ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

Generalização Teórica e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: contribuições para a formação de professores dos Anos Iniciais

Theoretical Generalization and the Development of Algebraic Thinking: contributions to Early Years' teacher education

Vanessa Dias **Moretti**[*]

ORCID iD 0000-0003-2435-5773

Wellington Pereira das **Virgens**[**]

ORCID iD 0000-0003-0491-0012

Iraji de Oliveira **Romeiro**[***]

ORCID iD 0000-0002-1633-9872

Resumo

O conhecimento algébrico nos Anos Iniciais tem sido tema de interesse em pesquisas no âmbito nacional e internacional, frente ao desafio que representa a transição do pensamento aritmético para o algébrico. Diante dessa realidade, o presente artigo discute aspectos teóricos do desenvolvimento do pensamento algébrico, com foco na formação continuada de professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais. À luz da Teoria Histórico-Cultural, apresentamos a concepção de pensamento algébrico como o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos. Nesse percurso, discutimos o conceito de generalização a partir de Davidov e de camadas de generalidade em Radford. Assumindo que a solução para o problema da álgebra nos Anos Iniciais passa pela formação de professores, entendemos que é fundamental que o professor também reconheça, em processos formativos, o uso de recursos semióticos para comunicar o seu pensamento algébrico. Nesse sentido, analisamos uma proposta de situação desencadeadora para a formação de professores e discutimos suas potencialidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Concluímos que acompanhar o movimento da generalização substancial e o trabalho analítico com quantidades indeterminadas pode trazer importantes contribuições para a organização da atividade pedagógica que tenha por objetivo superar o pensamento puramente aritmético na objetivação do pensamento algébrico, compreendido como pensamento teórico mediado por conceitos algébricos em um específico sistema semiótico de significação cultural.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais. Generalização. Pensamento Teórico. Teoria Histórico-Cultural. Formação de Professores.

[*] Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Guarulhos, São Paulo, Brasil. E-mail: vanessa.moretti@unifesp.br.

[**] Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professor do Departamento de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), São Paulo, São Paulo, Brasil. E-mail: wellington.virgens@ifsp.edu.br.

[***] Doutoranda em Educação pela Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP). Supervisora de Ensino do Governo do Estado de São Paulo (SEDUC/SP), Guarulhos, São Paulo, Brasil. E-mail: iraji.romeiro@educacao.sp.gov.br.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

Abstract

Early Algebraic knowledge has been a subject of interest in national and international research, facing the challenge that represents the transition from arithmetic to algebraic thinking. Faced with this reality, this article discusses the theoretical aspects of the development of algebraic thinking, focusing on the continuing education of teachers who teach mathematics in the primary grades. In the light of the Historical-Cultural Theory, we present the conception of algebraic thinking as theoretical thinking mediated by algebraic concepts. In this journey, we discuss the concept of generalization from Davidov and layers of generality in Radford. Assuming that the solution to the algebra problem in the early years involves teacher education, we understand that it is essential that the teacher also recognizes, in formative processes, the use of semiotic resources to communicate his or her algebraic thinking. In this way, we analyze a proposal for a triggering situation for teacher education and discuss its potential for the development of algebraic thinking. We conclude that following the movement of substantial generalization and analytical work with indeterminate quantities can bring important contributions to the organization of pedagogical activity that aims to overcome purely arithmetic thinking in the development of algebraic thinking, understood as theoretical thinking mediated by algebraic concepts in a specific semiotic system of cultural signification.

Keywords: Algebraic Thinking in the Early Years. Generalization. Theoretical Thinking. Historical-Cultural Theory. Teachers' Education.

1 Introdução

O interesse sobre o conhecimento algébrico nos Anos Iniciais não é recente. Já na década de 80, pesquisas apontavam para a dificuldade dos alunos na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, estimulando os pesquisadores a estudarem a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico já nas séries iniciais (KIERAN *et al*., 2016; FILLOY; ROJANO, 1989). Tal discussão passou a ter implicações nacionais ainda na década de 90, com pesquisas como as de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que propunham elementos para se pensar uma educação algébrica elementar.

A partir daí vários pesquisadores têm transitado por essa temática a partir de diferentes embasamentos teóricos (CEDRO; MOURA, 2007; FERREIRA; RIBEIRO; SILVA, 2017; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LANNER de MOURA; SOUSA, 2008; LINS; GIMENEZ, 2005). Apesar dessas indicações, parece que ainda pouco do trabalho pedagógico nos Anos Iniciais tem sido dedicado para o desenvolvimento intencional de noções algébricas, uma vez que, tanto nas orientações curriculares nacionais (BRASIL, 2013), quanto na análise das avaliações institucionais (IBRAHIM; SILVA; RESENDE, 2013) a temática do conhecimento algébrico nos Anos Iniciais pouco aparece. Mais recentemente, com a publicação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), o desenvolvimento do pensamento algébrico e aspectos do próprio conhecimento algébrico passaram a ter espaço de forma explícita nas discussões sobre a organização curricular da Matemática nos Anos Iniciais, de modo que pesquisas recentes têm problematizado a necessidade do desenvolvimento do conhecimento algébrico na formação de professores que ensinam Matemática em cada etapa da

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

escolarização (MAGINA, 2017; OLIVEIRA; CEDRO, 2018; ROSA, 2012; SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

Ainda que tanto as orientações curriculares nacionais, quanto a própria BNCC não sejam documentos especificamente voltados à formação de professores, tais documentos colocam esta formação em pauta ao determinarem que os professores dos Anos Iniciais devem propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Assim, compreendendo a importância do papel do professor nessa mudança de perspectiva acerca do conhecimento algébrico nos Anos Iniciais, entendemos ser fundamental aprofundar pesquisas sobre processos de formação, inicial ou continuada, de professores potencializadores de práticas pedagógicas que foquem o conhecimento algébrico dos professores e/ou futuros professores voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Nesse contexto, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-cultural[1] (GEPPEDH-MAT) da Universidade Federal de São Paulo tem realizado pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, bem como tem desenvolvido estratégias teóricas e metodológicas para a formação de professores, a partir do desenvolvimento mediado por Situações Desencadeadoras de Aprendizagem – SDA (MOURA *et al.*, 2010).

Neste artigo, que dialoga com a aprendizagem docente por meio da investigação dos processos de "apropriação dos conceitos teórico-metodológicos sobre o ensino de matemática" (MORAES; MOURA, 2009), optamos por apresentar uma discussão teórica acerca da compreensão de pensamento algébrico, pautada pelo conceito de pensamento teórico em Davídov (1988) e pelas proposições de Radford (2011, 2018) sobre o movimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais. Com esse objetivo, ampliamos a discussão sobre o conceito de generalização e sobre como a compreensão em relação ao movimento de generalização traz luzes para reconhecermos possibilidades de desenvolvimento do pensamento algébrico de professores. Tal discussão é objetivada por meio de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem-SDA apresentada a um grupo de professores dos Anos Iniciais em formação continuada. A SDA que elaboramos coletivamente, para fins de formação de professores, é discutida a partir dos elementos que a compõem e como tais elementos podem se constituir como desencadeadores do movimento do pensamento algébrico dos professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, em relação à própria aprendizagem de aspectos da álgebra, bem como das formas pelas quais essa aprendizagem poderia potencializar a organização do ensino

[1] Linha de pesquisa Educação Matemática. Mais informações do grupo disponíveis no Diretório de Grupos de Pesquisa da CAPES, no endereço http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/35714.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

desenvolvente do pensamento algébrico de estudantes dos Anos Iniciais.

2 O movimento histórico-lógico do conhecimento algébrico

Desde a publicação do livro *al-Hisab al-jabr w'al-muqabala* (O livro conciso sobre o cálculo pela conclusão e pelo equilíbrio), por volta do ano 825, pelo matemático árabe al-Khwarizmi, a linguagem algébrica percorreu um longo caminho histórico até chegar à atual compreensão que inclui conceitos como grupos, anéis e corpos. A abreviação do título do livro (al-jabr) dá origem ao termo "álgebra", cuja tradução literal se aproxima de algo como "ciência da restauração e balanceamento" (ROQUE, 2012), que eram métodos utilizados na resolução de equações. No seu percurso histórico, o conhecimento algébrico passa por personagens históricos como Diofanto de Alexandria e seus estudos, escribas mesopotâmicos e babilônicos e sua busca pelas generalizações de procedimentos, e por Gauss, com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

De modo geral, historiadores da Matemática, fundamentados em Nesselmann[2] (1842 *apud* RADFORD, 2011; ROQUE, 2012), aceitam considerar os procedimentos descritos por Diofanto de Alexandria, em sua obra Arithmetica, como representativo de uma álgebra sincopada em um momento histórico de transição entre o que se convencionou chamar de álgebra retórica e álgebra simbólica. Nessa compreensão, a álgebra retórica e a álgebra sincopada seriam representativas de uma álgebra não simbólica, que remetem, respectivamente, ao uso da linguagem corrente na representação e resolução de equações e ao uso de termos abreviados com a mesma finalidade. Já a ideia de uma álgebra simbólica foi se aproximando culturalmente do adjetivo "moderna" e passando a abranger conhecimentos que superariam a mera representação de equações e os métodos de resolução destas.

No entanto, Radford (2011) destaca o necessário cuidado com essa compreensão, uma vez que ela poderia constituir um anacronismo histórico, já que tende a estabelecer comparação direta entre momentos históricos distintos a partir de juízos que remetem à Matemática conhecida nos dias de hoje.

> É importante salientar o fato de que é completamente equivocado colocar o problema do desenvolvimento do raciocínio algébrico em termos de um empreendimento epistemológico transcultural cuja meta fosse desenvolver uma linguagem simbólica abstrata e elaborada. Certamente, linguagem e símbolos desempenham um importante papel no modo como transmitimos experiências científicas. Contudo, seus usos são sustentados em práticas socioculturais que vão além do escopo do domínio da Matemática. Uma abordagem mais adequada no estudo das relações entre símbolos e linguagem, por um lado, e o desenvolvimento do pensamento algébrico, de outro,

[2] Nesselman, G. H. F. **Versuch einer kritischen geschichte der algebra**: 1. Teil. Berlin: G. Reimer, 1842.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

> seria analisar a linguagem e o simbolismo em seus próprios contextos semióticos históricos e culturais (RADFORD, 2011, p. 140).

A comparação ingênua dos diferentes períodos históricos da álgebra poderia indicar que uma forma de pensar a álgebra seria superior a outra, desconsiderando o contexto histórico e cultural de produção da álgebra e das necessidades humanas postas no momento de produção do conceito. Ou seja, seria um equívoco considerar que a álgebra simbólica é superior à álgebra retórica em relação ao seu período histórico de produção. Assim, tanto a definição de “arithmos”, apresentada por Diofanto e compreendida como uma generalidade que pôde ser aplicada a uma grande variedade de situações, quanto o uso de palavras como comprimento e largura de um retângulo para designar incógnitas, por escribas mesopotâmicos a partir de experiências semióticas do cotidiano, devem ser analisadas em seu contexto histórico e cultural (RADFORD, 2011).

O movimento histórico da álgebra, por sua vez, teve reflexo na organização dos currículos escolares, materiais didáticos e na formação de professores, culminando na hierarquização dos conteúdos matemáticos que pode ser resumida por uma organização que segue uma lógica de pré-requisitos ordenada pelos estudos de aritmética – álgebra – geometria, respectivamente (ROSA, 2012).

No Brasil, historicamente o ensino da álgebra tem enfatizado o simbolismo lógico-formal mais do que o pensamento algébrico e seu significado histórico (PANOSSIAN, 2014). Entendemos que a ênfase do ensino da álgebra no seu simbolismo lógico-formal, pressupondo a aritmética como pré-requisito para o ensino da álgebra, se caracteriza como uma abordagem tradicional. Tal abordagem tradicional do ensino da álgebra da Educação Básica tende a valorizar mais a memorização de regras e a reprodução mecânica de algoritmos e técnicas, do que o desenvolvimento de uma forma de pensamento que reconheça, por meio da generalização, os padrões, o movimento, a variação de grandezas e as relações funcionais.

Tal compreensão do ensino da álgebra, que parece estar desconexa da prática social (SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014), pouco contribui para uma Educação Matemática que permita uma formação cidadã na qual o reconhecimento de variações e relações funcionais remeta, direta ou indiretamente, à compreensão da realidade. Uma possibilidade de superar essa limitação é o desenvolvimento de um trabalho conjunto, entre professores e alunos, que considere a unidade dialética entre aspectos históricos e lógicos do conceito, ao convidar os estudantes a

> [...] pensar sobre nexos internos: os conceitos de fluência, campos de variação e variável, que compõem a natureza da álgebra, os quais contém a lógica, a história, as abstrações e as formalizações do número e da figura, bem como a interdependência e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

> a fluência [...] (SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 128).

Tais elementos do movimento histórico-lógico da álgebra não são, tradicionalmente, abordados na formação inicial de professoras e professores dos Anos Iniciais. Em outras palavras, de modo geral, poucos cursos de formação inicial ou continuada de professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais se debruçam sobre a relação entre esses aspectos nucleares do conceito e as necessidades humanas que moveram sua produção, seja a busca por regularidades, a possibilidade de previsão ou a representação de valores desconhecidos, entre outras. Assim, concordamos com Kaput (2008), quando afirma que a solução para o problema do ensino da álgebra passa pela necessária mudança na estruturação dos currículos, na avaliação e, principalmente, na formação de professores uma vez que explorar tais elementos lógico-históricos implica em ir além do conhecimento algébrico simbólico. De acordo com Radford:

> Ontogeneticamente falando, há espaço para uma grande zona conceitual onde os alunos podem começar a pensar algebricamente mesmo que não estejam recorrendo (ou pelo menos não em grande medida) a signos alfanuméricos. Esta zona, que podemos denominar de zona de emergência do pensamento algébrico, permaneceu amplamente ignorada, como resultado de nossa obsessão em reconhecer o algébrico apenas no simbólico (RADFORD, 2009, p. 36).

Considerando a zona de emergência do pensamento algébrico por meio de camadas de generalidade (RADFORD, 2018) é possível desenvolver processos de aprendizagem docente (MORAES; MOURA, 2009), no contexto dos Anos Iniciais de escolarização, que permitam o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores para além do simbolismo algébrico.

3 Generalização e pensamento algébrico

A ideia da generalização parece ser ponto de convergência da concepção de diferentes autores (KIERAN *et al.*, 2016; DAVÍDOV, 1988; RADFORD, 2014) sobre o que seria o pensamento algébrico. Nessa linha, a ideia de pensar algebricamente não necessariamente envolveria o reconhecimento de símbolos ou a sua manipulação algébrica, mas sim a compreensão das relações entre as grandezas envolvidas em um fenômeno, o que traz a possibilidade de abordar-se aspectos relativos ao pensamento algébrico nas práticas de ensino já desde os primeiros anos da escolaridade formal (KAPUT, 2008).

Nessa direção, Kaput (2008, p. 9) destaca que, embora o raciocínio algébrico seja "composto por processos de simbolização complexos que servem ao propósito da generalização e ao raciocínio intencional com generalizações", no início do ensino da álgebra os alunos representam suas conclusões e generalizações das relações entre as grandezas por meio de uma representação própria usando linguagem natural, desenhos, gestos, ou outros, o que pode não

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

envolver necessariamente símbolos.

Assim, para o autor, o desenvolvimento do raciocínio algébrico é compreendido como um todo mais amplo que envolve "o processo da atividade algébrica, desde as primeiras características do pensamento algébrico até a utilização de uma linguagem simbólica para estabelecer generalizações" (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 103). Baseando-se em estudos de Kaput, Kieran *et al.* (2016) sintetizam que, enquanto o pensamento aritmético está relacionado aos números e suas operações, o pensamento algébrico envolve a análise entre as quantidades, observação da estrutura, padronização, resolução de problemas, generalização, modelagem entre outros aspectos.

A transição entre pensamento aritmético e pensamento algébrico também têm sido estudada por Radford (2014) ao investigar a generalização de padrões por meio de tarefas escolares. Para esse autor, assim como para Kaput (2008), a generalização pode ser representada por gestos, linguagem escrita, falada ou outras representações semióticas que, durante o desenvolvimento do trabalho conjunto em sala de aula entre estudantes e professor, podem seguir para a representação simbólica, o que ressignificaria todas as operações numéricas (RADFORD, 2018).

A generalização também aparece como central nas compreensões de Davídov (1988) acerca do ensino da Matemática. Para esse pesquisador, o ensino da Matemática deve seguir um movimento que parte do geral para o particular, superando o distanciamento entre a aritmética e a álgebra, de modo que compreender a estrutura envolvida na relação entre as grandezas em situações matemáticas, num contexto geral e analítico, possibilite uma compreensão mais substantiva em situações particulares aritméticas. No entanto, tanto Davídov, quanto Radford, entendem que a generalização não é sinônimo do pensamento algébrico, uma vez que "a generalização é um atributo comum do pensamento humano e não pode, consequentemente, capturar a especificidade do pensamento algébrico" (RADFORD, 2018, p. 7). Apoiando-nos nas compreensões de Davídov (1988) e Radford (2014; 2018; 2019) sobre o conceito de generalização, buscamos, a seguir, caracterizar a compreensão de pensamento algébrico que temos defendido e tomado como referência para as pesquisas desenvolvidas no GEPPEDH-MAT.

Para Davídov (1988), a generalização pode ser empírica ou teórica, dependendo das relações que o pensamento estabelece com aspectos particulares ou gerais da realidade. Sendo atributo do pensamento, o tipo de generalização vincula-se com uma forma específica de pensar sobre determinado conceito ou fenômeno. Enquanto o pensamento empírico caracteriza-se pelo movimento baseado na lógica-formal, que valoriza relações aparentes e externas do objeto

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

captadas pela observação sensorial, classificação de atributos semelhantes, operando por meio de exemplos concretos, temos que o pensamento teórico é o pensamento que é mediado por conceitos teóricos, baseado na lógica dialética, em que os aspectos externos e os internos do objeto estão em constante relação.

Assim, a generalização empírica, típica do pensamento empírico, dá-se na redução do concreto ao abstrato, de modo que, a partir de características comuns e classificações empíricas, sensoriais e particulares, busca-se abstrair uma lei que generaliza empiricamente outras situações semelhantes. Por exemplo, ao observarmos apenas as características externas de uma baleia - tais como viver no mar, nadar, ter nadadeiras, que são características comuns aos peixes - uma generalização empírica nos permitiria assumir que a baleia é um peixe (quando, na verdade, é um mamífero). No entanto, não necessariamente a generalização empírica implica em erro. Pode apenas refletir uma compreensão superficial do fenômeno, sem a análise das relações que o compõem. Por exemplo, ao somar “25 + 17” uma criança pode dizer “vai um” e chegar ao resultado correto da operação, e não necessariamente compreender o agrupamento e o valor posicional característicos do sistema de numeração decimal indoarábico.

Já a generalização teórica, chamada por Davídov de substantiva envolve as relações externas e internas do fenômeno em estudo, superando a aparência sensorialmente percebida, ou seja, permite “descobrir certa sujeição à lei, uma inter-relação necessária dos fenômenos particulares e singulares com a base geral de certa totalidade, descobrir a lei de formação da unidade interna dele” (DAVÍDOV, 1988, p. 152). No caso da baleia, uma análise mais aprofundada, para além da aparência, nos permitiria reconhecer que a baleia possui pulmões e não brânquias como os peixes, além de amamentar seus filhotes. A generalização substantiva (DAVÍDOV, 1988) é própria do pensamento teórico e segue um movimento de redução do concreto sensorial para o abstrato e depois de ascensão do abstrato ao concreto pensado, ou seja, um movimento concreto-abstrato-concreto e esse movimento é mediado pelo próprio conceito (DAVÍDOV, 1988). Ainda no caso da baleia, uma coisa é olharmos suas características externas, outra é investigarmos o animal mediados pelo conceito científico de mamífero.

Trazendo essa discussão para o campo do conhecimento algébrico, podemos compreender que, ao analisarmos fenômenos que expressem relações entre operações ou variações entre grandezas de forma mediada por conceitos algébricos, as diferentes manifestações semióticas possíveis, resultantes dessa análise, expressam uma manifestação objetiva do pensamento teórico. Assim, entendemos que *o pensamento algébrico é o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos*.

Para Radford (2014; 2018), a generalização característica do pensamento algébrico envolve a natureza analítica explicativa para raciocinar algebricamente, de modo que a lei geral é deduzida conscientemente, e não "adivinhada" como pode acontecer nas relações aritméticas. Pensar algebricamente é operar com o desconhecido, o que significa operar como se o desconhecido fosse sempre conhecido. Assim, segundo Radford (2018), o pensamento algébrico caracteriza-se por recorrer a quantidades indeterminadas, lidando com elas de forma analítica e podendo representar tais quantidades indeterminadas e operações de modos próprios e não necessariamente utilizando um simbolismo alfanumérico, uma vez que, "embora as quantidades indeterminadas possam ser expressas através de simbolismo alfanumérico, elas também podem ser expressas através de outros sistemas semióticos, sem prejuízo da natureza algébrica do pensamento" (RADFORD, 2018, p. 8). Nesse sentido, a compreensão de generalização algébrica proposta por Radford (2018), se olhada a partir das contribuições de Davídov (1988), parece remeter a um processo mediado por conceitos algébricos e, desta forma, se aproximaria de um pensar teórico.

Ao investigar a emergência do pensamento algébrico em crianças na generalização de sequências e padrões, Radford (2018) reconhece diferentes estratégias de generalização que o levam a distinguir a generalização aritmética da generalização algébrica. O ponto crucial que diferencia essas duas estratégias de pensamento reside na analiticidade, específica da generalização algébrica. Radford defende a existência de generalizações aritméticas sofisticadas nos Anos Iniciais que podem se manifestar quando o estudante se utiliza de quantidades indeterminadas e até algum tipo de simbolismo, mas a analiticidade encontra-se ausente. Assim, por exemplo, quando um problema envolvendo variação de grandezas é resolvido por meio de classificação ou agrupamento de elementos semelhantes, utilizando recursos como a "tentativa e erro" ou a indução aritmética, para chegar a uma regra geral, entendemos que o movimento fica limitado ao campo do pensamento empírico.

Para ilustrar essa situação, recorremos a um exemplo proposto a alunos de uma 6ª série (atual sétimo ano), apresentado originalmente na pesquisa de Panossian (2010). Nesse exemplo, os alunos foram convidados a responder quantos jogos seriam realizados em um campeonato de futebol, em que cada time jogaria apenas uma vez contra os demais, à medida em que variasse a quantidade de times participantes. O professor, prevendo alguma dificuldade dos alunos, forneceu questões auxiliares e uma tabela a ser preenchida. A Figura 1 mostra a forma como um estudante preencheu a tabela e apresentou a expressão algébrica simbólica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

Número de times(n)	Quantidade de jogos de cada time	Quantidade de jogos no campeonato
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45
n	N-1	NX(N-1):2

Figura 1 – Procedimento aritmético de generalização
Fonte: PANOSSIAN (2010, p. 129)

Na análise, que considerou os diálogos entre os alunos e a formadora e as formas de resolução do problema, Panossian (2010) afirma que, embora o estudante tenha chegado ao registro simbólico alfanumérico da expressão geral da função, houve uma generalização empírica (cf. DAVÍDOV, 1988). No caso analisado, o estudante chegou à representação simbólica alfanumérica a partir da observação sensorial que consistiu em subtrair uma unidade do valor que aparece na primeira coluna. Assim, quando o valor da primeira coluna é “n” ele escreve “n-1”. De modo análogo, a observação de que o número da terceira coluna (que pode ser encontrado por meio da contagem direta) é o produto das duas primeiras dividido por 2, ele escreve, na última linha, “n(n-1)÷2”. Quando ao estudante é perguntado “e se tivéssemos n times? Qual seria o número de jogos (j) necessário?”, ele demonstra não ter compreendido que a “fórmula” escrita na tabela remete ao número total de jogos e que o “n” remete a uma quantidade arbitrária de times. Panossian (2010) conclui que o estudante revela não compreender as relações existentes entre as grandezas envolvidas (quantidade de times e número de jogos) e que “o que aconteceu na tabela foi apenas uma manipulação simbólica e possivelmente uma substituição de valores pela letra” (PANOSSIAN, 2010, p. 148).

A partir dessa análise, entendemos que o movimento do aluno apresentado por Panossian (2010), embora apresente o registro simbólico da generalização, resulta de uma forma de pensamento que não foi analítica, o que, na denominação proposta por Radford (2018), constitui uma generalização aritmética e não uma generalização algébrica.

Retomamos a pesquisa de Panossian (2010) na análise do exemplo acima porque entendemos que ela traz importantes contribuições para a metodologia de pesquisas que se propõem a investigar o desenvolvimento do pensamento teórico ao demonstrar que análise isolada do registro escrito de uma representação simbólica pode não ser suficiente para o pesquisador inferir se este representa uma generalização aritmética ou algébrica. Isso porque, mesmo que o estudante chegue à produção de uma expressão simbólica alfanumérica para uma função, não é possível afirmar, apenas observando o registro escrito dessa expressão, se ele o

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

fez via pensamento aritmético ou pensamento algébrico.

Daí a importância de investigarmos o sujeito em atividade (LEONTIEV, 1983) por meio de uma análise multimodal (linguagem verbal, textos escritos em linguagem materna que explicitem a forma de resolução do problema, gestos etc) que permita ao pesquisador compreender como o sujeito chegou à representação dessa relação geral entre as variáveis. Embora a expressão simbólica tenha um potencial generalizador, como elemento matemático, para o sujeito que a escreve pode ser simplesmente o resultado de mais um passo na generalização aritmética, não equivalendo, necessariamente, a uma manifestação do pensamento algébrico. Assim, ao assumir-se a escrita de uma expressão algébrica simbólica como condição necessária e suficiente para a manifestação de uma generalização algébrica, corre-se o risco circunscrever-se o desenvolvimento do pensamento aos limites do pensamento empírico.

Alguns autores têm entendido que, para se chegar à generalização algébrica, é necessário passar inicialmente pela generalização aritmética (JUNGBLUTH; SILVEIRA; GRANDO, 2019; PROENÇA, 2019; VALE; BARBOSA, 2019). Analisando essa condição a partir da compreensão de Radford (2018) acerca da distinção entre generalização aritmética e generalização algébrica, ressaltamos a importância de não se tomar a generalização algébrica como equivalente à generalização distante, ou seja, aquela que se dá quando há o registro de uma expressão algébrica que remete à lei geral de uma função e permite o cálculo de quaisquer outros termos, o que caracterizaria o pensamento algébrico. Nessa linha de raciocínio, que assume a generalização distante como equivalente à generalização algébrica, perde-se o aspecto essencial da analiticidade. No entanto, entendemos que o fato de uma generalização ser algébrica não se define por ser próxima ou distante, mas sim por ser marcada pela analiticidade (RADFORD, 2018).

Assim, embora os movimentos típicos do pensamento empírico e do pensamento teórico se iniciem no mesmo ponto – o concreto sensorial, que poderia ser associado à ideia de generalização próxima – o desenvolvimento da forma desses pensamentos é diferente, conforme já descrito. Como vimos, no exemplo de Panossian (2010), é possível que uma representação simbólica alfanumérica resulte de uma generalização empírica. No caso analisado, tal generalização empírica se deu a partir de uma percepção de regularidades aritmética seguida da troca do valor numérico pela letra n. No entanto, como demostramos, não houve a compreensão da relação de dependência entre as variáveis do problema, de modo que, de acordo com os referenciais teóricos de Davídov (1988) não podemos falar em pensamento teórico e, consequentemente, a ausência de analiticidade não permite reconhecer a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

generalização algébrica (RADFORD, 2018).

Entendendo que o pensamento algébrico é o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos, temos que seu ponto de partida é o concreto sensível, porém o movimento envolve a analiticidade dos conceitos algébricos, as suas estruturas, relações funcionais, variações, indo para além da generalização aritmética, de forma que o simbolismo alfanumérico seja deduzido da análise de relação entre variáveis. Uma vez que a generalização algébrica se caracteriza pelo reconhecimento das características comuns de maneira analítica (RADFORD, 2013), o processo de generalização algébrica não envolve, necessariamente, a generalização aritmética, pois não necessita da resolução particular da situação, mas sim da análise geral da sua lei de formação que pode ser expressa por diferentes meios semióticos (gestos, palavras, desenhos, símbolos, etc.). Radford (2013, 2015) relaciona essas diferentes formas de manifestação da generalização algébrica com o que ele chama de camadas de generalidade.

Radford (2015) identifica três camadas de generalidade algébrica: factual, contextual e simbólica, que são percebidas de maneira progressiva pelos alunos. Partindo do estudo da generalização algébrica de padrões, o autor caracteriza cada uma dessas camadas de generalidade a partir da análise dos registros semióticos da atividade dos estudantes e, apesar dessas camadas possuírem suas especificidades, todas elas manifestam algum nível de analiticidade. Assim, a camada de generalização factual expressa a compreensão das relações gerais de um padrão por meio de palavras, frases, gestos factuais, de modo que "a fórmula é expressa através de instâncias particulares da variável" (RADFORD, 2018, p. 14).

À medida que a relação entre variáveis e sua generalidade ganha o caráter verbal, desvencilhando-se do caso particular, a generalização avança para contextual. Segundo Radford (2018, p. 22), "em generalizações contextuais, em contraste, a fórmula é expressa em um nível mais geral; as variáveis e sua relação tornam-se explícitas e são referidas por meio de elementos contextuais - divisões linguísticas espaciais". Já a camada simbólica é uma forma sofisticada de manifestar a forma de pensar sobre um padrão. Nesta camada de generalização, são utilizados os meios semióticos simbólicos que expressam a maneira geral de formação de uma sequência. Esse nível de generalização muda a forma de pensar e ser do sujeito, dentro do contexto do pensamento algébrico.

Em síntese, a generalização algébrica, que pode se manifestar em diferentes camadas, revela a analiticidade no trato das relações entre grandezas e a mediação do conceito teórico. Por outro lado, os movimentos de adivinhação (tentativa e erro), indução ou análise de particularidades aritméticas, podem conduzir a uma generalização aritmética que, por sua vez, não é desenvolvente do pensamento algébrico.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

A discussão apresentada até aqui, sobre aspectos do conceito de generalização no contexto do desenvolvimento do pensamento algébrico, pode auxiliar professores a reconhecerem estratégias algébricas de solução de problemas e potencializarem a organização do ensino desenvolvente do pensamento algébrico de estudantes, desde que essa temática seja tomada como objeto na formação de professores que ensinam Matemática, em particular, nos Anos Inicias. Visando contribuir com esse desafio, apresentamos, a seguir, uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem-SDA (MOURA *et al.*, 2010) que teve como público professores em formação continuada e que busca subsidiar a atividade pedagógica com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico – pensamento teórico, mediado por conceitos. Na sequência, discutimos a relação desta proposta com os nexos conceituais do pensamento algébrico e suas potencialidades para desencadear o processo de generalização algébrica característica do pensamento algébrico.

4 Situações Desencadeadoras de Aprendizagem e a generalização algébrica

Uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA), fundamentada nos princípios teóricos e metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino (MOURA *et al.*, 2010), busca colocar os sujeitos em atividade diante da necessidade histórica do conceito, de modo que o Problema Desencadeador de Aprendizagem – PDA (VIRGENS, 2019) permita revelar as relações internas e externas do conceito com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico.

Considerando o movimento histórico-lógico do conhecimento algébrico, a necessidade de representar o movimento de grandezas variáveis e suas regularidades (MORETTI, 1998) objetiva-se nas SDA que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico e que devem proporcionar aos sujeitos que se deparem com aspectos relacionados a alguns nexos conceituais: movimento, valor desconhecido (incógnita); reconhecimento de padrões e generalizações; variáveis; relações entre grandezas variáveis; e relação algébrica funcional.

No caso da SDA que apresentaremos, perseguimos o objetivo de colocar aos sujeitos a necessidade de lidarem com quantidades desconhecidas de forma analítica e focamos, dentre os nexos conceituais indicados, na relação entre grandezas variáveis e cálculo analítico com quantidades indeterminadas, dando margem para a discussão e análise do campo de variação das grandezas. Apesar desta proposta estar mais atrelada a formação continuada de professores, compreendemos que o recurso teórico metodológico deva se estender à formação inicial de professores que irão atuar nesta etapa de ensino.

A SDA "É possível prever o futuro?" apresenta um fenômeno que remete ao controle de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

quantidades variáveis, necessidade que remete à produção histórica do conhecimento algébrico, e consiste em acompanhar a altura do nível de água em um recipiente à medida que são colocadas bolinhas de vidro (gude) no mesmo. A necessidade de lidar com as quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas, relacionando grandezas envolvidas no fenômeno, é suscitada pelo Problema Desencadeador de Aprendizagem que visa prever o limite máximo de bolinhas que podem ser depositadas no recipiente sem que a água transborde. Para isso, são disponibilizados os seguintes objetos: recipiente acrílico, uma garrafa contendo água, um conjunto de bolinhas de vidro, fita adesiva, barbante, caneta.

Uma vez que essa SDA tem o propósito de colocar em evidência a necessidade de lidar, de forma analítica, com quantidades indeterminadas, a quantidade de bolinhas não pode ser suficiente para que a água transborde a capacidade, a fim de que o problema não possa ser resolvido plenamente pela experimentação. Tão pouco podem ser utilizados recursos de medição direta (como uma régua graduada, por exemplo). Essas restrições têm o propósito de evitar que os recursos adotados no movimento de resolução do PDA sejam meramente aritméticos (contagem ou medição direta, tentativa e erro, indução), o que poderia remeter a um processo de pensamento empírico, como evidenciamos anteriormente.

A partir do concreto sensorial - a observação dos elementos aparentes, é possível identificar as grandezas presentes na situação, para depois analisar: se e como essas grandezas variam; se é possível estabelecer alguma dependência entre elas; e como representar essa possível relação. Um primeiro movimento de pensar sobre a situação passa por reconhecer grandezas fixas e grandezas variáveis. Enquanto o volume de cada bolinha[3] e o volume total do recipiente e de água não variam, temos que a altura do nível da água e a quantidade de bolinhas variam. Para chegar à resposta do PDA, ou seja, para saber a quantidade de bolinhas (b) necessárias para que a água transborde o recipiente é necessário identificar, inicialmente por meio da observação do concreto sensorial, a relação de dependência entre a altura do espaço sem água do recipiente (H) e a variação da altura da água a cada bolinha colocada no interior do recipiente (h), conforme Figura 2.

[3] Ainda que o volume das bolinhas possa apresentar pequenas variações, optamos por indicar que tais variações são insignificantes para os propósitos que buscamos alcançar.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

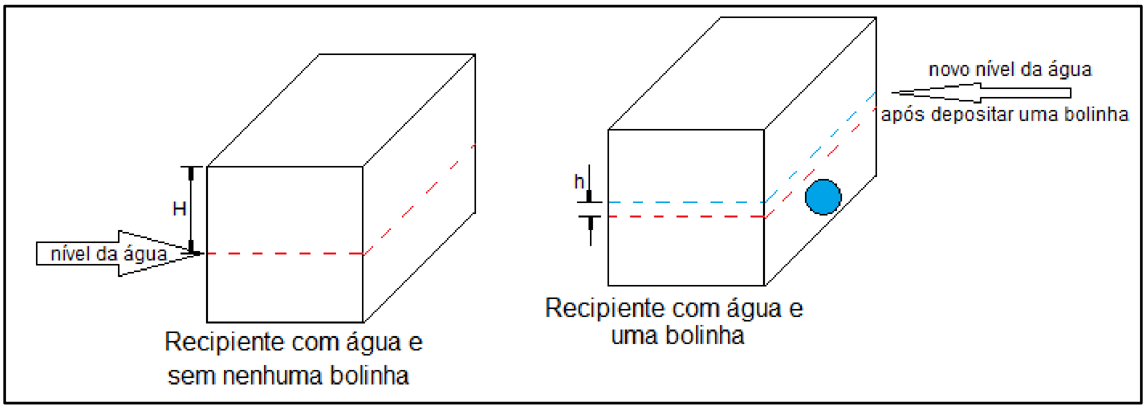

Figura 2 – Variação entre a altura sem água do recipiente e a quantidade de bolinhas
Fonte: MORETTI, VIRGENS; ROMEIRO (2020, p. 2120)

Essa primeira aproximação com o fenômeno a partir do concreto sensorial, por meio da analiticidade das grandezas que estão variando, tem potencial para favorecer um nível de generalidade que poderíamos entender como factual. Nesse primeiro momento, as variáveis são indicadas por meio de casos particulares ou "fatos" (RADFORD, 2018) podendo ser expressas no seu movimento a cada variação particular e por meio de "uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos" (RADFORD, 2009, p. 34).

No desenvolvimento da atividade coletiva de solução mediada da SDA e diante da necessidade de comunicação, a relação entre as variáveis que antes era expressa de forma factual, ganha o caráter verbal permeado por termos que remetem a aspectos contextuais, tais como "aumenta" ou "sobe", o que caracteriza uma generalização contextual. No movimento de generalização contextual, podem ser identificadas frases que indicam um movimento de compreensão analítica da relação de dependência entre as grandezas variáveis e, desta forma, se aproximam da explicação de uma lei geral que descreve o fenômeno. Assim, podemos ter na generalização contextual frases como "o nível da água no recipiente se altera em função do número de bolinhas que são depositadas" ou "a cada bolinha depositada, a variação da altura da água é sempre a mesma". Nesse processo, a manifestação da analiticidade e a indicação de operações com valores desconhecidos permite reconhecer que a posterior indicação de uma expressão algébrica simbólica não representa meramente uma generalização aritmética, ou próxima, mas remete a uma generalização algébrica, própria do pensamento teórico mediado por conceitos algébricos.

A partir da constatação de que a variação da altura da água é sempre a mesma (um padrão decorrente do volume da bolinha) e que a divisão remete à relação entre a altura que falta para transbordar o recipiente e a altura equivalente ao volume deslocado por cada bolinha depositada, é possível a seguinte síntese ou generalização substantiva e contextual: qualquer que seja a altura do recipiente que falta ser ocupada antes que a água transborde, a quantidade

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

de bolinhas necessárias para fazê-la transbordar é igual ao quociente da divisão entre a altura que falta para transbordar e o nível de água deslocado por cada bolinha colocada no interior. A partir dessa generalização substantiva, a situação concreta assume outra característica, que supera a limitação do caso particular e que passa a ser compreendida como parte de um todo. Essa generalização substantiva e contextual, caracterizada pela compreensão da relação das grandezas variáveis e seu trato analítico por meio do cálculo com quantidades indeterminadas, pode ser expressa por diferentes meios semióticos e não implica na representação simbólica.

Já a generalização simbólica, que se caracteriza por meio do uso símbolos e signos abstratos que substituem a linguagem verbal e as referências ao aspecto contextual, poderia ser expressa pela representação simbólica $b = \frac{H}{h}$, em que b é a quantidade de bolinhas depositadas no recipiente, H é a altura que falta no recipiente para a água transbordar e h é a variação de altura da água a cada bolinha depositada no recipiente. Nesse caso, seria possível afirmar que a expressão algébrica objetiva uma generalização algébrica simbólica, uma vez que deriva de um processo no qual a analiticidade e o trato com quantidades indeterminadas foram determinantes do processo de pensamento.

Esse movimento de generalização substantiva algébrica que descrevemos é objetivado no retorno ao concreto, em que não se busca mais medições particulares ou contagem de bolinhas para responder ao problema. Na Figura 3, buscamos representar esse movimento de generalização algébrica, desencadeado pela SDA, de forma que, embora a atividade tenha como ponto de partida o concreto sensorial (bolinhas, água, recipiente), o desenvolvimento do pensamento algébrico permite que o fenômeno passe a ser compreendido pelo sujeito a partir das relações entre as grandezas variáveis. Desse modo, o novo olhar sobre o concreto se torna teórico, um concreto pensado.

Vale destacar que a manifestação das camadas de generalidade pode se dar por diferentes meios semióticos, de modo que não é esperada somente a generalização simbólica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

Figura 3 – Relações entre a SDA e o processo de Generalização Algébrica
Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

Em síntese, entendemos que a SDA, trabalhada na atividade de ensino coletiva e mediada, pode desencadear um movimento de generalização substantiva atuando na zona de emergência do pensamento algébrico, ao colocar os sujeitos diante das necessidades da identificação de variáveis e suas relações e o seu trato de forma analítica, características do movimento histórico-lógico do conhecimento algébrico.

5 Considerações finais

Nesse artigo, partimos da problemática da álgebra nos Anos Iniciais e das especificidades do pensamento aritmético e do pensamento algébrico destacadas nas pesquisas de Kaput (2008) e Kieran *et al.* (2016) e buscamos ressaltar a importância de uma formação de professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais voltada para organização do ensino que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Em diálogo com a premissa davidoviana, que indica a necessidade de que as atividades escolares devam ser desenvolventes do pensamento teórico, apresentamos nesse artigo a concepção de pensamento algébrico como o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos e, nesse percurso, discutimos a compreensão de generalização a partir de Davidov

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

(1988) e de Radford (2015; 2018). Tal discussão reflete parte dos estudos teóricos que têm sido desenvolvidos junto ao GEPPEDH-MAT, da UNIFESP, e se objetiva na proposta de SDA "É possível prever o futuro?" apresentada e analisada nesse texto.

Compreendendo, como Radford (2018), que a álgebra que é um Sistema Semiótico de Significação Cultural, ou seja, é um saber que pode ser encontrado e tornar-se objeto da consciência na atividade humana, no trabalho conjunto entre os sujeitos da aprendizagem (professor e aluno), assumimos que esse encontro não depende necessariamente de representações simbólicas, e sim de um movimento no qual as possíveis camadas do processo de generalização se articulam com a observação de padrões, controle de quantidades, representação de variáveis, reconhecimento da relação funcional, operações com valores desconhecidos como se fossem conhecidos. A análise desses aspectos na atividade do sujeito, ao lidar com situações potencialmente algébricas, é o que permite caracterizar uma generalização algébrica que coincida com a generalização substantiva ou teórica, própria do pensamento teórico (DAVÍDOV, 1988). Assim, o pensamento algébrico, entendido como pensamento teórico mediado por conceitos algébricos, implica no movimento da generalização algébrica (RADFORD, 2018), compreendida como uma dimensão da generalização teórica de conceitos (DAVÍDOV, 1988).

A Situação Desencadeadora de Aprendizagem "É possível prever o futuro?" coloca aos sujeitos em formação - os professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, a necessidade de controlar quantidades e estabelecer relações entre grandezas variáveis, a partir do problema desencadeador acerca da previsão do limite máximo de bolinhas que podem ser depositadas no recipiente sem que a água transborde. Ao restringir o acesso a recursos que poderiam implicar em uma generalização aritmética – como a possibilidade de contagem, a medição direta ou o uso de técnicas de tentativa e erro ou indução, a SDA organiza o ensino de modo que os sujeitos tenham de operar com valores desconhecidos como se estes estivessem presentes e estabelecer relação entre grandezas variáveis identificáveis no fenômeno, o que exprime a natureza analítica e explicativa, genuinamente, do pensamento algébrico (RADFORD, 2018).

A busca pela solução mediada do problema pode potencializar o movimento da generalização algébrica e suas camadas de generalidade, no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, ainda que não resulte em uma representação simbólica a qual, como discutimos ao longo do texto, não é condição necessária e nem suficiente para indicar o desenvolvimento de formas algébricas de pensamento. Assim, apenas a identificação do registro simbólico da expressão alfanumérica pode ser insuficiente para caracterizar o pensamento algébrico. O olhar sobre o movimento da atividade que resultou em tal registro simbólico é o

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

que permite ao pesquisador reconhecer formas algébricas de generalização e acompanhar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

De forma decorrente, professores e professoras dos Anos Iniciais precisariam reconhecer elementos algébricos essenciais que contribuam para que seus alunos reconheçam padrões, representem-nos, ainda que de forma não simbólica, por meio de gestos, linguagem escrita, falada ou outras formas de representação semiótica, subsidiando a futura representação simbólica, que seria importante no processo, mas não representaria, por si só, formas algébricas de pensamento. Concordando com Kaput (2008) que a solução para o problema da álgebra nos Anos Iniciais passa pela formação de professores, entendemos que é fundamental que o professor também reconheça, em processos formativos, o uso de recursos semióticos para comunicar o seu pensamento algébrico.

Por fim, esperamos que a discussão e a análise apresentadas nesse texto possam contribuir para a superação de uma abordagem pedagógica que priorize o pensamento puramente aritmético na objetivação do pensamento algébrico, entendido como pensamento teórico mediado por conceitos algébricos. Nesse sentido, acompanhar o movimento da generalização substancial (DAVÍDOV, 1988) e o trabalho analítico com quantidades indeterminadas (RADFORD, 2018) pode trazer importantes contribuições para a organização da atividade pedagógica que tenha por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, compreendido como pensamento teórico mediado por conceitos algébricos em um específico sistema semiótico de significação cultural.

Referências

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. Uma perspectiva histórico-cultural para o ensino de álgebra: o clube de matemática como espaço de aprendizagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, n. 1, p. 37-56, 2007.

CYRINO, M. C. C. T; OLIVEIRA, H. M. Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 97-126, 2011.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación psicológica teórica y experimental. Moscu: Editorial Progresso, 1988.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; SILVA, T. H. I. Matemática nos anos iniciais e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *In:* RIBEIRO, A. J.; BEZERRA, F. J. B.; GOMES, V. M. S. (Orgs.). **Formação de professores que ensinam matemática e a álgebra da Educação Básica:** um projeto desenvolvido na Universidade Federal do ABC no âmbito do Observatório da Educação. Campinas: Edições Leitura Crítica, 2017. p. 171-192.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

FILLOY, E; ROJANO, T. Soving Equations: Transition from Arithmetic to Algebra. **For the learning of matematics**, Montreal, v. 9, n. 2, p. 19-25, 1989.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar… A educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 10, p. 79-91, 1993.

IBRAHIM, S. A.; SILVA, M. G.; RESENDE, M. R. Análise das questões da Prova Brasil segundo as concepções algébricas de Usiskin. **Revista Encontro de Pesquisa em Educação**, Uberaba, v. 1, n. 1, p. 146-159, 2013.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 96-118, 2019.

KAPUT, J. What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? *In:* KAPUT, J.; CARRAHER, D. W; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum, 2008. p. 05-17.

KIERAN, C. *et al.* **Early Algebra**: Research into its nature, its learning, its teaching. Hamburg: Springer Open, 2016.

LANNER de MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetike**, Campinas, v. 16, n. 2, p. 63-76, 2008.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, Conciencia, Personalidad**. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo Y Educación, 1983.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** 6. ed. Campinas: Papirus, 2005.

MAGINA, S. Introdução do raciocínio algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: contribuições da psicologia para o debate. *In:* VII ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Garanhuns. **Anais do VII EPEM.** Garanhuns: SBEM; EPEM, 2017. p. 1-4.

MORETTI, V. D. **O conceito de função: os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadores da aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo,São Paulo, 1998.

MORAES, S. P. G; MOURA, M. O. Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: contribuições da teoria histórico-cultural. **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 97-116, 2009.

MOURA, M. O. *et al*. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 10, n. 29. p. 205-229, jan./abr. 2010.

MORETTI, V. D; VIRGENS, W. P; ROMEIRO, I. O. O movimento de generalização e o desenvolvimento do pensamento algébrico na formação de professores dos anos iniciais. *In:* NASCIMENTO *et al* (Org.). **Didática(s) entre diálogos, insurgências e políticas**: tensões e perspectivas na relação com a formação docente. 1. ed. Petrópolis: Faperj; CNPq; Capes; Endipe, v. 02, 2020. p. 2110-2120.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes**: indicadores para a organização do ensino. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a11

PANOSSIAN, M. L. **O movimento lógico e histórico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2014.

PROENÇA, M. C. Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: compreensão de licenciandos em Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 419-437, 2019.

OLIVEIRA, D. C; CEDRO, W. L. Indícios da compreensão da necessidade de representação de uma linguagem algébrica simbólica nas crianças participantes do Clube de Matemática. **Revista Obutchénie**, Uberlândia, v. 2, n. 1, jan./abr. 2018.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: DURAND-GUERRIER, V et. al. (Eds.), **Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education – CERME 6**. Université Claude Bernard, Lyon. p. XXXIII – LIII, 2009.

RADFORD, L. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RADFORD, L. En torno a tres problemas de la generalización. *In:* RICO, L. *et al.* (Org.). **Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encamación Castro.** Granada: Editorial Comares, 2013. p. 03-12

RADFORD, L. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Mathematics Education Research Journal**, Australasia, v. 26, p. 257-277, 2014.

RADFORD, L. Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. **PNA**, Granada, v. 9, n. 3, p. 129-141, 2015.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. *In:* KIERAN, C. (Org.). **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds**: The global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018. p. 3-25.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

SOUZA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: O percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 398-418, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p398-418.

VIRGENS, W. P. Problemas Desencadeadores de Aprendizagem na organização do ensino: **sentidos em movimento na formação de professores de matemática.** 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Submetido em 07 de Outubro de 2020.
Aprovado em 02 de Agosto de 2021.