taxa de convergência do método iterativo. Apesar destas desvantagens, as vantagens o tornam atrativo devido a sua capacidade de adaptação para o problema.

Para se construir um pré-condicionador de qualidade a fim de tornar eficiente e robusto o processo iterativo, deve-se ter cautela com relação às características da matriz Jacobiana original (16) já que é usada como imagem do pré-condicionador. Como no problema de interesse os seus elementos geralmente apresentam diferentes grandezas, os efeitos mencionados acima podem se manifestar. Para evitar que

a qualidade do pré-condicionador seja baixa, é necessário antes da sua construção melhorar o condicionamento da matriz Jacobiana escalonando seus elementos para reduzir a dependência do condicionamento do sistema de EDAs com o tamanho do passo de integração. O fator de escalonamento é função das tolerâncias relativa e absoluta associadas ao erro da solução computada (Brown et al., 1994). Em (16), y_1 é o vetor de variáveis de estado, y_2 de variáveis algébricas e h o passo de integração.

$$J_{SD} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} [I] + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

A normalização euclidiana é outra estratégia que pode ser considerada no pré-processamento após o escalonamento da matriz para reduzir ainda mais os módulos dos autovalores, além de tornar as suas colunas mais linearmente independentes. Os benefícios da normalização ficam mais evidentes no número de condicionamento da matriz Jacobiana.

Por fim, a última etapa do pré-processamento efetua o reordenamento da matriz Jacobiana já escalonada e normalizada, alocando os maiores elementos não-nulos na sua diagonal. Foram testadas várias técnicas de reordenamento, sendo estas: Reverse Cuthill-McKee (RCM) (Cuthill, 1972), de Sloan (Sloan, 1986), de Gibbs-Poole-Stockmeyer (Gibbs et al., 1976); variantes da classe *Minimum Degree* (Amestoy et al., 1996), e o Nested Dissection (George, 1973). Os melhores resultados foram obtidos pelo reordenamento RCM, que reduziu o número de elementos não-nulos, melhorou a estabilidade da fatoração incompleta e aumentou a taxa de convergência do GMRES.

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Esta seção apresenta experimentos numéricos utilizando-se dois sistemas-teste, um hipotético (IEEE-118 barras) e outro real (Norte-Nordeste Brasileiro). Todos os experimentos foram realizados num computador pessoal (Notebook Intel core 2 - 2.00 GHz; 1 GB - RAM). O FORTRAN foi a linguagem computacional usada com compilador Compaq otimizado e fez-se uso parcial de recursos do solucionador DASPK2.0 de domínio público (<http://www.cs.ucsb.edu/~cse/software.html>) em todos os experimentos. Também, para reduzir o custo computacional para se construir um pré-condicionador a cada intervalo de tempo, este é mantido constante e um novo só é construído quando o erro gerado por uma variação drástica do passo de integração for grande, pois a Jacobiana dada por (16) neste caso é bastante modificada.

Experimento I

É feita uma avaliação inicial do desempenho do método GMRES-10 usando-se para tal fim o sistema hipotético de energia elétrica IEEE-118 barras com 54 geradores, todos com reguladores automáticos de tensão e sinais estabilizadores de potência. É simulada uma seqüência de eventos (mais severos sob ponto de vista de afundamento de tensão) consistindo da abertura de cinco circuitos de transmissão nos instantes 0,005, 60, 200, 300 e 370s. Aqui, o processo iterativo do GMRES estagnou forçando a interrupção da simulação sem que a segunda abertura de circuito fosse efetuada. Por outro lado, o problema foi solucionado pelo método trapezoidal implícito com fatoração LU.

Experimento II

Repetiu-se o experimento anterior com o GMRES pré-condicionado via ILUT(10E-05, 100) pela esquerda seguindo as recomendações de (Brown et al., 1994) já que o problema envolve EDAs e esta forma de pré-condicionamento apresenta melhor consistência com relação as demais opções (pela direita ou por ambos os lados). O GMRES apenas pré-condicionado ainda falhou, sendo necessário considerar as estratégias de escalonamento, normalização e reordenamento antes da sua construção para solucionar o problema.

Experimento III

As curvas ilustradas na Figura 1 correspondem às respostas associadas à tensão terminal do gerador perturbado obtidas pelo BDF-GMRES (em cinza) e pelo método trapezoidal (em preto). Nota-se que, mesmo antes da perturbação ser aplicada, a resposta obtida pelo método trapezoidal é oscilatória e a simulação é interrompida não chegando nem ao instante de 30s, quando a manobra de redução na tensão de referência do regulador de tensão do gerador é efetuada (em destaque). Neste caso, uma análise preliminar indica perda de sincronismo, o que na verdade não ocorre.

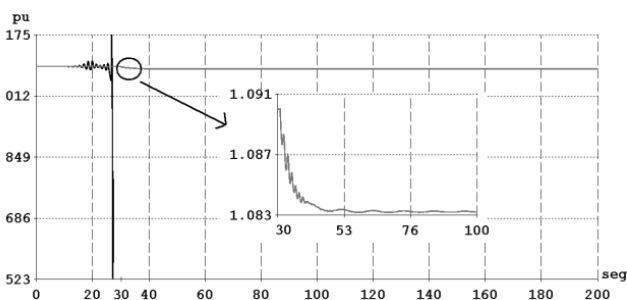


Figura 1: Tensão terminal do gerador perturbado.

Experimento IV

O sistema-teste deste experimento é real agregando os subsistemas Norte- Nordeste (N-NE), partes do Sistema Interligado Nacional (SIN), constituído por 564 barras, 831 linhas e 56 geradores, considerando um perfil de carga pesada. Vários geradores estão equipados com estabilizadores de potência, reguladores automáticos de tensão e limitadores de sobreexcitação. O sistema linear original está pré-condicionado via ILUT(10E-05,150) e a reinicialização do GMRES não está sendo considerada, pois se pretende verificar se o GMRES apenas pré-condicionado é capaz de solucionar o problema.

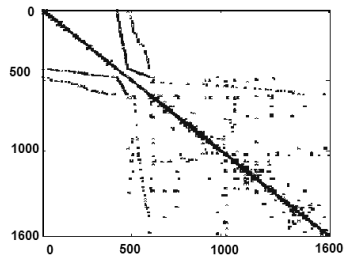
A simulação consistiu na remoção seqüencial (em 0,05, 20, 30 e 60s) de diversas máquinas síncronas (11 geradores e 1 compensador síncrono) e respectivos sistemas de controle, das principais usinas dos subsistemas N-NE. Com isto, fenômenos de curta e de longa duração se manifestam não apenas em função dos impactos causados pelos eventos, mas também pela ação dos dispositivos de controle.

A estrutura da matriz Jacobiana do N-NE é apresentada na Figura 2(a), sendo altamente esparsa e numericamente assimétrica. A Figura 2(b) mostra a estrutura da matriz Jacobiana depois de reordenada. A Figura 3 mostra o tempo de CPU gasto para solucionar o problema limitando-se a ordem do método BDF em 2 (48,52s) e em 5 (28,63s). Para garantir estabilidade numérica não foi necessário limitar a ordem do método conforme sugerido por algumas referências.

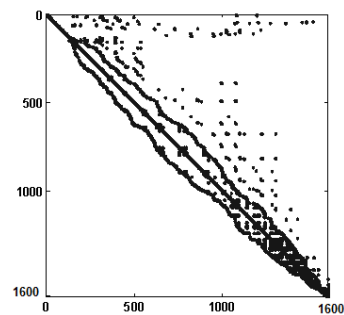
A Figura 4 informa o número de iterações do GMRES a cada intervalo de tempo e a Figura 5 a variação do passo de integração ao longo da simulação. No instante de cada contingência (0,05, 20, 30 e 60s), o passo é drasticamente reduzido enquanto que o número de iterações aumenta. Um passo muito pequeno aumenta significativamente o primeiro bloco superior à esquerda de (16) deteriorando o número de condicionamento da matriz Jacobiana, justificando o aumento no número de iterações lineares. Observa-se que em $t \approx 124s$ ocorreu um distúrbio não previsto, causado por um limitador de sobreexcitação atingindo seu limite, sendo que outros dispositivos de controle já tinham atingido seus limites em instantes anteriores.

Análises dos Resultados

A Tabela 1 apresenta o número de condicionamento da matriz Jacobiana de cada experimento, antes, durante e após o pré-processamento. O reordenamento não está mostrado por não alterar esta grandeza, já que esta estratégia não influencia a magnitude dos elementos da matriz. Um número de condicionamento grande, como se observa para todas as matrizes originais com destaque para o do Experimento IV, pode indi-



(a) Estrutura Original



(b) Reordenada - RCM

Figura 2: Estrutura da matriz Jacobiana.

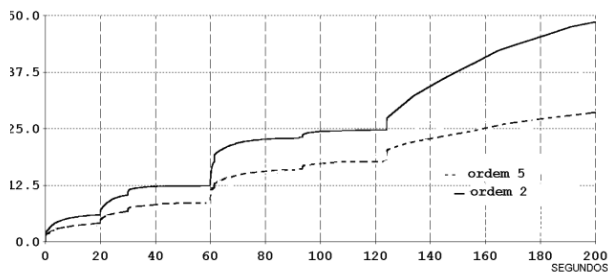


Figura 3: Restrição das ordens do método BDF.

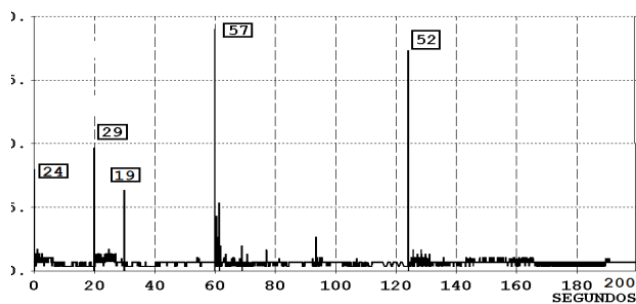


Figura 4: Número de iterações do GMRES a cada intervalo t_n .

car proximidade à singularidade e conseqüentemente dificuldades na solução do subproblema linear. Estes indicadores justificam a necessidade do pré-processamento para os sis-

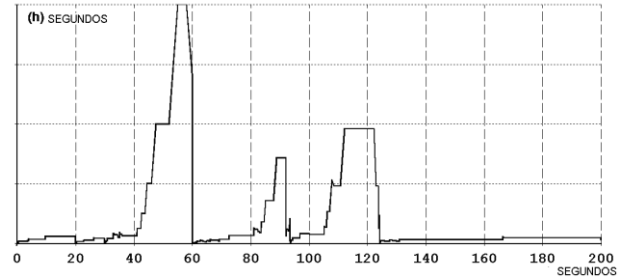


Figura 5: Variação do passo de integração (h).

temas considerados, notando que o efeito da normalização euclidiana fica mais evidente em IV. Já a Tabela 2 informa o tempo de CPU para diferentes métodos.

Tabela 1: Número de condicionamento da matriz Jacobiana.

Experimento	Original	Escalonada	Normalizada
I	8,64E+06	-	-
II	8,64E+06	2,15E+06	8,37E+03
III	1,27E+07	2,94E+06	2,41E+04
IV	2,00E+16	1,85E+14	3,61E+07

Tabela 2: Tempo de CPU.

Experimento	BDF - GMRES	Trapezoidal - LU	BDF - LU	Ganho (%)
I	Falhou	1 min 27 s	57,18 s	-
II	56,0s	1 min 27 s	57,18 s	2,0
III	12,7s	Falhou	34,75 s	173,6
IV	28,6s	38,4 s	27,98 s	-2,1

Experimento V

Os autores têm observado através de experimentos numéricos que, geralmente, o GMRES pré-condicionado apresenta os menores tempos de CPU quando comparado com métodos diretos, tanto em análises em regime permanente (Portugal, 2010) quanto no domínio do tempo. Uma desvantagem está na procura por valores ótimos para τ com base em tentativa e erro, mas a literatura (Benzi, 2002) indica uma faixa de valores ($10E-02$ – $10E-04$) que pode ser usada. Para verificar a solução usando um valor desta faixa ($10E-03$), o Experimento IV foi repetido mantendo-se o mesmo valor para ρ . Os resultados estão mostrados na Tabela 3 e indicam um aumento no tempo de CPU de 12,75% em relação ao experimento com τ ótimo ($10E-05$). Esse comporta-

mento se justifica pela maior quantidade de elementos não-nulos eliminados durante a construção do pré-condicionador, reduzindo a sua qualidade bem como a taxa de convergência do GMRES refletindo no tempo de CPU. Apesar disso, o experimento mostra que o problema sublinear pode ser solucionado sem uma busca exaustiva por um valor ótimo para τ . Se o ILUT falhasse, a solução poderia ser obtida reduzindo o valor de τ e/ou aumentando-se o de ρ (Benzi, 2002), mas neste experimento tais procedimentos não foram necessários.

Tabela 3: Resultados para valor sugerido de τ .

τ	10E-03	10E-05	BDF-LU
CPU (s)	32,28	28,63	27,98

6 MÉTODO DIRETO VERSUS MÉTODO ITERATIVO

Este é um dilema que tem merecido bastante atenção já que a decisão sobre qual é o mais adequado depende de diversos fatores relacionados ao problema e infelizmente esta decisão não é fácil. Entretanto, com base na experiência dos autores e nos experimentos numéricos, tem-se que:

- A velocidade de convergência do método iterativo, bem como a sua taxa de convergência, é muito dependente da qualidade do pré-condicionador que, quanto mais simples, maior será o número de operações realizadas pelo método, resultando em um elevado número de iterações para convergir, podendo até falhar.
- Um pré-condicionador de melhor qualidade necessita de um maior número de operações para a sua construção, mas o método iterativo tende a convergir rapidamente para a solução desejada.
- Sob o ponto de vista de aplicação, o usuário deve ter alguma experiência com métodos iterativos, principalmente com relação aos pré-condicionadores.
- Geralmente, métodos iterativos pré-condicionados precisam de uma maior quantidade de parâmetros em comparação aos diretos.
- Métodos iterativos usam menos espaço de memória em relação aos diretos. Por outro lado, esta vantagem é perdida quando for necessário armazenar duas matrizes, a de coeficientes e a de pré-condicionamento.
- Ambos os métodos são eficientes para matrizes esparsas.
- A situação ótima para a solução iterativa foi a com o ponto de operação próximo do máximo carregamento,

com 173,6% de ganho em comparação ao direto no tempo de CPU (ver Tabela 2).

- Nos experimentos, o método direto usado com o BDF faz uso de fatoração LU, ordenamento mínimo grau e pivotação parcial.
- O método direto foi ligeiramente superior ao iterativo no experimento com sistema real e nível de carga pesada (distante do máximo carregamento).
- Análises anteriores indicaram a melhor eficiência dos métodos iterativos para (Portugal, 2010):

As informações apresentadas acima podem ajudar no processo de escolha, mas a decisão final deve ficar a critério do usuário, o qual deve ter pleno conhecimento do problema e das características da matriz de coeficientes do sistema linear. No presente artigo, o problema enfoca estudos de estabilidade de sistemas elétricos, sendo a solução do sistema linear apenas parte dele.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho investigou o desempenho do método iterativo GMRES pré-condicionado via fatores incompletos na solução do subproblema linear gerado pelo método BDF na reprodução de fenômenos de estabilidade de curta e de longa duração de difícil solução, como as associadas às condições de operação próximas a instabilidade. Para aumentar a eficiência do método GMRES, procurou-se melhorar a qualidade do pré-condicionador escalonando, normalizando e ordenando a sua matriz imagem antes da sua construção, neste caso a Jacobiana do sistema elétrico incluindo os dispositivos dinâmicos. Os experimentos numéricos corroboraram a eficácia dessas estratégias e o GMRES solucionou eficientemente diferentes sistemas lineares, todos com matrizes de coeficientes (Jacobianas) inicialmente mal-condicionadas. Métodos diretos normalmente considerados neste tipo de análise foram usados para referência de desempenho.

Um pré-condicionador de boa qualidade pode solucionar o problema sem uma busca exaustiva por valores ótimos para seus parâmetros, além de evitar a estratégia de reinicialização do GMRES(m) já que a convergência pode ser obtida em poucas iterações como mostrado em um dos experimentos (exceto no instante do distúrbio). Investigações em andamento já identificaram alguns pontos críticos que podem melhorar a eficiência do GMRES, como o uso de um pré-condicionador de fatores incompletos com regra de eliminação baseada no erro e uma estratégia de reordenamento de mínimo grau.

REFERÊNCIAS

- Amestoy, P. R., Davis, T. A. and Duff, I. S. (1996). An approximate minimum degree ordering algorithm, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **17**(4): 886–905.
- Astic, J., Bihain, A. and Jerolimski, M. (1994). The mixed adams-bdf variable step size algorithm to simulate transient and long term phenomena in power systems, *IEEE Transactions on Power Systems* **9**(2): 929–935.
- Bacher, R. and Bullinger, E. (1996). Applications of non-stationary iterative methods to an exact newton-raphson solution process for power flow equations, *Power Systems Computation Conference*, Vol. 1, Dresden, Germany, pp. 453–459.
- Benzi, M. (2002). Preconditioning techniques for large linear systems: A survey, *Journal of Computational Physics* **182**(2): 418–477.
- Borges, C. T., Coutinho, A. L. G. A. and Falco, D. M. (1996). Soluço de fluxo de potência em ambiente vetorial usando o método do gradiente bi-conjugado estabilizado, *XI Congresso Brasileiro de Automática, 1996. XI CBA, 1996.*, Vol. 1, So Paulo, pp. 160–166.
- Borges, C. T., Coutinho, A. L. G. A. and Falco, D. M. (1997). Utilização de método tipo gradiente conjugado na aceleração do fluxo de potência em computação vetorial, *XIV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, Belm.
- Brenan, K. E., Campbell, S. L. and Petzold, L. R. (1996). *The Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial Mathematics.
- Brown, P. N., Hindmarsh, A. C. and Petzold, L. R. (1994). Using krylov methods in the solution of large-scale differential-algebraic systems, *SIAM Journal on Scientific Computing* **15**(6): 1467–1488.
- Burden, R. L. and Faires, J. D. (1989). *Numerical Analysis*, 4 edn, PWS-Kent.
- Chanotis, D. and Pai, M. (2000). Iterative solver techniques in the dynamic simulation of power systems, *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, 2000.*, Vol. 1, pp. 609–613.
- Chen, K. (2005). *Matrix Preconditioning Techniques and Applications*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press.
- Chen, Y. and Shen, C. (2006). A jacobian-free newton-gmres(m) method with adaptive preconditioner and its application for power flow calculations, *IEEE Transactions on Power Systems* **21**(3): 1096–1103.
- Chen, Y., Shen, C. and Wang, J. (2009). Distributed transient stability simulation of power systems based on a jacobian-free newton-gmres method, *IEEE Transactions on Power Systems* **24**(1): 146–156.
- Chow, E. and Saad, Y. (1997). Experimental study of ilu preconditioners for indefinite matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **86**(2): 387–414.
- Cuthill, E. (1972). Several strategies for reducing the bandwidth of matrices, in D. J. Rose and R. A. Willoughby (eds), *Sparse Matrices and their Applications*, Plenum Press, New York, pp. 157–166.
- Dag, H. and Semlyen, A. (2003). A new preconditioned conjugate gradient power flow, *IEEE Transactions on Power Systems* **18**(4): 1248–1255.
- Decker, I., Falcao, D. and Kaszkurewicz, E. (1996). Conjugate gradient methods for power system dynamic simulation on parallel computers, *IEEE Transactions on Power Systems* **11**(3): 1218–1227.
- EPRI (1987). EPRI EL 4610 - extended transient midterm stability program.
- Flueck, A. and Chiang, H.-D. (1998). Solving the nonlinear power flow equations with an inexact newton method using gmres, *IEEE Transactions on Power Systems* **13**(2): 267–273.
- Galiana, F., Javidi, H. and McFee, S. (1993). On the application of a pre-conditioned conjugate gradient algorithm to power network analysis, *Conference Proceedings Power Industry Computer Application Conference, 1993.*, pp. 404–410.
- George, A. (1973). Nested dissection of a regular finite element mesh, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **10**(2): 345–363.
- Gibbs, N. E., William G. Poole, J. and Stockmeyer, P. K. (1976). An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **13**(2): 236–250.
- Jardim, J., Neto, C. and Groetaers Dos Santos, M. (2006). Brazilian system operator online security assessment system, *IEEE PES Power Systems Conference and Exposition, 2006. PSCE '06.*, pp. 7–12.

- Kulkarni, A., Pai, M. and Sauer, P. (2001). Iterative solver techniques in fast dynamic calculations of power systems, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **23**(3): 237–244.
- Miller, R. K. and Michel, A. N. (1982). *Ordinary Differential Equations*, 1 edn, Academic Press.
- Pai, M. and Dag, H. (1997). Iterative solver techniques in large scale power system computation, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997.*, Vol. 4, pp. 3861–3866.
- Pai, M., Sauer, P. and Kulkarni, A. (1995). A preconditioned iterative solver for dynamic simulation of power systems, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1995. ISCAS '95.*, Vol. 2, pp. 1279–1282.
- Paz, A. A. (2004). *Implementação de um simulador numérico em um programa computacional de estabilidade*, Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade, Universidade Federal do Maranhão.
- Pessanha, J. E. O., Paz, A. A. and Poma, C. P. (2005). Técnicas de solução de sistemas de equações diferenciais algébricas: Aplicações em sistemas de energia elétrica, *SBA Controle & Automação* **16**(3): 359–372.
- Pessanha, J. E. O., Portugal, C. and Saavedra, O. (2009). Investigação crítica do desempenho do gmres preconditionado via fatoração incompleta LU em estudos de fluxo de carga, *SBA Controle & Automação* **20**(4): 564–572.
- Portugal, C. E. (2010). *Um Solucionador Iterativo Para Sistemas Lineares: Aplicação no Problema do Fluxo de Carga*, PhD thesis, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T. (1998). *Numerical Recipes*, 1 edn, Cambridge University Press.
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear System*, 2 edn, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **7**(3): 856–869.
- Semlyen, A. (1996). Fundamental concepts of a krylov subspace power flow methodology, *IEEE Transactions on Power Systems* **11**(3): 1528–1537.
- Sloan, S. W. (1986). An algorithm for profile and wavefront reduction of sparse matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **23**(2): 239–251.
- Stubbe, M., Bihain, A., Deuse, J. and Baader, J. (1989). Staga: a new unified software program for the study of the dynamic behaviour of electrical power systems, *IEEE Transactions on Power Systems* **4**(1): 129–138.