ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: evidências de fluência tecno-matemática

Different Ways of Using GeoGebra in Mathematical Problem-Solving Beyond the Classroom: evidences of techno-mathematical fluency

Hélia Jacinto*

Susana Carreira**

Resumo

Este artigo discute a atividade de resolução de problemas de Matemática com tecnologias no âmbito de um campeonato extraescolar a distância. O estudo visa descrever os aspetos subjacentes à utilização simultânea de conhecimento matemático e tecnológico nessa atividade, com foco no desenvolvimento de modelos conceptuais que conduzem às soluções dos problemas. A investigação, de natureza qualitativa, centra-se na análise de um conjunto de produções digitais elaboradas pelos participantes com recurso ao GeoGebra. Os dados mostram que o *software* é usado de forma livre e voluntária para estruturar e amplificar o pensamento matemático, influenciando os processos de resolução. Para além de suportar a materialização das situações problemáticas e favorecer a transformação de ideias estáticas em ideias dinâmicas, faz emergir matematizações que sustentam modelos conceptuais bastante distintos. Os aspetos subjacentes à existência de diferentes modos de resolver-e-exprimir um dado problema com o GeoGebra são explicados em termos da fluência tecno-matemática de cada participante.

Palavras-chave: Fluência Tecno-Matemática. GeoGebra. Modelos Conceptuais. Resolução de Problemas.

Abstract

This paper addresses a mathematical problem-solving activity with technology in the context of an online beyond school competition. The study aims to describe the underlying aspects of simultaneously resorting to mathematical and technological knowledge in such an activity, focusing on the development of conceptual models for the solutions of problems. The research, following a qualitative approach, is based on the analysis of a set of digital solutions produced with GeoGebra. Main results show that the software is used freely and willingly to structure and amplify the mathematical thinking, influencing the solving and expressing processes. Besides supporting the materialization of the problematic situations and promoting the transformation of static

* Mestre em Ciências da Educação pela Universidade Católica Portuguesa (UCP), Lisboa, Portugal. Professora de Matemática na Escola Secundária Jorge Peixinho, Montijo, Portugal. Membro da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (IEUL), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Instituto de Educação, Alameda da Universidade, 1469-013, Lisboa, Portugal. *E-mail*: hjacinto@campus.ul.pt.

** Doutora em Educação, especialidade de Didática da Matemática, pela Universidade de Lisboa, Portugal. Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve (FCT-UAlg), Faro, Portugal. Membro da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (IEUL), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve, Campus de Gambelas, 8005-139, Faro, Portugal. *E-mail*: scarrei@ualg.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

ideas into dynamic ideas, it drives mathematization processes that support quite different conceptual models. The fundamental features that lead to different ways of solving-and-expressing a given problem with GeoGebra are explained in terms of the techno-mathematical fluency of each participant.

Key-Words: Techno-Mathematical Fluency. GeoGebra. Conceptual Models. Problem Solving.

1 Introdução

Os rápidos avanços tecnológicos e a crescente facilidade no acesso às mais sofisticadas ferramentas digitais têm vindo a alterar a forma como o ser humano interage com o mundo. Hoje aceitamos pacificamente essa intrusão do avanço tecnológico e consideramos que estas mudanças, não só em termos de bens e materiais, mas também em termos de conceções, são imprescindíveis à melhoria da nossa qualidade de vida. Todavia, esta rápida disseminação, o acesso facilitado e o uso constante de tecnologias digitais estão recolocando uma forte tônica no estudo da sua influência na própria natureza do conhecimento matemático (ARTIGUE, 2007). Em particular, essa imersão no mundo tecnológico está a potenciar alterações ao nível das “capacidades matemáticas que são necessárias ao sucesso para além da escola” (LESH, 2000, p. 177), pelo que é necessário ter em conta que estas sofisticadas ferramentas digitais

> introduzem novas situações de resolução de problemas nas quais a matemática é útil; introduzem novas normas e procedimentos para construção, argumentação e justificação; e expandem radicalmente o tipo de capacidades e compreensões matemáticas que contribuem para o sucesso nessas situações (LESH, 2000, p. 178).

Portanto, não é apenas o pensamento matemático necessário fora da sala de aula que se está modificando, mas também as próprias “situações de resolução de problemas em que é necessário algum tipo de pensamento matemático” (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008, p. 5). Apesar da resolução de problemas ter recebido muita atenção da parte dos investigadores na segunda metade do século XX, sob a marcante influência de George Pólya e mais tarde de Alan Schoenfeld, tem-se notado um decréscimo no interesse dos investigadores pela temática, sobretudo no que toca à atividade de resolução de problemas que ocorre para além da aula de Matemática, seja noutras áreas disciplinares, seja em contextos exteriores à escola (ENGLISH; SRIRAMAN, 2010). É neste sentido que esta pesquisa visa descrever e compreender a utilização simultânea de conhecimentos matemáticos e tecnológicos para resolver problemas de Matemática no contexto de duas competições *online* de resolução de problemas.

1.1 O contexto e os objetivos do estudo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

Os campeonatos SUB12® e SUB14® são dinamizados pelo Departamento de Matemática da Universidade do Algarve, Portugal, e destinam-se a jovens que frequentam o 5.º ou o 6.º ano (10-12 anos, no caso do SUB12) e o 7.º ou o 8.º ano (12-14 anos, no caso do SUB14). Na Fase de Apuramento, os concorrentes acedem ao *website* do campeonato para consultar um problema quinzenal, dispondo de duas semanas para submeter a sua resolução por *e-mail* ou através da página. É permitida a utilização de quaisquer ferramentas tecnológicas para resolver os problemas, porém, para serem consideradas corretas, as respostas submetidas têm que incluir uma descrição detalhada e clara do processo de resolução. Estas são competições inclusivas, pois as regras de participação permitem e até encorajam a procura de ajuda durante esta fase (junto de familiares, professores, ou da própria organização), o que faz com que esta atividade se torne acessível a alunos de desempenhos variados e não somente aos alunos de excelência.

Pesquisas anteriores mostraram que estes jovens revelam uma elevada fluência tecnológica ao exprimir as suas soluções (JACINTO; CARREIRA, 2008); que o uso de tecnologias reconfigura esta atividade, pois diferentes jovens resolvem o mesmo problema com uma mesma ferramenta mas desenvolvem modos bastante distintos de pensar e agir (JACINTO; CARREIRA, 2013); que os diferentes níveis de sofisticação das soluções emergem dos modelos conceptuais desenvolvidos com uma dada tecnologia (CARREIRA; JONES; AMADO; JACINTO; NOBRE, 2016); e que estes jovens percebem a adequação entre uma certa tecnologia e certos conhecimentos matemáticos, e conjugam-nos de forma pertinente para obter a solução de um problema (JACINTO; CARREIRA, 2016).

Pretendemos agora aprofundar a compreensão deste fenômeno no que diz respeito à utilização simultânea de conhecimento matemático e tecnológico na resolução de problemas. Analisando um conjunto de resoluções de dois problemas, um do SUB12 e outro do SUB14, em que vários concorrentes recorreram ao GeoGebra, procuramos compreender o papel desta ferramenta no desenvolvimento de modelos conceptuais que conduzem às soluções. O nosso propósito passa ainda por identificar e compreender os aspetos subjacentes à existência de diferentes modos de resolver cada problema com a mesma tecnologia. Sugerimos que as diferenças podem ser explicadas em termos da fluência tecno-matemática de cada participante.

2 Fundamentação teórica

2.1 Resolver-e-exprimir problemas de Matemática

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

Os campeonatos SUB12 e SUB14 propõem *problemas não-rotineiros* na medida em que não se resolvem através da aplicação de regras ou procedimentos comuns ou prontos a utilizar pelos concorrentes. Estes problemas requerem abordagens em que exista liberdade para construir, testar e modificar as estratégias planejadas. Esta resolução de problemas é encarada como o *desenvolvimento de formas produtivas de pensar sobre situações desafiadoras* (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007), em que se adota uma perspetiva matemática para encontrar a solução.

Os concorrentes desenvolvem abordagens muitas vezes desprovidas de técnicas matemáticas formais, mas muito marcadas pela sua experiência pessoal. Esta atividade é consistente com o desenvolvimento de um *processo de matematização* (FREUDENTHAL, 1973), ou seja, uma reflexão sobre a realidade que leva à sua compreensão e alteração através do recurso a ideias ou métodos matemáticos. Treffers (1987) introduziu a noção de *matematização horizontal*, i.e., a exploração e interpretação de situações ou problemas que levam ao estabelecimento de conceitos matemáticos; e de *matematização vertical*, que surge como uma formalização desses conceitos através da sua organização, classificação e generalização. Assim, é possível afirmar que estes jovens matematizam quando criam Matemática de acordo com as suas experiências e características pessoais e sob a influência dos ambientes em que se inserem, hoje tecnologicamente ricos e diversificados.

Para Gravemeijer (2005), os *modelos de* situações específicas surgem como forma de representar o problema e de lhe atribuir significado, e integram estratégias informais baseadas na experiência do aluno. No entanto, o papel destes modelos altera-se à medida que o aluno se apropria de problemas semelhantes e começa a focar-se nos objetos matemáticos, nas relações e nos procedimentos característicos da matematização vertical. O modelo deixa de representar apenas a situação e passa a ser a base do raciocínio matemático que foca as relações envolvidas de uma forma desvinculada do contexto: "um *modelo de* uma atividade matemática informal desenvolve-se num *modelo para* um raciocínio matemático mais formal" (GRAVEMEIJER, 2005, p. 95). O desenvolvimento de um *modelo para* envolve um afastamento do contexto, insistindo na simbolização, na procura de estratégias e relações mais formais que sustentem o raciocínio. O modelo conceptual assume, de forma gradual e progressiva, as características de um objeto matemático sofrendo alterações até que ganha "uma vida própria" (IBIDEM, p. 98).

Estes modelos conceptuais podem incluir diagramas, esquemas, tabelas, descrições textuais, ou expressões com símbolos: estas "explicações e construções não são meros processos que os estudantes usam no decurso de produzir a solução (…) elas SÃO os

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

componentes mais importantes da resposta" (LESH; DOERR, 2003, p. 3). É neste sentido que a expressão do pensamento matemático tem que ser vista como parte integrante do processo de resolução de problemas, ou seja, a obtenção de uma resposta implica criar uma explicação para a solução, pelo que resolver um problema envolve a resposta obtida e a explicação do processo seguido. Sendo então a resolução de problemas uma atividade síncrona de matematização e expressão do pensamento matemático (CARREIRA et al., 2016), importa compreender as formas como as tecnologias são usadas para resolver-e-exprimir os problemas de Matemática, assumindo que estes jovens estão imersos, social e culturalmente, num ambiente tecnológico.

2.2 Humanos-com-mídia e a perceção das possibilidades de ação com a tecnologia

Várias propostas teóricas têm sido avançadas com o fim de contribuírem para uma compreensão mais profunda da atividade do ser humano no mundo tecnológico. A contribuição teórica de Borba e Villarreal (2005), apoiada nas ideias de Lévy (1990), defende que os processos mediados por tecnologias conduzem a uma reorganização do pensamento e que o próprio conhecimento resulta de uma simbiose entre os seres humanos e a tecnologia que utilizam. Essa estreita relação origina uma nova entidade – *humanos-com-mídia* – uma metáfora que explica de que forma o pensamento matemático é reorganizado na presença de tecnologias.

Assumindo que a cognição compreende uma natureza social e coletiva, Borba e Villarreal (2005) argumentam que ela abarca igualmente as ferramentas que fazem a mediação na produção de conhecimento. Assim, as mídia são parte constitutiva do sujeito que age, não se limitando a auxiliar ou complementar essa atividade pelo que as ferramentas tecnológicas, quando usadas para comunicar, produzir ou representar ideias matemáticas, influenciam o tipo de pensamento matemático e representações que daí resultam. Assim, a introdução de uma ferramenta no sistema humanos-com-mídia impele modificações ao nível da sua atividade, i.e., o coletivo altera-se consoante o tipo de mídia que nele se integra, razão pela qual diferentes coletivos podem originar diferentes modos de pensar: o conhecimento matemático produzido por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquele que é produzido por humanos-com-GeoGebra (VILLARREAL; BORBA, 2010). Na origem destas diferenças está o reconhecimento das *affordances* da tecnologia, quer dizer, das possibilidades de executar uma ação com essa ferramenta. A expressão *affordances* designa um conjunto de particularidades atribuídas a um objeto que convidam o indivíduo a realizar

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

uma ação com ele (GIBSON, 1979). Porém, as *affordances* não são meras propriedades ou potencialidades do objeto, pelo que percecioná-las é “observar que a situação possibilita uma certa ação” (CHEMERO, 2003, p. 187). Como estas possibilidades de ação, as *affordances*, emergem das interações do indivíduo com a ferramenta, torna-se necessário designar aquilo que no indivíduo também contribui para essa interação: a sua “aptidão” (GREENO, 1994). Esta relação intrínseca traduz-se assim numa impossibilidade em separar as *affordances* da aptidão do indivíduo, isto é, não são especificáveis na ausência uma da outra, o que faz eco da noção de humanos-com-mídia.

Muito em concreto, o reconhecimento das *affordances* de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) para resolver problemas de geometria permite que as ideias e os conceitos geométricos “ganhem vida animada” ao serem manipulados, revelando o dinamismo implícito nas condições do problema. Além de alargar o espetro de abordagens, os AGD fomentam o desenvolvimento do pensamento matemático, em particular, a formulação de conjeturas, a generalização, a justificação, a demonstração (BACCAGLINI-FRANK; MARIOTTI, 2010). Estimulam a passagem de um pensamento informal e dependente do contexto (*modelo de*) para outro mais formal (*modelo para*), resultando no desenvolvimento de um modelo conceptual. Por seu lado, as construções revelam como os alunos interpretam o problema e percecionam as relações matemáticas dissimuladas (IRANZO; FORTUNY, 2011), mas também potenciam interações que influenciam o desenvolvimento de formas produtivas de pensar.

2.3 Fluência tecno-matemática para resolver problemas com tecnologias

A utilização de tecnologias em ambientes extraescolares tem recebido a atenção de alguns investigadores nos últimos anos (BARBEAU; TAYLOR, 2009). Num estudo em que procuravam mapear as capacidades matemáticas necessárias em contextos laborais, Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson e Kent (2002) identificaram uma interdependência entre as competências matemáticas dos trabalhadores e os seus conhecimentos sobre tecnologias. Surgiu assim a noção de Literacias Tecno-matemáticas como agregadora das aptidões matemáticas e tecnológicas indispensáveis às atividades específicas de cada profissão estudada. Mais tarde, essa noção veio designar o conhecimento matemático funcional ancorado num contexto laboral concreto, mediado por ferramentas tecnológicas (HOYLES; NOSS; KENT; BAKKER, 2010).

O termo “literacias” visava enfatizar as várias dimensões do conhecimento exigido no

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

âmago dos locais de trabalho contemporâneos e a atividade que vai além da manipulação de símbolos (KENT; NOSS; GUILE; HOYLES; BAKKER, 2007). Porém, o termo *fluência*, desenvolvido a propósito de "fluência tecnológica" (PAPERT; RESNICK, 1995), parece ser mais apropriado às especificidades da atividade matemática e tecnológica que decorre nos campeonatos SUB12 e SUB14. Para Barron, Martin e Roberts (2007, p. 83), a expressão "fluência" permite descrever "a capacidade para reformular conhecimento, para expressar-se criativa e apropriadamente, e produzir e gerar informação". A tecnologia pode ser encarada como uma extensão do indivíduo que é fluente tecnologicamente: aquele que é capaz de pensar e exprimir-se por meio de um dialeto digital. Este seria assim um processo transparente já que o foco é naquilo que se quer dizer e não na sua pronúncia (CROCKETT; JUKES; CHURCHES, 2012). Logo, a expressão *fluência tecno-matemática* capta tanto a relação mencionada por Hoyles et al. (2010) como a ideia de ser capaz de produzir pensamento matemático mediante a utilização de ferramentas para reformular ou criar conhecimento e expressar pensamento. A fluência tecno-matemática enfatiza a necessidade de ser fluente numa língua que engloba conhecimento matemático e tecnológico, bem como a utilização hábil de ferramentas digitais e a interpretação e comunicação eficiente da solução tecno-matemática de um dado problema.

Reconhecendo as especificidades do SUB12 e do SUB14, argumentamos que a resolução de problemas com tecnologias potencia o desenvolvimento de modelos conceptuais que emergem através da atividade de resolver-e-exprimir. Pretendemos agora ilustrar diferentes casos de jovens-com-GeoGebra a resolver-e-exprimir problemas para, partindo da análise destes dados, procurarmos evidências da fluência tecno-matemática enquanto combinação entre o pensamento matemático e o reconhecimento das possibilidades de ação com o GeoGebra.

3 Aspetos metodológicos

Tendo em consideração a natureza deste fenômeno e o propósito de compreender as abordagens dos participantes num contexto extraescolar tecnológico e social bem definido – o SUB12 e o SUB14 – esta pesquisa adota uma perspetiva interpretativa que guia o desenvolvimento de uma metodologia qualitativa (QUIVY; CAMPENHOUDT, 2008). Foram utilizadas técnicas qualitativas de recolha, organização e tratamento dos dados, que são compostos por documentos digitais que contêm as respostas para os problemas dos campeonatos enviadas pelos participantes.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

Foram selecionados dois problemas em que se verificou uma variedade de respostas produzidas com o GeoGebra. O problema *Quantos retângulos?* foi proposto no SUB12 (a jovens com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos, e o desafio consistia em encontrar uma estratégia que permitisse obter o número total de retângulos que é possível inscrever num dodecágono (Figura 1). Foram submetidas 215 soluções corretas, das quais 26 foram elaboradas com recurso ao GeoGebra. O problema *A marcação do canteiro* foi proposto no SUB14, a jovens com idades entre os 12 e os 14 anos, e centrava-se no estudo do efeito que a alteração na forma de um triângulo com determinadas caraterísticas provoca na sua área (Figura 2). De um total de 107 soluções corretas submetidas, apenas 9 concorrentes utilizaram o GeoGebra.

A esta primeira etapa da análise de dados, que consistiu em identificar e selecionar as resoluções corretas com evidências do uso do GeoGebra, seguiu-se uma outra etapa em que as soluções de cada conjunto foram organizadas segundo a estratégia geral usada pelos concorrentes. Foi possível encontrar três abordagens suficientemente distintas para cada problema, pelo que se selecionou uma resolução representativa de cada estratégia encontrada para uma análise aprofundada tendo como suporte as noções teóricas discutidas. As seis soluções que serão alvo dessa análise foram produzidas por participantes ou equipes de participantes com o recurso ao GeoGebra. Os dados consistem precisamente nos ficheiros produzidos neste AGD, sendo que alguns concorrentes submeteram ainda um texto escrito com as suas explicações. Uma concorrente submeteu também uma imagem com uma fotografia do seu ambiente de trabalho com o GeoGebra.

Quantos são?

Quantos retângulos consegues construir dentro do polígono da figura, unindo vértices?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!

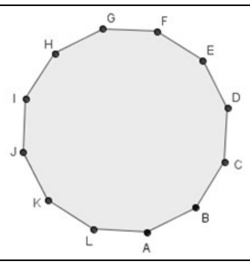


Figura 1 – Enunciado do Problema 3
Fonte: SUB12 (edição 2012/2013)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

A marcação do canteiro

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim retangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do retângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH]. No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do retângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]). Quando lá chegou, o jardineiro protestou dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!

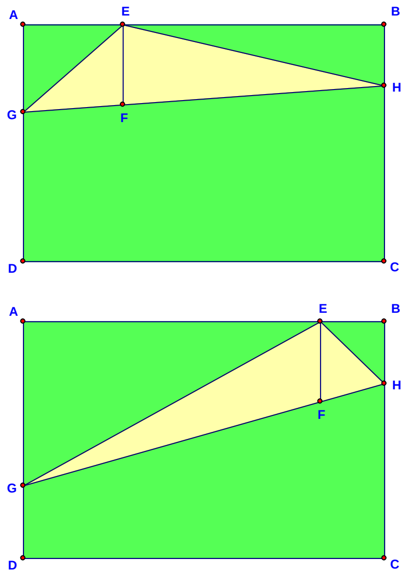


Figura 2 – Enunciado do Problema 6
Fonte: SUB14 (edição 2010/2011)

A análise das soluções, essencialmente interpretativa, tem o principal intuito de procurar evidências que ilustrem a interligação entre o conhecimento matemático e o conhecimento da ferramenta, através da descrição do desenvolvimento dos modelos conceptuais subjacentes a cada solução. O “Protocolo de Construção”, uma ferramenta do GeoGebra, assume grande relevância nesta análise pois faculta o acesso à atividade que os participantes desenvolveram no GeoGebra durante a elaboração das construções, permitindo uma descrição passo a passo das suas interações com o programa. Convém ressalvar que o “Protocolo de Construção” não permite captar outros processos cognitivos (e.g., conjeturas ou cálculos mentais), nem outros procedimentos que possam ter sido usados (e.g., papel-e-lápis ou outra tecnologia). Todavia, esta ferramenta possibilita observar a ordem de construção dos objetos incluídos em cada solução, pelo que é sobre esses procedimentos e no reconhecimento da sua pertinência e adequação para a obtenção da solução de cada problema que se debruça esta análise.

4 Dados e resultados

4.1 Resolver-e-exprimir o problema ‘Quantos retângulos?’

4.1.1 Fixar o tipo de retângulo e exibir todos

David enviou um ficheiro GGB onde se podem ver três polígonos regulares, cada um

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

com um certo número de retângulos inscritos (Figura 3). Analisando o protocolo de construção, observa-se que David começou por marcar os pontos A e B no plano e através da ferramenta “polígono regular” construiu um dodecágono. Em seguida, utilizando a ferramenta “polígono”, construiu todos os retângulos cujo lado menor coincide com o lado do dodecágono – doravante designados por “retângulos de tipo 1”. Em algum momento do processo, que não é possível precisar, optou por mudar a cor de cada quadrilátero recorrendo às “propriedades dos objetos”.

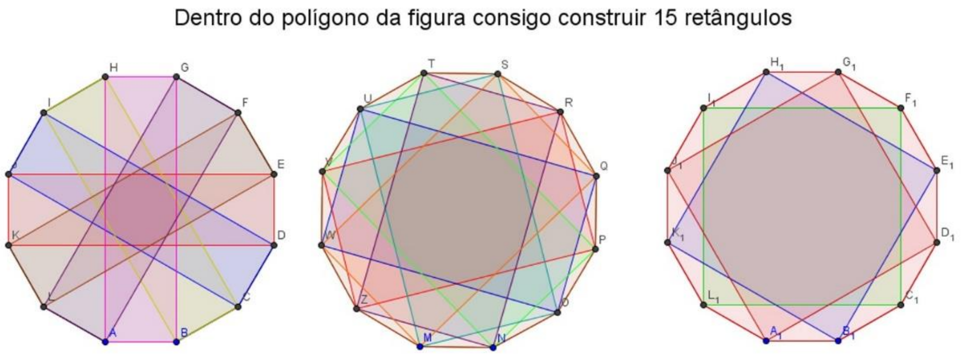


Figura 3 – Solução enviada por David (6.º ano)
Fonte: SUB12 (edição 2012/2013)

Ao lado, marcou mais dois pontos, M e N, e por eles representou outro polígono regular com doze lados. Iniciou a construção de “retângulos de tipo 2” cujo lado menor coincide com o segmento de reta que une um ponto com o que se segue a outro, interpolado. Coloriu também estes retângulos, recorrendo às suas propriedades. Procedeu depois de modo idêntico para o terceiro conjunto de construções até obter todos os “retângulos de tipo 3”, ou seja, aqueles em que o lado menor coincide com o segmento que une um ponto e o que se segue a dois pontos interpolados – neste caso, quadrados – e alterou a sua cor. Por fim, recorreu à ferramenta “inserir texto” e digitou a resposta: naquelas condições foi possível construir um total de 15 retângulos.

Esta forma de olhar matematicamente o problema encerra um modelo conceptual que se organiza em torno de cada um dos três tipos de retângulos que é possível construir. Em cada passo, o jovem fixa um desses tipos e concretiza-o de forma sistemática, reconhecendo uma certa diversidade de *affordances* do GeoGebra que é evidenciada pela construção de polígonos regulares a partir de dois pontos, pela construção de polígonos conhecendo os seus vértices, mas também porque altera as cores desses entes geométricos. Este modelo conceptual está muito próximo do contexto apresentado, pois baseia-se na representação exaustiva de todos os casos possíveis e culmina numa contagem para obter a solução final.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

4.1.2 Fixar um par de vértices opostos e exibir todos

Débora e Isabel resolveram o problema no GeoGebra (Figura 4) marcando os pontos A e B, e construindo o dodecágono utilizando a ferramenta “polígono regular”. Como as próprias referem, copiaram e colaram[1] esse polígono cinco vezes e iniciaram a representação de retângulos no primeiro, fixando um vértice (H) e o vértice diametralmente oposto (B). Representaram o retângulo de lado HG, continuando as construções no sentido do ponteiro dos relógios. Acedendo às propriedades de cada retângulo alteraram a sua cor e a espessura dos lados. A legenda desse primeiro dodecágono foi incluída com a opção “inserir texto”. No dodecágono à direita, repetiram o processo, centrando-se agora nos vértices G_1 e A_1. No final observaram que o retângulo seguinte já havia sido representado no primeiro polígono, pelo que não o incluíram e mantiveram as quatro possibilidades, alterando a cor e a espessura dos lados destes. Continuaram este processo de representação, formatação e registro.

Esse modelo conceptual baseia-se na ideia de fixar um par de vértices opostos e representar todos os retângulos que passam por eles. Ao manterem esta estratégia organizada, as jovens conseguem excluir os retângulos que já foram considerados, o que lhes permite sistematizar a contagem. As *affordances* do GeoGebra suportam a rápida representação dos 5 retângulos, dos 4 seguintes e assim por diante, favorecendo a sua distinção através da cor. As descrições detalhadas que acompanham cada construção também integram o modelo conceptual e revelam a simultaneidade entre o resolver e o exprimir a solução. Além de darem sentido a cada produção, funcionam como alavanca que permite um olhar mais compreensivo, um pensamento matemático que se materializa no padrão que registram na sua resposta, e cuja representação está associada à experimentação e à observação: 5+4+3+2+1=15.

[1] As opções que permitem “copiar” e “colar” um objeto, muito habituais em outros programas informáticos de uso comum, por exemplo, no ambiente Windows, foram incluídas no GeoGebra a partir da sua versão 4.0.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

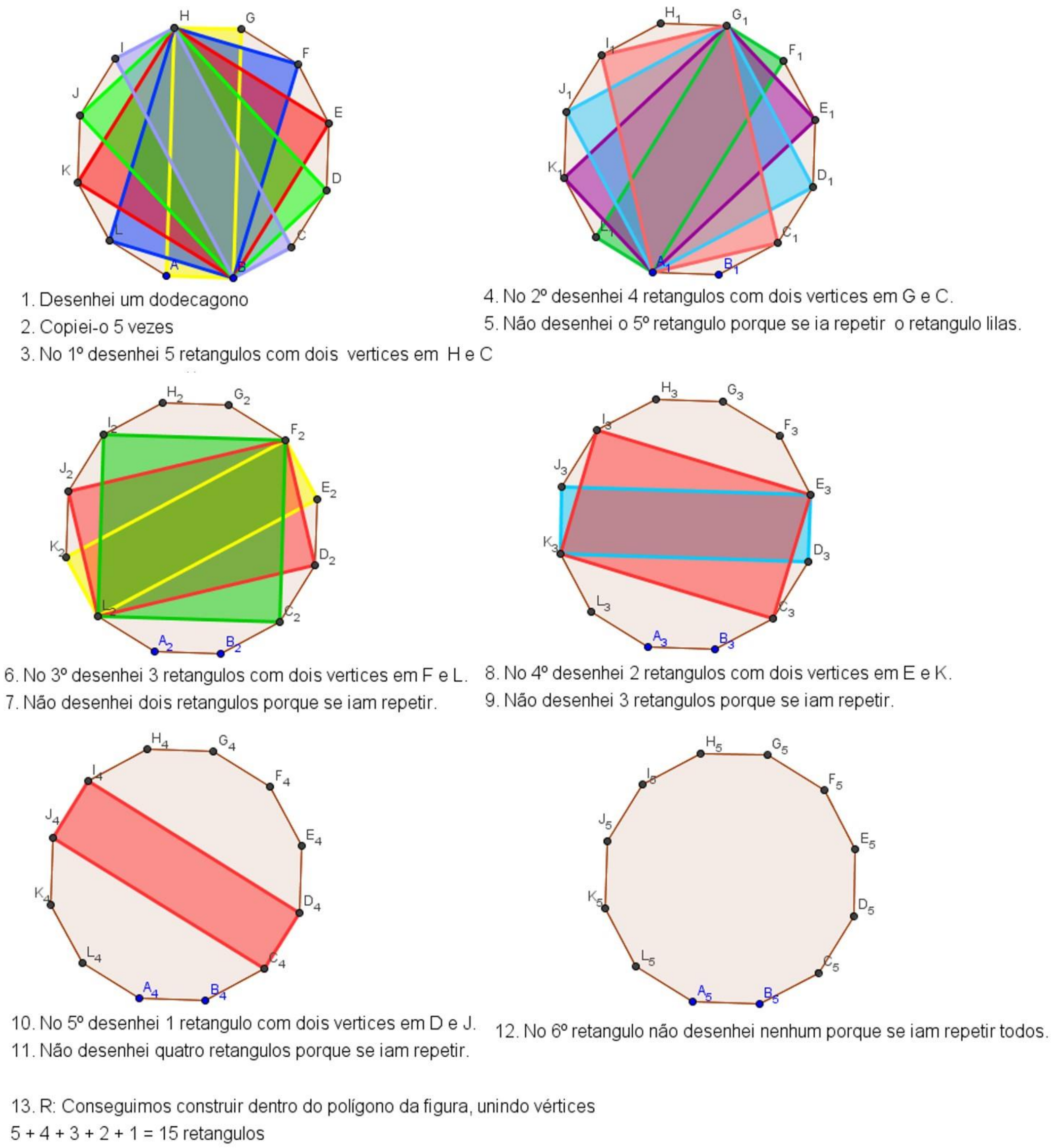


Figura 4 – Solução enviada por Débora e Isabel (5.º ano)
Fonte: SUB12 (edição 2012/2013)

4.1.3 Fixar um vértice e generalizar

A abordagem de Greg (Figura 5) destaca-se, de imediato, por não apresentar exaustivamente todos os retângulos. O jovem começou por marcar dois pontos no plano, A e B, e a partir deles construiu um “polígono regular” de doze lados recorrendo às ferramentas do GeoGebra. Em seguida representou o retângulo [ABGH] e todos os outros que têm vértice no ponto A, no sentido anti-horário e alterou as suas cores através das “propriedades dos objetos”. Esta primeira abordagem ao problema parece levar Greg a visualizar uma forma de obter a solução sem construir todos os retângulos. Tal como explica no texto inserido, observou que o polígono tem 12 vértices e que por cada vértice é possível construir 5

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

retângulos, daqui conjeturando que iria obter um total de 60 retângulos. Como cada retângulo tem 4 vértices inscritos no polígono, existem conjuntos de 4 retângulos que representam um único. Assim, torna-se necessário dividir o total encontrado, 60, por 4 para obter o número de retângulos diferentes que se podem inscrever nos vértices de um dodecágono, isto é, 15.

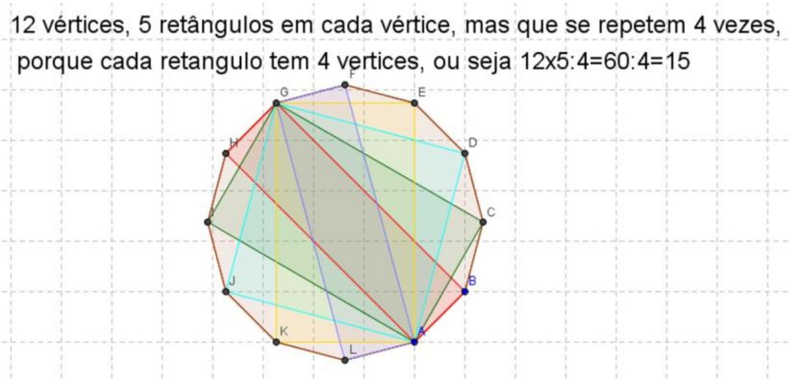


Figura 5 – Solução enviada por Greg (6.º ano)
Fonte: SUB12 (edição 2012/2013)

Este modelo conceptual também combina esquemas com inscrições textuais e matemáticas. Mas a estratégia difere das anteriores por não se basear numa listagem exaustiva dos casos possíveis, ou seja, a construção (que revela o reconhecimento de *affordances* fundamentais) favorece sobretudo uma materialização da situação, uma primeira experiência com os dados do problema que pode ser considerada um modelo deste contexto específico. Todavia, e apesar de revelar uma matematização ainda elementar, este "modelo de" parece ser o responsável pelo desencadeamento de um pensamento matemático mais elaborado, perspetivando-se uma compreensão mais aprofundada, quase uma generalização, que visa obter a solução e simultaneamente encontrar argumentos matemáticos que a justifiquem.

4.2 Resolver-e-exprimir o problema "A marcação do canteiro"

4.2.1 O GeoGebra para obter a solução

Marta e Miguel representaram o jardim retangular a partir da construção do segmento AB, recorrendo à marcação de retas perpendiculares e paralelas e suas interseções (Figura 6). O retângulo foi obtido através da construção dos seus lados sobre as retas sendo que estas foram escondidas com recurso à ferramenta "Mostrar objetos". Em seguida, reproduziram as três condições do enunciado: a vara com comprimento 2 (segmento FG) é construída sobre uma reta perpendicular ao lado AD do retângulo, passando no ponto F, e a "fio" que passa pelo extremo da vara, intersectando-a no ponto G. Fixaram a distância entre F e G, isto é, o comprimento da vara, através da construção de uma circunferência com centro em F e raio definido com comprimento 2 recorrendo à fermenta "Circunferência (Centro, Raio)". Em

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

seguida, construíram os triângulos JGF e FGI que resultam da divisão do canteiro triangular pela vara, e alteraram a sua cor através das “Propriedades dos objetos”, possivelmente para tornar visível a sua importância para obter a solução. Determinaram depois a área de cada um dos triângulos menores e a área do canteiro triangular, a “área total”. Ao arrastar o ponto F é possível verificar que essa área total não se altera, pelo que se observa a invariância da área do canteiro triangular. Na resposta submetida apenas indicaram que Rosa tinha razão.

Esse modelo conceptual está ancorado na atividade de construção, medição e manipulação da figura, e o seu desenvolvimento é impelido pelo facto de estes jovens estarem familiarizados com uma diversidade de *affordances* do GeoGebra. A sua abordagem revela uma matematização horizontal em que a organização e o desenvolvimento de um “modelo de” leva a que os conceitos elementares ganhem “vida própria” através do dinamismo conferido pelo GeoGebra. Estes jovens não apresentaram qualquer justificação para a invariância da área, o que sugere que poderão ter ficado conformados com uma “indubitável certeza” alcançada com o arrastamento do vértice F. O papel do GeoGebra consiste em dar vida ao modelo conceptual que suportou o processo de resolução com o propósito de obter a solução.

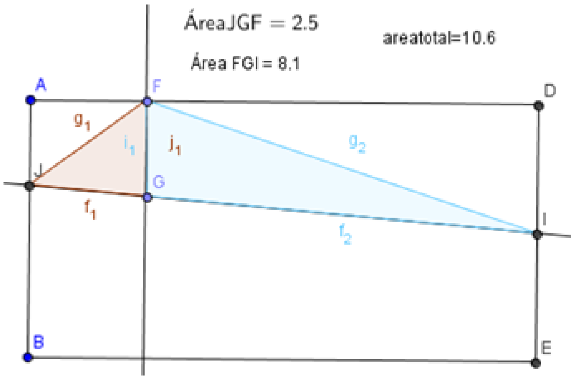


Figura 6 – Solução enviada por Marta e Miguel (7.º ano)
Fonte: SUB14 (edição 2010/2011)

4.2.2 O GeoGebra para confirmar a solução

A solução de Sara compreende um pequeno texto e uma imagem com a captura de tela que contém as figuras construídas no GeoGebra (Figura 7). No *e-mail* explicou [sic]:

> *A senhora Rosa é quem tem razão, a area dos triangulos é a mesma. Fui imaginar que o rectangulo tinha 12 cm de largura, a formula da area de um triangulo é base × altura a dividir por dois. No primeiro triangulo a area é 12, porque a sua base é 12, 12×2=24 e 24 a dividir por 2 vai dar 12. Area=12.*
> *No segundo dividi-o em dois triangulos, onde calculei a area de cada um e depois somei e voltaria a dar 12, desenhei uma linha recta correspondente a area de cada parte do triangulo que dividi em dois, depois juntando as duas rectas, com uma regua medi e dava 12, concluindo assim que era verdade.* (Fonte: SUB14, edição 2010/2011)

A jovem “imaginou” que o retângulo tinha um comprimento de 12cm para construir uma representação do jardim e do canteiro de flores, respeitando as condições dadas. Na

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

figura à esquerda, Sara determinou a área do canteiro triangular ao considerar que a sua base é paralela ao lado maior do retângulo. A construção à direita revela uma intenção em justificar o resultado anterior, é a sua tentativa em compreender matematicamente a invariância da área. Percebendo que a vara corresponderá à base de cada um dos triângulos menores, representa as suas alturas através de dois segmentos que acrescentou à construção, a_1 e b_1. Verifica depois que ao "juntar" os dois segmentos, isto é, as alturas dos triângulos menores, obtém o comprimento do jardim retangular. Como as medidas dos comprimentos dos segmentos são iguais às das áreas, a área do canteiro triangular será sempre 12, independentemente da posição da vara.

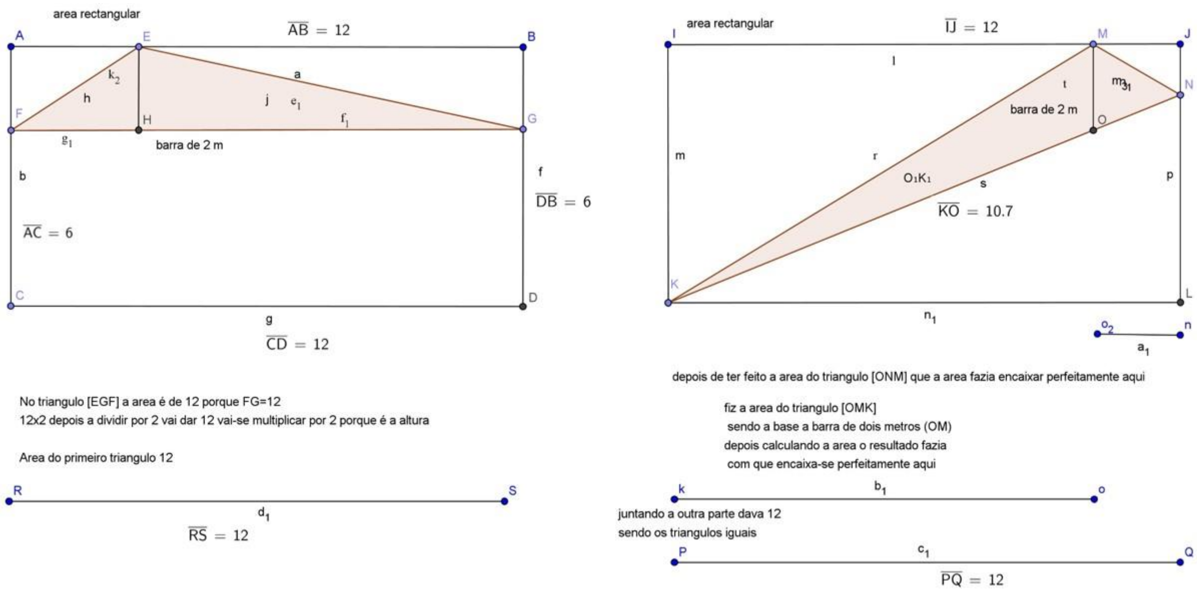


Figura 7 – Solução enviada por Sara (7.º ano)
Fonte: SUB14 (edição 2010/2011)

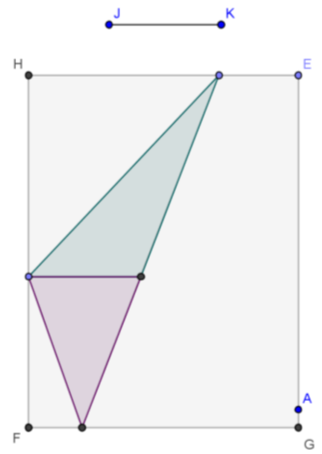
Sara reconhece várias *affordances* do GeoGebra para obter um modelo conceptual de um caso particular desta situação. A solução que encontra é específica pois o modelo apenas diz respeito ao caso concreto em análise. Todavia, na segunda parte da solução, Sara recorre ao GeoGebra para encontrar uma justificação convincente, percebendo a necessidade de validar matematicamente o que observa. Surgindo de uma matematização elementar, o modelo parece desenvolver-se em duas etapas: primeiro, o GeoGebra é usado para representar, manipular e verificar; em seguida, é usado para conceber uma representação que visa uma justificação matemática que, embora baseada num caso particular, quase se pode considerar uma prova geométrica. Aqui, o GeoGebra é utilizado com a intenção de confirmar a solução.

4.2.3 O GeoGebra para explorar a solução

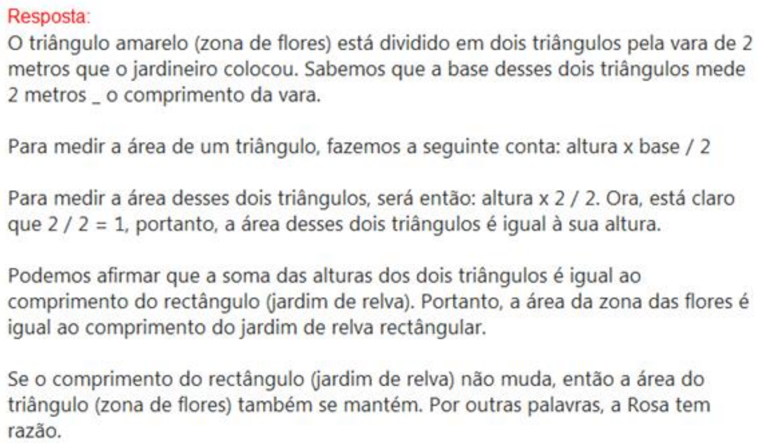
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

Jéssica utilizou o GeoGebra para simular a construção mencionada no problema (Figura 8a) e enviou um texto em que explica a sua solução (Figura 8b). Utilizando retas perpendiculares e suas interseções, obteve o retângulo que suporta os restantes objetos. Os pontos A e E são livres, o que permite manipular as dimensões do jardim. Em seguida, construiu o segmento exterior JK e da sua medida fez depender o comprimento da vara, utilizando a ferramenta “Circunferência (Centro, raio)”. O segmento JK, não mencionado no problema, é um novo elemento geométrico criado por Jéssica que quase simula a ferramenta “Seletor”.

A jovem prosseguiu a construção do canteiro triangular criando pontos, linhas retas, segmentos e, por fim, o polígono que representa o canteiro de flores. Construiu dois triângulos menores que resultam da divisão do canteiro pela vara e alterou as suas cores, diferenciando-os, o que indicia a sua perceção de que a área não se vai alterar à medida que posição da vara varie. No seu texto, a jovem prova que a área é invariante: ao considerar que o canteiro é composto pelos dois triângulos menores e ao assumir que a vara corresponde à base de cada um deles, determinando as suas áreas irá obter um valor correspondente às suas alturas. Ora, somadas as duas alturas, irá sempre obter o comprimento do retângulo, pelo que a posição da vara se pode alterar sem que a área do canteiro de flores se modifique.



(a) – Construção no GeoGebra



Resposta:

O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2

Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.

Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.

Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

(b) – Explicação escrita e enviada por *e-mail*

Figura 8 – Solução enviada por Jéssica (7.º ano)
Fonte: SUB14 (edição 2010/2011)

Mais do que com o intuito de medir ou calcular, esta construção em GeoGebra é feita com a perspetiva das propriedades geométricas e das relações que as condições do enunciado impõem. A relação quantitativa que Jéssica explica no seu texto surge numa representação geométrica poderosa que faz um convite à manipulação e, consequentemente, à generalização. Além disso, a inserção do segmento JK permite alterar a dimensão da vara, ou seja, remete para a análise de uma variável que não surge no enunciado do problema. Considera-se que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

esta utilização do GeoGebra revela uma intenção de explorar a solução do problema.

5 Discussão

Neste artigo documentamos as abordagens matemáticas de jovens, com idades entre os 10 e os 14 anos, participantes numa competição extraescolar em que lhes é permitido recorrer a qualquer tipo de ferramenta tecnológica para resolver e exprimir as soluções de problemas colocados na fase de apuramento. As soluções analisadas mostram uma diversidade de abordagens, apesar de estes participantes terem escolhido livre e voluntariamente a mesma ferramenta, o GeoGebra, para desenvolver as suas soluções. Esta multiplicidade de resoluções digitais deixa perceber um grande "à vontade" destes jovens com esta ferramenta tecnológica: todos constroem figuras, exploram propriedades, visualizam e reconhecem padrões. Fica também patente a existência de diferenças profundas em termos da sofisticação das abordagens e das soluções encontradas, embora todos os participantes tenham desenvolvido modelos conceptuais eficazes no sentido em que todos conseguiram resolver os problemas.

5.1 Jovens-com-GeoGebra desenvolvendo modelos conceptuais

O recurso ao GeoGebra para resolver cada um dos problemas, uma escolha livre, mas intencional, revela que estes jovens consideram que esta é a ferramenta mais adequada para experimentar, resolver ou exprimir ações que, de alguma forma, não encontram paralelo noutras ferramentas. Esta opção pode encontrar justificação no duplo papel que a ferramenta desempenha: primeiro, o GeoGebra suporta a "materialização" da situação problemática, favorecendo o aprofundamento da compreensão daquilo que o problema envolve; em seguida, com base nessa corporização, emerge uma matematização que sustenta a estratégia e a obtenção da solução, isto é, o desenvolvimento gradual de um modelo conceptual que sustenta a resposta.

A construção de um polígono regular de 12 lados pode ser uma tarefa exigente e morosa, consoante as ferramentas usadas, mas simplifica-se drasticamente com o GeoGebra, dado que basta indicar dois pontos e o número de lados. O mesmo sucede com a representação do jardim retangular e do canteiro de flores. As regras de geometria euclidiana incorporadas no programa garantem que cada construção seja robusta, ou seja, ainda que se faça variar as dimensões das figuras, o polígono mantém-se regular e com 12 lados, enquanto o quadrilátero e o triângulo vão manter as características com que foram construídos. De igual

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

modo, a representação dos vários retângulos no primeiro caso reduz-se a uma tarefa simples com o GeoGebra: a ferramenta “Polígono” é de construção livre, mas é possível visualizar rapidamente se a escolha de vértices corresponde a um retângulo. Por outro lado, a quantidade de figuras sobrepostas pode impedir uma leitura clara e imediata da abordagem, pelo que o recurso às “Propriedades dos objetos” permite alterar a cor ou a espessura dos seus lados. O “polígono estrelado” que surge desse realce pode impelir a identificação de um padrão visual, favorecendo uma contagem organizada dos retângulos. A forma como organizam, identificam e separam as diferentes construções indicia que o *resolver* e o *exprimir* a solução são intencionalmente simultâneos.

No segundo problema, a robustez da construção – indispensável à perceção da invariância da área do canteiro – é conseguida mediante o recurso às propriedades dos quadriláteros (conhecimento matemático) e da perceção de como essas propriedades se efetivam no GeoGebra (conhecimento da tecnologia). À marcação de pontos livres, sucede-se a representação de retas paralelas e perpendiculares, circunferências que passam por um dado centro e com um certo raio, construção de polígonos e determinação de áreas. Estes jovens também recorrem às “propriedades dos objetos” para alterar as cores de elementos das suas construções e assim expressar que visualizam a divisão do canteiro em dois triângulos que partilham a mesma base, a vara. Utilizam ainda a ferramenta “Mostrar objetos” para limpar as construções, ou seja, para esconder os objetos geométricos que são indispensáveis à manutenção da robustez da construção mas deixam de ser necessários para exprimir a solução.

Estas produções põem a descoberto a atividade de matematização destes jovens-com-GeoGebra no sentido em que são capazes de percecionar a adequação e utilidade desta ferramenta, e conseguem tirar partido dela com eficácia não só para desenvolver uma solução como também para exprimi-la. Ilustram ainda como as construções empreendidas impelem e determinam uma estratégia de matematização. No problema *Quantos são?*, o fixar o tipo de retângulo e encontrar todas as figuras leva o primeiro jovem a explicar a solução através da adição 6+6+3, pelo que a visualização conduz à solução; o fixar dois vértices opostos e determinar todas as possibilidades leva as duas jovens a identificar um padrão e a solução surge da adição 5+4+3+2+1, isto é, visualizam para observar e descrever; enquanto o fixar um vértice, experimentar e generalizar conduz o último jovem a outra estrutura matemática: 12x5:4, isto é, visualiza um caso particular para fazer uma previsão, para imaginar a solução do problema.

Nas soluções do problema *A marcação do canteiro*, o GeoGebra é usado para construir uma representação do jardim e do canteiro de flores; para arrastar pontos móveis, analisar, verificar e concluir sobre a invariância da área. Contudo, num caso o AGD apenas suporta a construção e a medição, pelo que a constatação da invariância da área surge com o arrastar do ponto móvel e a observação da alteração no formato dos dois triângulos interiores. Noutro, o AGD é utilizado para reproduzir as figuras, mas é encetada uma nova construção para mostrar geometricamente a invariância da área estudada no caso particular. E a última jovem representa a situação sem que haja evidência de ter recorrido a medições pelo que o arrastamento do ponto móvel terá espoletado a decomposição do triângulo e, consequentemente, a manipulação algébrica da variável “altura” de cada triângulo menor. Esta estratégia encerra uma matematização vertical em que é desenvolvida uma prova textual que valida a conjetura.

Estes jovens percecionam as *affordances* do GeoGebra enquanto criam modelos das situações apresentadas. Em alguns casos, o modelo está tão próximo do contexto que põe a descoberto todos os casos possíveis ou apoia-se na medição e na manipulação da figura; são *modelos de* em que os jovens fazem uma matematização horizontal, bastante elementar e suportada na observação. Porém, os dados ainda mostram que o reconhecimento das *affordances* começa por potenciar o desenvolvimento de um *modelo de*, mas motiva a procura de uma justificação para a solução, com a tentativa de encontrar um padrão ou apresentar uma explicação geométrica. Noutros casos, a experiência inicial pode ser considerada como a procura de uma possibilidade de generalizar a solução, que ganha contornos de um *modelo para*, ou seja, de uma estrutura mais formal que permite obter a solução sem listar todas as possibilidades ou demonstrando a invariância da área.

As estruturas matemáticas desenvolvidas nesta atividade de resolver-e-exprimir diferem bastante, pelo que isto pode ser entendido também em diferentes graus de sofisticação no uso de conhecimento matemático e tecnológico. Embora partindo sempre de um uso como uma *ferramenta-para-construir*, em alguns casos o GeoGebra assume um papel de *ferramenta-para-medir*, enquanto noutros se transforma numa *ferramenta-para-pensar*. Adiante discutiremos os níveis de sofisticação emergentes da conjugação entre conhecimentos matemáticos e tecnológicos para resolver-e-exprimir estes problemas.

5.2 Fluência tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra

Apesar de o GeoGebra *convidar* todos os participantes a um conjunto idêntico de *possibilidades de ação*, as ações que desenvolvem têm características diferentes e favorecem

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

modelos conceptuais distintos. Esta distinção está ancorada na capacidade em percecionar a adequação das *affordances* da ferramenta ao desenvolvimento de um modelo conceptual, isto é, em perceber formas úteis de combinar conhecimentos sobre o GeoGebra (usar ferramentas euclidianas, definir propriedades dos objetos, construir objetos dependentes, arrastar) com conhecimentos matemáticos (factos, fórmulas, procedimentos) para obter uma solução.

Um nível mais elementar de fluência tecno-matemática está patente nas soluções de David, Marta e Miguel, que empregam conhecimentos matemáticos e tecnológicos de forma concomitante para efetuar construções robustas e encontrar uma abordagem para obter a solução. A perceção das *affordances* do GeoGebra assume um papel crucial na identificação da abordagem (e.g., organizar sistematicamente todas as soluções; determinar áreas, arrastar um ponto, observar a invariância da área) e conduz ao desenvolvimento de modelos conceptuais rudimentares, bastante próximos do contexto e nos quais prevalece uma matematização horizontal (*modelos de*). A fluência tecno-matemática destes jovens manifesta-se na utilização do GeoGebra e dos conhecimentos matemáticos indispensáveis à obtenção da solução.

Um nível intermédio de fluência tecno-matemática, presente nas produções de Débora e Isabel, e Sara, caracteriza-se pela utilização de conhecimentos matemáticos e tecnológicos, percecionando formas de os combinar para obter a resposta aos problemas e ainda ensaiar uma justificação matemática. Nessa atividade são desenvolvidos modelos conceptuais ainda elementares, suportados na visualização de todas as soluções ou no uso de casos particulares, embora exista já uma intencionalidade em encontrar uma justificação matemática. Embora estes modelos conceptuais sejam bastante dependentes do contexto, a matematização assume um grau de sofisticação maior: Débora e Isabel põem a descoberto a existência de um padrão numérico; e Sara empreende uma nova construção como prova geométrica do caso particular. A sua fluência tecno-matemática manifesta-se na utilização do GeoGebra e de conhecimentos matemáticos para encontrar a solução e explicá-la de um ponto de vista matemático.

Um nível elevado de fluência tecno-matemática, que se revela nas resoluções de Greg e Jéssica, evidencia-se pela utilização simultânea de conhecimentos matemáticos e tecnológicos para efetuar construções robustas, percecionar como podem conduzir às soluções, para formular conjeturas sobre as soluções idealizadas e ensaiar uma prova matemática. Os modelos conceptuais desenvolvidos afastam-se da visualização de casos particulares e aproximam-se do mundo da abstração, revelando traços de uma matematização vertical. Numa solução, a exibição de um caso particular suscita uma generalização, pelo que o *modelo de* é transformado num *modelo para* obter e simultaneamente explicar a solução. Na outra solução, o *modelo de* desencadeia o tratamento algébrico e transforma-se num *modelo para* provar a invariância da área num qualquer caso. A fluência tecno-matemática manifesta-se na utilização do GeoGebra e de conhecimentos matemáticos para encontrar a solução e fazer prova da sua veracidade.

6 Considerações finais

Nesta pesquisa procuramos caracterizar os modelos conceptuais desenvolvidos a partir da atividade de resolução-e-expressão de problemas de matemática com o GeoGebra num contexto extraescolar. Os dados mostram que os jovens usam o GeoGebra de forma voluntária e com diferentes propósitos para resolver problemas matemáticos – desde estruturar, suportar, a amplificar o pensamento matemático – pelo que se pode afirmar que esta tecnologia altera e reconfigura os processos de resolução de problemas de Matemática que decorrem no âmbito das competições SUB12 e SUB14.

As diferenças identificadas ao nível da sofisticação dos modelos conceptuais encontram explicação na capacidade dos jovens percecionarem as *affordances* do GeoGebra, efetivamente úteis ao desenvolvimento de uma abordagem que permita obter a solução de cada problema. Isto implica estabelecer as conexões adequadas entre os recursos matemáticos disponíveis e o conhecimento matemático embutido no GeoGebra para criar uma solução tecno-matemática. Em linha com trabalhos anteriores, a fluência tecno-matemática para resolver problemas emerge da atividade de resolução-e-expressão de problemas com tecnologias, em particular, com o GeoGebra. Manifesta-se através de um "à vontade" com o GeoGebra e na forma como o pensamento matemático flui e é moldado pelo programa, na forma como o pensamento tecno-matemático é desenvolvido. Este tipo de fluência assenta na capacidade para combinar de forma eficaz dois tipos de conhecimento – matemático e tecnológico – essenciais ao desenvolvimento de novas formas de conhecer, compreender e comunicar, recorrendo a um tipo de discurso que também pode ser apelidado de discurso tecno-matemático (CARREIRA et al., 2016).

Referências

ARTIGUE, M. Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 5, 2007, Larnaca. **Proceedings…** Larnaca: ERME, 2007. p. 68-82.

BACCAGLINI-FRANK, A.; MARIOTTI, M. A. Generating conjectures in dynamic geometry: the

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

maintaining dragging model. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Dordrecht, n. 15, p. 225-253, 2010.

BARBEAU, E.; TAYLOR, P. **Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom**: the 16th ICMI Study. 1.ª ed. New York: Springer, 2009. 336 p.

BARRON, B.; MARTIN, C.; ROBERTS, E. Sparking self-sustained learning: report on a design experiment to build technological fluency and bridge divides. **International Journal of Technology and Design Education**: online, v. 17, n. 1, p. 75-105, 2007.

BORBA, M.; VILLARREAL. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**. 1.ª ed. New York: Springer, 2005. 229 p.

CARREIRA, S. et al. **Youngsters Solving Mathematical Problems With Technology:** the results and implications of the Problem@Web Project. 1.ª ed. New York: Springer, 2016. 255 p.

CHEMERO, A. An outline of a theory of affordances. **Ecological Psychology**, London, v. 15, n. 2, p. 181-195, 2003.

CROCKETT, L.; JUKES, I.; CHURCHES, A. **Literacy Is NOT Enough**: 21st Century Fluencies for the Digital Age. 1.ª ed. New York: Ed. Corwin Press, 2012. 232 p.

ENGLISH, L.; LESH, R.; FENNEWALD, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 11, 2008, Monterrey. **Proceedings**… Monterrey: ICMI. p. 46-58. Disponível em: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~rptec/Sitio_web/Documentos_files/tsg19icme11.pdf >. Acesso em: 10 jan. 2016.

ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of Mathematics Education**. Berlin: Ed. Springer, 2010. p. 263-290.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational Task**. 1.ª ed. Dordrecht: Reidel, 1973. 680 p.

GIBSON, J. The Theory of Affordances. In: SHAW, R.; BRANSFORD, J. (Ed.). **Perceiving, Acting, and Knowing:** toward an ecological psychology. Hillsdale: Ed. Erlbaum, 1979. p. 67-82.

GRAVEMEIJER, K. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: SANTOS, L.; CANAVARRO, A.; BROCARDO, J. (Ed.). **Educação Matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: Ed. APM, 2005. p. 83-101.

GREENO, J. Gibson's Affordances. **Psychological Review**, Washington, v. 101, n. 2, p. 336-342. 1994.

HOYLES, C.; NOSS, R.; KENT, P.; BAKKER. A. **Improving Mathematics at Work:** the need for techno-mathematical literacies. 1.ª ed. London: Routledge, 2010. 210 p.

HOYLES, C. et al. **Mathematical Skills in the Workplace**: final report to the science technology and mathematics council. 1.ª ed. London: Institute of Education/ University of London/ Science, Technology and Mathematics Council, 2002. 93 p.

IRANZO, N.; FORTUNY, J. Influence of GeoGebra on problem solving strategies. In: BU, L.; SCHOEN, R. (Eds.). **Model-Centered Learning:** pathways to mathematical understanding using GeoGebra. Rotterdam: Ed. Sense Publishers, 2011. p. 91-104.

JACINTO, H. '**Tenho Que Resolver, Vou Arranjar Maneira!**': a internet e a actividade matemática

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

no caso do Sub14. 1.ª ed. Lisboa: APM, 2008. 199 p.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Beyond-school mathematical problem solving: a case of students-with-media. In: PME, 37, 2013, Kiel. **Proceedings**… Kiel: PME, 2013. p. 105-112.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Mathematical problem solving with technology: the techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. **International Journal of Science and Mathematics Education**: First Online, Taiwan, 28 março, 2016, p. 1-22, 2016. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-016-9728-8>. Acesso em: 20 abr. 2016

KENT, P. et al. Characterizing the use of mathematical knowledge in boundary-crossing situations at work. **Mind, Culture, and Activity**, London, v. 14, n. 1-2, p. 64-82, 2007.

LESH, R. Beyond constructivism: identifying mathematical abilities that are most needed for success beyond school in an age of information. **Mathematics Education Research Journal**, Sydney, v. 12, n. 3, p. 177-195, 2000.

LESH, R.; DOERR, H. Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In: ____ (Ed.). **Beyond Constructivism:** models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah: Ed. Erlbaum, 2003. p. 3-33.

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. Problem solving and modeling. In: LESTER, F. (Ed.). **The Handbook of Research on Mathematics Education**. Charlotte: Ed. Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics, 2007. p. 763-804.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: O futuro do pensamento na era da informática. 1.ª ed. Lisboa: Instituto Piaget, 1990. 263 p.

PAPERT, S.; RESNICK, M. **Technological Fluency and the Representation of Knowledge.** Proposal to the national science foundation. Massachusetts Institute of Technology, 1995. Disponível em: <http://grantome.com/grant/NSF/DRL-9553474>. Acesso em: 10 mar. 2016.

QUIVY, R.; CAMPENHOUDT, L. **Manual de Investigação em Ciências Sociais**. 5.ª ed. Lisboa: Gradiva, 2008. 282 p.

TREFFERS, A. **Three Dimensions, a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education**. 1.ª ed. Dordrecht: Reidel, 1987. 296 p.

VILLARREAL, M.; BORBA, M. Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. **ZDM**, Berlin, v. 42, n. 1, p. 49-62, 2010.

Submetido em Abril de 2016.
Aprovado em Outubro de 2016.