O Formal e o Transcendental na Matemática*

*GILLES-GASTON GRANGER***

O problema filosófico clássico que nos propomos abordar aqui permanece um dos mais gerais e do mais significativos que se pode colocar ainda hoje o matemático interessado na extraordinária perenidade de sua ciência e no prodigioso sucesso de suas aplicações ao universo dos fenômenos. Questão que concerne seguramente muito especialmente às geometrias, em razão de sua relação aparentemente privilegiada com o sensível, mas bem como à matemática em geral. Qual é a natureza e o alcance da *objetividade* da matemática? Objetividade se entende naturalmente aqui num sentido inteiramente radical de validade enquanto conhecimento - ou talvez criação - de *objetos*. É nessa perspectiva que empregamos aqui a oposição de origem kantiana de dois termos: "lógico" e "transcendental". Começaremos então por justificar o sentido dado a essa palavra transcendental. Depois, proporemos uma idéia do estatuto do lógico e de sua função na matemática, e terminaremos examinando, a partir dos pontos de vista anteriormente esboçados, uma concepção dos objetos matemáticos e de sua relação com os outros tipos de "objetalidade" (1).

O Que Quer Dizer Aqui "Transcendental"?

Em sua "Crítica do Juízo", Kant escreve:

> "Um princípio transcendental é um princípio pelo qual é representada a condição universal a priori, sob a qual somente coisas (Dinge) podem tornar-se de uma maneira geral objetos de nosso conhecimento" (K. U. Einleitung, V, XXIX).

---

* Conferência do Mês do IEA/USP feita pelo autor no dia 9 de agosto de 1990.

** *Gilles-Gaston Granger* é filósofo e professor do Collège de France.

(1) N. do T.: no original, "objectalité".

Partimos da noção kantiana, mas sem pretender uma fidelidade que seria própria do historiador; e mesmo conservando, cremos, o essencial, a definiremos novamente à luz dos desenvolvimentos posteriores da ciência.

Assim, a função transcendental de um conceito será definida como estabelecedora das condições da *possibilidade de considerar como objetos* as entidades às quais ele remete. Faremos sobre isso duas ressalvas:

1) Kant constituiu uma proteção(2) contra o pensamento sobre objetos ilusórios: é a necessidade de uma ligação dos conceitos ao sensível, fora da qual o filósofo não reconhece nenhuma possibilidade de *experiência*. Assim, os próprios objetos matemáticos são construídos como desenvolvimento das formas a priori, espaciais e temporais, da *intuição sensível;*

2) as condições transcendentais kantianas são claramente distintas de condições que dependeriam da natureza empírica, psicofisiológica, de nossos espíritos. Contudo, elas se relacionam com uma *subjetividade,* de algum modo anônima, dita justamente transcendental.

Não discutiremos o caráter essencial desses dois aspectos no kantismo; mas pensamos que a natureza do pensamento científico tal como ela se revela hoje não poderia confirmá-los. Como garantia contra a formação de pseudoconceitos e a consideração de pseudo-objetos, substituímos então a limitação ao sensível e a idéia de subjetividade pela tese de uma *correlação fundamental e indissolúvel entre o " objetal " (3) e operatório.* Substitui-se a fórmula:

> "pensamentos sem conteúdos são vazios; intuições sem conceitos são cegas" (K. R. V. B. 75),

pela fórmula: o pensamento sobre operações sem objetos é estéril; o pensamento sobre um objeto sem sistema de operações é opaco. A posição de uma entidade como objeto exige que ao mesmo tempo funcione um *sistema de operações* cujas regras podem ser ou não, afinal, explicitadas. Gostaríamos então de mostrar que a função transcendental das entidades matemáticas depende do caráter essencial e da particular clareza da correlação operações/objetos que elas apresentam.

Uma última observação, todavia, a propósito de Kant. Na "Crítica da

---

(2) N. do T.: no original, "garde-fou".

(3) N. do T.: no original, "objectal".

Razão Pura" , transcendental é oposto a "metafísico" quando o princípio

> "representa a condição a priori sob a qual somente objetos cujo conceito deve ser dado empiricamente podem ser mais determinados a priori" (ibid.),

e oposto a "formal" quando, falando da lógica, Kant diz que a lógica "geral mas pura" é

> "um cânon do entendimento e da razão, mas somente em relação àquilo que existe de formal em seu uso, qualquer que seja por outro lado o conteúdo, empírico ou transcendental" (K. R. V. A. 53).

É esta segunda oposição que nos interessa aqui. Ainda que Kant continue a chamar de "lógica" um conhecimento das regras do pensamento puro relativo a um objeto, não excluindo todo conteúdo, mas somente os conteúdos empíricos, sobretudo retemos do lógico *stricto sensu* seu caráter radicalmente formal opondo-o a uma disciplina transcendental.

A posição de uma entidade como objeto exige que ao mesmo tempo funcione um sistema de operações *cujas regras podem ser ou não, afinal, explicitadas.*

O Formal e o Lógico.

Essa noção de lógico estando assim delimitada, propomos fazer sobressair, em oposição ao aspecto puramente formal, a natureza de um conteúdo próprio à matemática. Mas convém, de início, sublinhar a relatividade da oposição forma/conteúdo. O que é forma em um nível pode-se tornar conteúdo em um nível superior de organização, de maneira que a caraterização como forma somente tem sentido se lhe contrapormos um conteúdo e de um certo modo, existam graus do formal. Seria muito a propósito lembrar aqui a noção de "tema" introduzida por J. Cavaillès. A passagem "transversal" - ou "vertical" - que é operada na "tematização" não consiste justamente em tornar explícito como novo tipo de objeto - e como novo conteúdo - o que aparecia primeiramente como puro operatório? O "paradigma", esvaziando dos enunciados de seus conteúdos mobilizados em "variáveis" (é "o momento da variável", diz Cavaillès), fazia aparecer uma forma operando sobre esses conteúdos; o "tema" toma então essa forma como ponto de aplicação de um novo sistema operatório: as adições e multiplicações da aritmética tornam-se entidades mais gerais submetidas às leis de grau superior de uma álgebra "universal"; a operação de integração torna-se a entidade: "funcional linear", objeto de uma análise nova. A verdadeira oposição é aquela do par operação/objeto. Um nível operatório superior determina como novo objeto, o que era operatório em ato.

O aspecto lógico *stricto sensu* de um pensamento será definido como termo extremo, absoluto desta oposição: quando o conteúdo que caracteriza o momento-objeto se reduz ao próprio sistema operatório, grau zero do conteúdo. O "objeto" lógico então não é nada mais que uma sombra de objeto, lugar vazio, ponto de apoio de operação. É o que se produz com o "cálculo proposicional". A afirmação de Wittgenstein, no "Tractatus", de que não existem *constantes lógicas,* pode ser compreendida nessa perspectiva; constantes - ou seja, operadores - lógicas e objetos proposicionais são apenas as duas faces de um mesmo pensamento. Do mesmo modo, na formulação deste cálculo como "álgebra de Lindenbaum": o objeto é explicitamente reduzido a dois estados (presença, ausência; verdadeiro, falso; posto, não posto), cuja realidade se reduz à tradução de uma eficácia operatória.

Do mesmo modo, duas interpretações equivalentes do cálculo, já entrevistas por Leibniz, são igualmente legítimas, correspondendo à evidenciação seja do aspecto objetal, seja do aspecto operatório: cálculo das *classes* (mas sem distinção classe-elemento, finito-infinito) e cálculo das *proposições.* Sob esta última interpretação, o cálculo aparece regulando de maneira elementar os *atos* de todo pensamento relativo sobre objetos, independentemente de qualquer especificação destes. Essa lógica *stricto sensu* é efetivamente ao mesmo tempo teoria da forma do objeto *uberhaupt* e teoria do encadeamento dos enunciados elementares, funcionando então como *metateoria* fundamental para qualquer outro nível formal de manipulação de objetos de pensamento.

Seu caráter fundamental se manifesta, além disso, através de propriedades formais particulares, decorrendo da perfeita adequação entre o sistema operatório e o objeto ao qual ele se aplica. Pode-se então falar de uma *dualidade* estrita, isto é, de uma reciprocidade de determinação que corresponde de algum modo a uma simples inversão de pontos de vista; o que traduz o privilégio metateórico do cálculo: não contradição, completude, decidibilidade, cuja garantia universal se perde à medida que o objeto do cálculo ganha consistência e se enriquece por mais frágil que isto seja.
O objeto "predicado de primeira ordem" já faz o cálculo perder a decidibilidade...

O Objeto Matemático

Qual é o estatuto da matemática com relação a este elemento lógico puro? Certamente a matemática usa conceitos tais que lhe seja possível de direito explicitar completamente seus passos demonstrativos regulados pela lógica; mas a matemática tem *objetos especificados.* O problema que nos interessa não é, na verdade, o de uma demarcação entre lógica e matemática; mas nos parece importante e significativo reconhecer a maneira pela qual a matemática constitui esta objetividade a qual a lógica é manifestamente incapaz; tentaremos portanto precisar, para isso algumas características do objeto matemático.

1. O objeto matemático é primeiramente caracterizado pela aparição de "conteúdos formais", ausentes da lógica. Essa aparição de "conteúdos", que não têm entretanto sua origem nos *dados* do sensível, implica na perda da adequação perfeita objeto/operação: perda da decidibilidade universal através de um algoritmo finito, que se manifesta desde que o objeto adquire uma especificação, desde o cálculo de predicados; perda, mais decisiva, da completude e da possibilidade de estabelecer a não-contradição que sobrevém com a aparição do número numa aritmética elementar. "Conteúdo" significa aqui propriedades do objeto que escapam de uma certa maneira do sistema operatório demonstrativo, ainda que o objeto em questão tenha sido introduzido como correlato do sistema operatório. A semântica, poderíamos dizer, ganha então uma vida própria e se destaca da sintaxe.

Assim, a função transcendental de um conceito será definida como estabelecedora das condições da possibilidade de considerar como objetos *as entidades às quais ele remete.*

Esta característica se manifesta exemplarmente na dialética de *ampliação dos campos operatórios,* que é uma das modalidades do progresso matemático. A exploração completa das virtualidades de um sistema operatório se revela impossível no campo de objetos que ele constituiu; restabelece-se então a integridade operatória estendendo-se o sistema de objetos; uma parte própria do novo sistema é então muito genericamente uma imagem isomorfa do antigo. Os exemplos são numerosos, desde a invenção dos números complexos até aquela das distribuições.

2. Do ponto de vista precedentemente enunciado, a matemática começaria portanto com o cálculo de predicados de primeira ordem, e ganharia seu sentido pleno com a aritmética elementar submetida aos teoremas godelianos. É preciso contudo sublinhar um outro aspecto do objeto propriamente matemático, sem dúvida estreitamente associado ao primeiro, mas que no entanto dele se distingue: queremos falar da consideração do *infinito como objeto,* em oposição ao infinito *virtual,* simples possibilidade de iteração operatória *indefinida.* Esta última está evidentemente presente desde o cálculo puramente lógico de proposições, como liberdade de operar, mas ela não implica na introdução de nenhum objeto, nem de procedimentos explicitamente colocados como *infinitos.* Que a matemática "começa com o infinito" era a definição de Cavaillès. Observaremos que é de

fato essa introdução que ocasiona a formulação das exigências intuicionistas e que dá um sentido às dificuldades levantadas pelas definições não-"predicativas" (quando uma enumeração exaustiva dos elementos de um conjunto é possível, não existe problema real e, por exemplo, o lógico intuicionista não se distingue em nada do lógico tradicional). Acrescentemos, entre parênteses e sem querer desenvolver este ponto, que uma das expressões centrais da introdução do infinito é certamente o axioma da escolha.

Se a tematização do infinito deve ser reconhecida como assinalando o momento propriamente matemático do pensamento objetivo, é sem dúvida porque com essa compreensão se aceita definitivamente a impossibilidade de uma dominação completa dos objetos, a proliferação dos conteúdos formais. Desse ponto de vista, a matemática intuicionista não consiste em recusar totalmente essa apropriação mas exprime uma tomada de consciência particularmente aguda de suas condições e impõe um fortalecimento das exigências de inspiração kantiana que concernem à validação do pensamento relativo aos objetos. Do mesmo modo, os debates metamatemáticos sobre os graus de construtividade dos conceitos respondem à preocupação mais ou menos bastante presente entre os matemáticos (e sobretudo entre os lógicos) em limitar a liberdade que nos concedemos de manipular "idealmente" objetos que escapam a operações efetivas.

3. A imaginação matemática cria portanto sistemas de objetos submetendo-se unicamente, de um lado, à lógica *stricto sensu* que regula seus passos táticos e, de outro lado, à necessidade de uma explicação possível dos sistemas operatórios correlativos dos ditos objetos. Usamos a palavra "criação"; criação certamente condicionada, mas cuja fecundidade espantosa não pode deixar de sugerir que ela é, ao menos de alguma maneira, um efeito da arte. Não existem entretanto objetos matemáticos que poderíamos chamar "naturais".

Não se trata aqui de noções primeiras por sua psicogênese e sua história cultural, ainda que essa "naturalidade" empírica seja sem dúvida mais frequentemente associada a um caráter natural intrínseco. Qualificaremos de "naturais" objetos matemáticos que têm por si mesmos uma força(3) privilegiada, que nos propomos relacionar a duas características que poderiam parecer à primeira vista incompatíveis:

a) uma "incompletude" essencial que torna sua exploração indefinidamente aberta, e que faz com que o conhecimento de todos

(4) N. do T.: no original, "prégnance".

seus aspectos não seja jamais esgotado pela captura de alguns dentre eles nas axiomáticas (que fixam sistemas operatórios).

b) um tipo de "acabamento", ligado à complexidade das estruturas abstratas que se pode deles dissociar, e que lhes dá, no domínio dos seres matemáticos, o caráter de entidades relativamente concretas. Eles são para si o seu próprio modelo.

... o problema reside em compreender como se articulam a função transcendental autônoma do pensamento matemático e a possibilidade de aplicações deste ao mundo da empiria.

Essa naturalidade poderia sem dúvida, se nossa ciência nesses domínios fosse mais avançada e mais segura, ser ligada às condições biológicas da relação de um organismo com seu meio. Não abordaremos essa questão, que provém de uma biopsicologia e de uma psicogenética. Mas sob outro ponto de vista, os conceitos "naturais" não são o simples reflexo de uma realidade empírica da qual eles seriam oriundos por abstração, nem a expressão de condições a priori do pensamento sobre objetos da experiência *sensível*. A noção de espacialidade , por exemplo, é um exemplo de conceito matemático "natural", mas nesse sentido um espaço lobatchevskyano é igualmente natural; exatamente como um espaço euclideano, porque ele constitui uma variante igualmente rica e complexa de uma mesma noção constitutiva de toda representação de um mundo de objetos. A idéia de número real, encarada enquanto idéia da "reta numérica", é um conceito natural, assim como a idéia de número inteiro. Tal como a entendemos, a naturalidade dos objetos matemáticos não poderia portanto ser assimilada à sua proximidade, à sua comodidade ou à nossa espontaneidade em sua aplicação à experiência. O que se opõe aos objetos naturais não são objetos desviantes, ou sobre-determinados(4), mas objetos construídos essencialmente por *redução, abstração, e generalização:* a noção de grupo, a noção de "espaço" vetorial, a noção de Categoria, por exemplo...

Para interpretar essa distinção, é preciso reconhecer que a função transcendental da matemática comportaria duas orientações: uma voltada para a constituição, num simbolismo rigoroso, de objetos de facetas múltiplas, que num certo sentido se bastam a si próprios - esses são os objetos "naturais"; a outra orientada para o esclarecimento, por dissociação cirúrgica, de estruturas "elementares", suscetíveis de aparecer como aspectos abstratos dos primeiros. Teríamos aí duas modalidades de *existência* matemática, ou mais exatamente de evidenciação, ou mesmo, se quisermos, de descoberta, da existência matemática. Bem entendido, uma vez explicitamente esclarecido, conceitos naturais e conceitos reduzidos estão exatamente em pé de igualdade, e os conceitos reduzidos, mesmo se eles aparecem na arquitetura das estruturas como mais fundamentais ou mais gerais, não têm verdadeira prioridade: noções "naturais" como a de "espaço"

---

(5) N. do T.: no original, "surdéterminés" : determinados em excesso, por vias concorrentes.

ou de inteiro reaparecem necessariamente, como instrumentos "ingênuos" meta-operatórios, na construção dos objetos mais abstratos.

4. Finalizando, se admitimos nossa concepção da matemática, o problema reside em compreender como se articulam a função transcendental autônoma do pensamento matemático e a possibilidade de *aplicações* deste ao mundo da empiria. Pôde-se falar de um "milagre" da adequação dos objetos matemáticos aos fenômenos naturais, e achá-la, a priori, "insensata"... Duas soluções clássicas foram formuladas que podemos esquematizar assim. Uma solução "platônica" (o adjetivo não faz certamente justiça a Platão): os *mathemata* são essências de toda coisa, e através dos quais sua realidade pode ser atingida. Uma solução empirista: os *mathemata* são formas abstratas tiradas da experiência. Mas o desenvolvimento da matemática leva a recusar as duas teses.

Diremos antes que a matemática visa a construção da totalidade das formas de objetos possíveis, e não somente de objetos construídos na intuição sensível (como o mostra a importância dos seres "teratológicos"). Seria talvez necessário precisar: a totalidade das formas de objetos *construtíveis na intuição simbólica.*

Essa seria, em suma, a tese leibniziana, mas sob a condição de não restringir os possíveis ao lógico *stricto sensu* (subordinado ao único princípio de identidade para Leibniz), e de integrar o jogo de princípios correspondente aos princípios leibnizianos "arquitetônicos" na própria matemática: a produção propriamente matemática cria objetos certamente imaginários, mas que têm *conteúdos formais* não deriváveis pela lógica pura. A "livre" matemática, segundo a expressão de Cantor, tira sua fecundidade do reconhecimento e da exploração dos constrangimentos engendrados pela aparição de tais conteúdos. Entre a multiplicidade das formas de objetos que ela engendra, algumas, é verdade, o foram explicitamente com vistas a fornecer modelos dos fenômenos, e é nesse sentido que as ciências da empiria colocam problemas e sugerem soluções ao matemático. E, algumas, nascidas de uma exploração abstrata empreendida pela pura imaginação criadora, se verificam inopinadamente úteis ao físico muito tempo depois de terem sido formadas. Mas, em sua maioria, nascem e permanecem sem aplicações externas, enquanto formas a priori de objetos possíveis, ricas em conteúdos que não devem nada à experiência de nossos sentidos. Eis porque a função transcendental da matemática é verdadeiramente criadora, indefinidamente criadora, e não cessa de apresentar ao filósofo, sob uma luz implacável, o enigma da relação entre a representação e a realidade.

Tradução de Cláudio Roberto Bauzys. Revisão Técnica de Mauro Marcos de Oliveira Bellesa.