ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

Raciocínio Matemático de Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: estratégias de generalização empírica

7th Grade Students' Mathematical Reasoning: empirical generalization strategies

Luís Felipe Gonçalves **Carneiro**[*]

ORCID iD 0000-0002-9139-0408

Eliane Maria de Oliveira **Araman**[**]

ORCID iD 0000-0002-1808-2599

Maria de Lurdes **Serrazina**[***]

ORCID iD 0000-0003-3781-8108

Resumo

Este trabalho tem como objetivo identificar as estratégias de generalização empregadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa sobre sequências. O referencial teórico adotado é sobre os processos do raciocínio matemático na matemática escolar, com foco nas estratégias de generalização e nos processos de validação relacionados. A coleta de dados foi realizada por meio da gravação em áudio das resoluções dos alunos que, posteriormente, foram transcritos pelos pesquisadores. A análise dos dados foi realizada a partir de um quadro que sintetiza as estratégias de generalização e os processos de validação relacionados, construído à luz do referencial teórico do raciocínio matemático e com foco na natureza das generalizações. Os resultados deste trabalho indicam que os alunos tendem a utilizar estratégias de generalização e processos de validação que privilegiam a observação empírica dos dados.

Palavras-chave: Raciocínio matemático. Generalização. Estratégias de generalização. Justificação.

Abstract

The main goal of this paper is to identify the generalization strategies employed by Brazilian 7th grade students when solving a mathematical task about sequences. The theoretical background adopted is about the mathematical reasoning processes at school mathematics, focusing on the generalization strategies and in the validation processes related. The data was collected by the audio recording of the students' tasks solving and the data analysis was made with audio transcription, based on a frame made from the mathematical reasoning theoretical

[*] Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Professor da Secretaria de Estado da Educação e do Esporte do Paraná (SEED), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: luisfelipegcarneiro@gmail.com.

[**] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: eliane.araman@utfpr.edu.br.

[***] Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal. Membro integrado da Unidade de Investigaçãoo e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. E-mail: lurdess@eselx.ipl.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

background and studies related to generalization strategies. The work results indicate that students tend to use generalization strategies and validation processes that favor the empirical data observation.

Keywords: Mathematical reasoning. Generalization. Generalization strategies. Justification.

1 Introdução

O raciocínio matemático é um dos aspectos centrais da matemática (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018a) e tem recebido atenção por parte de documentos curriculares internacionais (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020; JEANNOTTE; KIERAN, 2017; OCDE, 2007; STYLIANIDES, 2009). Seu desenvolvimento se apresenta como um dos objetivos da matemática escolar (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018b).

No Brasil, o número de pesquisas sobre o tema ainda não é grande. Em uma busca por trabalhos cujos títulos contenham o termo *raciocínio matemático,* na biblioteca digital Scielo, por exemplo, foram localizados cinco artigos, sendo que quatro deles abordam os processos do raciocínio matemático. Apesar de poucas publicações, o tema adquiriu importância com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

O documento destaca, na etapa do Ensino Fundamental, o letramento matemático, que é definido como as habilidades e competências de “raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 266). Para o Ensino Médio, há a *competência específica 5*, a qual estabelece que os alunos devem investigar e estabelecer conjecturas e empregar estratégias para identificar a necessidade de utilizar uma demonstração cada vez mais formal na validação das conjecturas (BRASIL, 2018).

Dessa forma, esta pesquisa se justifica pelo desenvolvimento do raciocínio matemático ser um dos objetivos da matemática escolar (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018b) e pela relevância que adquiriu com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Na próxima seção, discutimos os processos do raciocínio matemático do ponto de vista da matemática escolar, de acordo com alguns autores. Um desses processos é bastante relevante para esta pesquisa: a generalização. Há autores que fazem uma distinção entre dois tipos de generalização: empíricas e teóricas (CARRAHER; MARTÍNEZ; SCHLIEMANN, 2008; MATA-PEREIRA, 2018; STYLIANIDES, 2009). Ou, até mesmo, estabelecem estratégias de generalização, como Lannin (2005). Outros autores não realizam tal distinção para o processo de generalização, como Jeannotte e Kieran (2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

Visto isso, definimos a seguinte questão que, neste trabalho, buscamos responder: *há diferentes estratégias de generalização ou ela é um processo único do raciocínio matemático?* Ademais, considerando a recente importância dada ao raciocínio matemático nos documentos curriculares e que o seu desenvolvimento é um dos objetivos da matemática escolar, além de ser necessário para a sua compreensão (BRASIL, 2018; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA, 2012; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012; STYLIANIDES, 2009), o objetivo deste trabalho é identificar as estratégias de generalização empregadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa sobre sequências.

2 O raciocínio matemático

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), o raciocínio matemático é "um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". Nesse mesmo sentido, Mata-Pereira (2018, p. 7) considera que "raciocinar matematicamente é fazer inferências de forma justificada, seja indutiva, abdutiva ou dedutivamente".

O raciocínio matemático pode ser observado a partir de dois aspectos: o estrutural e o processual, que se relacionam entre si (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). O primeiro é mais estático, se refere à forma de determinado raciocínio e está relacionado ao valor epistêmico da conclusão, englobando as etapas dedutiva, indutiva e abdutiva, enquanto o aspecto processual refere-se a narrativas sobre objetos ou relações matemáticas pela exploração das relações entre eles (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Neste trabalho, assumimos como processos de raciocínio matemático: a identificação de padrões, a exemplificação, a conjectura, a generalização, a justificação, a prova e a demonstração, ou prova formal (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Nossa abordagem teórica contempla, apenas, os mais relevantes para o objetivo do trabalho.

A conjectura, por exemplo, é um processo que, a partir do raciocínio sobre relações matemáticas, produz declarações – chamadas conjecturas – provisoriamente verdadeiras (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). A conjectura, por sua própria natureza, requer outras investigações para determinar a sua validade (STYLIANIDES, 2009). Nesse sentido, mesmo raciocínios inválidos podem ser pontos de partida para o entendimento de certas ideias (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020), já que a conjectura cria a necessidade por outros processos de raciocínio matemático para a determinação da sua validade ou não validade (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

A generalização, por sua vez, é um dos processos centrais do raciocínio matemático

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

(MATA-PEREIRA; PONTE, 2018b). Envolve afirmar que uma propriedade ou técnica se sustenta para um conjunto mais amplo de objetos matemáticos (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Ao mesmo tempo em que a generalização pode ser uma regra algébrica ou equação (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), também pode ser a extensão de uma estratégia válida em determinado caso para outros semelhantes (ARAMAN; SERRAZINA, 2020). Ou seja, pode ser entendida como uma conjectura com características próprias ou de âmbito mais geral (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018b; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012).

A identificação de padrões é um processo que "infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre relações ou objetos matemáticos" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10) e não possui um valor epistêmico. No entanto, pode estar relacionada à conjectura, já que, de acordo com Cañadas *et al.* (2007), esta última pode ser formulada a partir da observação de um número finito de casos discretos. Uma conjectura pode ser formulada após a identificação de um padrão e a determinação de termos subsequentes.

Outro aspecto que pode desencadear processos que levam à generalização e à conjectura é a geração de novos dados a partir dos fornecidos pelo problema ou tarefa em questão (CHIMONI; PITTA-PANTAZI; CHRISTOU, 2018). Esses dados são, por exemplo, "os desenhos, os exemplos numéricos [...] tabela de dados obtida de um padrão [...] uma regra, um modelo expresso com símbolos e números" (CHIMONI; PITTA-PANTAZI; CHRISTOU, 2018, p. 68-70), entre outros. Além disso, a organização e a geração de novos dados são empregues pelos alunos no início das tarefas para que consigam formular conjecturas que podem levar, novamente, à geração de mais dados (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019).

Por fim, a justificação é definida como um processo que permite mudar o valor epistêmico de uma narrativa, a partir da busca por dados e garantias (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Além desse aspecto, a justificação produzida é baseada em ideias previamente compreendidas (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011) e precisa, além de evidenciar que uma declaração é válida, proporcionar as razões pelas quais ela é válida (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018).

2.1 Estratégias de generalização e justificação

Segundo Lannin (2005), as justificações são essenciais para visualizar o entendimento dos alunos. Elas também possuem o papel de mostrar que uma generalização é válida para todos os casos do domínio em questão e, além disso, mostrar os porquês disso (LANNIN; ELLIS;

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

ELLIOT, 2011). Portanto, é importante relacionar os processos de validação à generalização do aluno.

Alguns autores entendem que uma generalização pode ser empírica ou teórica (CARRAHER; MARTÍNEZ; SCHLIEMANN, 2008; MATA-PEREIRA, 2018; STYLIANIDES, 2009). Uma generalização empírica é baseada em regularidades obtidas a partir da exploração de poucos exemplos ou casos particulares (STYLIANIDES, 2009), enquanto uma generalização teórica é obtida a partir da atribuição de um modelo aos dados observados (CARRAHER; MARTÍNEZ; SCHLIEMANN, 2008).

Estratégia		**Descrição**
Não explícitas	Contagem	Desenhar uma figura [...] para representar a situação para contar o atributo desejado.
	Recursiva	Obtenção dos termos subsequentes com base nos termos anteriores.
Explícitas	Objeto-inteiro	Uso de uma porção como unidade para construir uma unidade maior pela multiplicação (exemplo: 3 maçãs custam R$ 8,00, então 9 maçãs custam R$ 24,00).
	Tentativa e erro	Adivinhar uma regra sem se preocupar com o porquê de ela funcionar. Geralmente, envolve experimentação com várias operações e números dados na situação-problema.
	Contextual	Construção de uma regra baseada em informação dada na situação; relacionar a regra a uma técnica de contagem.

Quadro 1 - Estratégias de generalização
Fonte: adaptado de LANNIN (2005, p. 234)

Lannin (2005) também discute sobre algumas estratégias de generalização, elencadas no Quadro 1. De acordo com o autor, a tentativa e erro é uma estratégia frequentemente validada por resultados empíricos, enquanto a estratégia contextual é a única que possui, de forma consistente, uma conexão com o problema em questão. Lannin (2005) complementa, afirmando que a generalização não pode ser separada da justificação, apresentando alguns níveis de justificação.

Nível de justificação	**Descrição**
Nível 0 – Sem justificação	Respostas que não levam à justificação.
Nível 1 – Apelo à autoridade externa	É feita referência à validade da declaração de outro indivíduo ou material.
Nível 2 – Evidência empírica	A justificação é dada pela validade de exemplos particulares.
Nível 3 – Exemplo genérico	Uma justificação dedutiva é expressa num caso particular.
Nível 4 – Justificação dedutiva	A validade é dada por meio de um argumento dedutivo que independe de casos particulares.

Quadro 2 - Níveis de justificação
Fonte: adaptado de LANNIN (2005, p. 236)

Segundo Lannin (2005), um argumento é aceitável quando conecta a generalização a uma relação geral que existe no contexto do problema. O autor afirma que conduzir os estudantes a justificações de nível 3 e 4 pode auxiliá-los a visualizar relações mais gerais que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

existem no contexto de um problema. Vale ressaltar que a dedução é um raciocínio que infere uma declaração a partir dos dados e das premissas, sendo que a validade da declaração depende da validade dos dois últimos (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Desse modo, considerando também que Mata-Pereira (2012) compreende que as generalizações empíricas, formuladas partindo de casos particulares, envolvem raciocínios que estão relacionados com um processo pouco consistente de significação, enquanto as teóricas revelam maior capacidade de raciocínio dos alunos, por estabelecerem conexões mais complexas. O objetivo do professor, assim, deve ser o de levar os alunos a generalizações teóricas e a justificações cada vez mais baseadas em argumentos dedutivos.

3 Procedimentos metodológicos

Este trabalho se insere no âmbito das pesquisas qualitativas de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994) e tem como objetivo identificar as estratégias de generalização empregadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa sobre sequências. Para tanto, analisamos as resoluções de três duplas de alunos de uma escola pública da cidade de Cambé, no Paraná. Realizamos a tarefa em uma turma na qual o primeiro autor deste trabalho também era o professor de Matemática. A escola localiza-se na zona urbana, em um bairro próximo ao centro da cidade; na ocasião da pesquisa, possuía oito turmas de Ensino Fundamental, nos turnos matutino e vespertino, e pouco mais de duzentos alunos. As salas de aulas eram pequenas e possuíam, além das carteiras para os estudantes, um quadro negro. A escola não possuía computadores nas salas de aula, mas um laboratório de informática com vinte notebooks.

A turma na qual foram coletados os dados funcionava no período vespertino e possuía cerca de dezoito alunos. As duplas foram formadas pelos próprios alunos, sendo que foi possível gravar em áudio a resolução de quatro delas, devido à quantidade de gravadores disponíveis. Foram escolhidas duas duplas de alunos com desempenho bom em Matemática e outras duas com desempenho mediano na disciplina, para que fossem obtidos dados mais condizentes com a realidade do restante da turma. Neste trabalho, apresentamos as resoluções de três duplas, que foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas para a análise. Com o intuito de preservar a confidencialidade dos participantes da pesquisa, foram atribuídos nomes fictícios aos alunos, preservando-se o gênero.

Para a obtenção dos dados, adaptamos uma tarefa de Rivera e Becker (2011), que pode ser visualizada na Figura 1. Tal tarefa foi escolhida porque estava dentro do conteúdo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

programático da turma. Até o momento da pesquisa, os alunos já haviam estudado equações do primeiro grau e estavam iniciando o estudo de sequências. Além disso, a resolução de exercícios era uma prática comum nessa turma.

Sequência de pontos de W

Considere a sequência dos pontos de W abaixo.

Termo 1 Termo 2 Termo 3

a) Quantos pontos há no termo 6? Explique.

b) Quantos pontos há no termo 37? Explique.

c) Encontre uma fórmula para o número total de pontos no termo n. Explique como você obteve sua resposta. Se você obteve sua fórmula numericamente, explique-a nos termos do padrão de pontos acima.

Figura 1 - Tarefa aplicada aos alunos
Fonte: RIVERA e BECKER (2011, p. 355)

Por meio dos dados obtidos, buscamos identificar as estratégias de generalização que os alunos produziram. Para tanto, elaboramos o Quadro 3, que sintetiza as estratégias esperadas de acordo com a tarefa aplicada aos alunos. Para determinar se uma generalização era empírica ou teórica, ou mesmo se o aluno generalizou, consideramos as justificações produzidas. Portanto, com base nos textos da literatura sobre o tema (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008; LANNIN, 2005; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA, 2012, 2018), no Quadro 3 apresentamos a estratégia de generalização com o processo de validação do aluno.

O processo de identificação de padrões foi adicionado ao Quadro 3 por sua importância na tarefa. A identificação de padrões é o processo de raciocínio matemático que permite a generalização, seja empírica ou teórica. Entendemos que, nesse tipo de tarefa, sem identificar o padrão, não se produz uma generalização. A estratégia da generalização, por sua vez, está determinada de acordo com o processo de validação empregado.

Segundo Lannin (2005), justificações dedutivas ou exemplos genéricos são os processos de validação que conectam a generalização a relações gerais da situação dada. Portanto, justificações dedutivas indicam uma generalização teórica, que atribui um modelo a partir da observação dos dados fornecidos pelo problema em questão. Por outro lado, uma justificação empírica pode indicar uma generalização empírica, por exemplo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

	Estratégia da generalização	Descrição	Processo de validação relacionado
Identificação de padrões	Generalização teórica	Atribuição de um modelo que representa os dados observados e que é construído a partir dos próprios dados.	Justificação dedutiva Exemplo genérico
	Generalização empírica	Construção de um modelo a partir da observação de casos particulares.	Justificação empírica
	Tentativa e erro	Determinar uma regra sem saber o porquê da sua validade.	
	Estratégia recursiva	Determinação dos próximos termos a partir dos anteriores sem a necessidade de figuras.	Apelo à autoridade externa
	Contagem	Desenhar uma figura [...] para representar a situação para contar o atributo desejado.	

Quadro 3 - Estratégia da generalização
Fonte: autoria própria

Em resumo, a identificação de padrões é o primeiro passo para a produção de uma generalização na tarefa em questão, seja empírica ou teórica. No Quadro 3, a linha pontilhada que separa a identificação de padrões das estratégias de generalização indica essa transição, bem como as linhas pontilhadas que separam as seguintes estratégias de generalização: *generalização empírica*, *tentativa e erro*, *estratégia recursiva* e *contagem*. Todas essas estratégias de generalização estão ligadas a justificações empíricas e entendemos que o aluno possa transitar de uma estratégia a outra durante a resolução de uma tarefa. Além disso, compreendemos que algumas estratégias envolvem raciocínios mais complexos que outras, na seguinte ordem, das que envolvem raciocínios menos complexos para mais complexos: *contagem*, *estratégia recursiva*, *tentativa e erro* e *generalização empírica*.

4 Resultados

Nesta seção apresentamos as resoluções da tarefa pelas três duplas de alunos, assinalando que selecionamos os trechos das transcrições mais relevantes para a pesquisa. Além disso, há uma descrição das resoluções dos alunos, na qual também são evidenciadas as suas estratégias de resolução.

4.1 Gilmar e Jean

A dupla composta por Jean e Gilmar começou a resolver a primeira questão da tarefa, buscando identificar como aumentava o número de pontos da figura a cada termo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

> *Jean: Vamos fazer então. 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3... Por que 13? [Referindo-se ao número de pontos do termo 4].*
> *Gilmar: De 2 em 2. Conta de 2 em 2.*
> *Jean: Não entendi. 2, 3, 4, 5. Aumenta em 5.*
> *Gilmar: Calma aí.*
> *Jean: Você vai ficar fazendo o desenho?*
> *(Diálogo entre Gilmar e Jean, 2019).*

Desse diálogo, depreendemos que os alunos estavam tentando compreender de que maneira o número de pontos aumentava de um termo para o outro. Ou seja, estavam a caminho de empregar o processo de raciocínio matemático de identificação de padrões. A princípio, fazendo isso incorretamente, já que Gilmar diz que o número de pontos aumenta de 2 em 2 e Jean diz que o número de pontos aumenta de 5 em 5. Com o intuito de perceber relações da sequência que ainda não eram claros para ele, Gilmar utiliza a estratégia de generalização de *contagem*. Isso fica explícito quando Jean diz a ele: *Você vai ficar fazendo o desenho?*.

> *Jean: Você está contando em quantos?*
> *Gilmar: Contando de 4 em 4.*
> *Jean: É de 4 em 4, mesmo? Tem que ser o número 5, não é?*
> *Gilmar: É de 4 em 4.*
> *Jean: Verdade.*
> *Gilmar: Olha por que é de 4 em 4: 5, aqui vai dar 9. [Referindo-se ao termo 3]*
> *Jean: Não, aqui dá 10. Conta. [Referindo-se ao termo 3]*
> *Gilmar: É, então é 5 em 5.*
> *Jean: Então. 1, 2, 3, 4, 5. Deu 5. 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4, 5. Contei errado, foi? 1, 2, 3, 4, 5.*
> *Gilmar: É 9 mesmo. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*
> (Diálogo entre Gilmar e Jean, 2019).

Depois, Gilmar aparenta ter identificado um padrão, ao responder a seu colega que estava contando de 4 em 4. Ou seja, o número de pontos a cada termo aumentava de 4 em 4. Mas Jean, por contar incorretamente o número de pontos do termo 2, dizendo ao colega que era 10, o deixa em dúvida. Contudo, logo depois, Gilmar diz: *É nove mesmo*, enquanto contava novamente o número de pontos do termo 2.

> *Professor: Deu certo aí? Deu 25? [Referindo-se ao número de pontos do termo 6]*
> *Gilmar: 25.*
> *Professor: Por quê?*
> *Gilmar: Somando de 4 em 4.*
> *Professor: Somando de 4 em 4? Somando o quê?*
> *Gilmar: Aumentando de 4 em 4.*
> *Professor: Por que aumentou?*
> *Gilmar: Porque, assim, esse aqui vai dar 5, daí mais 4...*
> *Professor: Ah, os pontinhos.*
> *Gilmar: É.*
> *Professor: Daí você foi contando?*
> *Gilmar: Sim.*
> (Diálogo entre o professor e Gilmar, 2019).

Então, os alunos são questionados pelo professor sobre a resposta da primeira questão

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

da tarefa, que pedia o número de pontos do termo 6. Gilmar diz que tal termo possui 25 pontos. Quando questionado sobre o porquê da sua resposta, ele diz: *Somando de 4 em 4* e *Aumentando de 4 em 4*. Ou seja, foi empregado o processo de raciocínio matemático de *identificação de padrões*, já que os alunos identificaram uma relação recursiva entre objetos matemáticos.

Além disso, Gilmar diz que chegou ao 25, o número de pontos do termo 6, determinando cada um dos termos com base no anterior. Ou seja, o aluno utilizou uma *estratégia recursiva* de generalização, que consiste, justamente, em determinar termos subsequentes com base nos anteriores. Além disso, utiliza uma *justificação empírica*, já que se baseia em um caso particular: *esse aqui vai dar 5, daí mais 4...*, indicando que o número de pontos do termo 1 mais o padrão identificado resulta no número de pontos do próximo termo.

> *Gilmar: Se for igual, vai ser de 4 em 4. Vai ser 4 vezes 37. [Buscando o número de pontos do termo 37]*
> *Jean: 4 vezes 37? 4 vezes 37 vai dar... 28, não é? 48.*
> *Gilmar: 48?*
> *Jean: 48. Por que 148 aqui? [Referindo-se à resposta dada por Gilmar]*
> (Diálogo entre Gilmar e Jean, 2019).

Depois de resolvida a primeira questão, os alunos começam a pensar na segunda, que pedia o número de pontos do termo 37. Gilmar prontamente indica uma estratégia: multiplicar 4 por 37. Pela sua fala, ele indica que não está somente utilizando uma estratégia de tentativa e erro, já que afirma: *Se for igual, vai ser de 4 em 4*. Ou seja, o aluno atribui significado ao número 4, enquanto a estratégia de tentativa e erro pressupõe experimentações diversas com várias operações e números do problema. Além disso, Gilmar também atribui significado à operação de multiplicação, pois, se o número de pontos aumenta de 4 em 4 a cada termo tem-se, para o termo 37, 4 vezes 37. Em seguida, há alguns erros de cálculo dos alunos.

> *Professor: 37 vezes 4? Por que 37 vezes 4?*
> *Gilmar: Foi crescendo de 4 em 4. Daí eu fiz 4 vezes 37.*
> *Professor: Isso mesmo. Está indo no caminho certo. Mas olha, testa isso aqui para essas três figuras. Será que dá certo? [Referindo-se aos primeiros três termos]*
> *Jean: Como assim? Faço 4 vezes 5?*
> *Professor: 4 vezes 1, porque é o termo 1.*
> *Jean: Ah, certo.*
> *Professor: Aqui é o termo 37, então foi 37 vezes 4. Agora faz 1 vezes 4, 2 vezes 4, 3 vezes 4. Vê quanto dá o resultado. Será que bate com essas bolinhas aqui?*
> *Jean: Ah, tem que dar a quantidade certa.*
> *Professor: Tem que dar igual.*
> (Diálogo entre o professor, Gilmar e Jean, 2019).

Como os alunos não conseguem avançar, o professor questiona sobre a estratégia formulada por Gilmar: 4 vezes 37. Nesse momento, Gilmar elimina qualquer dúvida sobre estar utilizando uma estratégia de generalização de tentativa e erro, já que ele atribui significado aos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

números que utiliza e à operação que realiza com eles. Gilmar diz: *Foi crescendo de 4 em 4, daí eu fiz 4 vezes 37*. Ou seja, ele utiliza o 4 por ser o padrão que identificou, o 37 por ser o número do termo e a multiplicação por compreender que, um aumento de 4 em 4 a cada termo até o termo 37 é o mesmo que multiplicar 4 por 37.

No entanto, essa estratégia ainda não estava correta. Diante disso, o professor pede que os alunos testem a estratégia que construíram para termos cuja quantidade de pontos já era conhecida, como os termos 1, 2, 3 ou 6. Nesse momento, os alunos estão próximos de uma generalização, mas, para tanto, ainda faltam justificações.

> *Jean: Aqui, olha. 4 vezes 1 deu 4. 4 vezes 8, 32, mas não sei de onde veio esse 8. Aí, 4 vezes 3 é 12.* [Testando a estratégia nos três primeiros termos]
> *Professor: Não, calma aí. Você está pensando certo, mas no finalzinho está dando alguma coisa errada. Vamos pensar. 4 vezes 1. Ou seja, 4 vezes esse termo. 4, né? Quanto que faltou para dar essas bolinhas?* [Referindo-se ao termo 1]
> *Jean: Ah, eu tiro 1.*
> *Professor: Tira 1? Daí vai dar 3.*
> *Jean: Ah, eu tenho que dar o valor estimado aqui. Então tem que aumentar?*
> *Professor: Aumentar quanto?*
> *Jean: 1. Vai dar 5.*
> *Professor: Para o termo 2. Quatro vezes 2?*
> *Jean: Quatro vezes 2? Deixa eu ver aqui. É 8.*
> *Professor: E aqui tem quantos?*
> *Jean: 9.*
> *Professor: Então para o termo 37 o que você vai ter que fazer?*
> *Jean: 37? Eu tenho que aumentar 1, eu acho.*
> *Professor: Tenta para o 37 e vê se vai dar certo.*
> *Gilmar: Esse vai dar cento e 149.*
> (Diálogo entre o professor, Gilmar e Jean, 2019).

No início do diálogo anterior, Jean revela algumas dificuldades com os testes sugeridos pelo professor, que acaba intervindo, novamente, para auxiliar os alunos. O professor pede que os alunos testem a estratégia que haviam construído para os termos 1, 2 e 3, cuja quantidade de pontos já era conhecida. Então, a estratégia que montaram, de multiplicar o número do termo por 4, sempre resultava em um ponto a menos do que o termo realmente tinha. Com isso, Jean percebe que ela deveria ser aprimorada:

> *Jean: Eu tenho que aumentar 1.*
> *Gilmar: vai dar 149.*
> (Diálogo entre Jean e Gilmar, 2019).

Portanto, os alunos produziram uma *generalização empírica*. Eles atribuíram significado aos números e à operação que utilizaram. Essa generalização é suportada por uma *justificação empírica*, já que os alunos se basearam em casos particulares para dar suporte a ela.

4.2 Gisele e Manoel

A seguir, trazemos a resolução da dupla formada por Gisele e Manoel. É possível perceber que, logo no início, Manoel aparenta ter identificado um padrão ao verificar que o número de pontos aumentava de 4 em 4 a cada termo.

> *Manoel: De 4 em 4... 8. 4, 8, 12, 16, 24. Menos 1, 23.* [Referindo-se ao número de pontos do termo 6]
> *Professor: 4 mais 16?*
> *Manoel: Vezes 6, professor.*
> *Professor: A resposta é o quê? A figura 6 tem quantos?*
> *Manoel: Porque é de 4 em 4, professor. Daí, multiplica, daí diminui 1.*
> (Diálogo entre o professor e Manoel, 2019).

De fato, Manoel percebe como o número de pontos está aumentando a cada termo, de 4 em 4. Portanto, o aluno empregou o processo de raciocínio matemático de *identificação de padrões*, pois identificou a relação recursiva da sequência dada na tarefa. No início do diálogo, quando Manoel conta *4, 8, 12, 16, 24*, ele está calculando a multiplicação de 4 por 6. O aluno já havia identificado que o número de pontos aumentava de 4 em 4 a cada termo. Então, buscando uma resposta para a primeira questão da tarefa, ele multiplicou o 4 por 6. Do resultado dessa multiplicação, Manoel subtrai 1.

> *Manoel: Olha, professor. Aqui está certo, porque aqui deu 5. 5 mais 4? 9. Aqui tem 9.* [Referindo-se ao termo 2]
> *Professor: Isso mesmo. Aqui tem quantos?* [Referindo-se ao termo 3]
> *Manoel: Não calculei esse aí. É mais 4? Dá... 14? Não. 13.*
> *Professor: 13. Vê se tem 13 mesmo.*
> *Manoel: ... 11, 12, 13. 13.*
> *Professor: 13. Está crescendo de quanto em quanto?*
> *Manoel: De 4 em 4. [...] Então está certo, professor. Dá 23. Sabe por quê? Olha, 4 vezes 6 dá 24, daí menos 1.* [Referindo-se ao termo 6]
> (Diálogo entre o professor e Manoel, 2019).

A dupla não avança na elaboração de outras estratégias. Então, Manoel retoma a identificação do padrão que tinha realizado anteriormente, dessa vez explicitando como percebeu que o número de pontos aumentava de 4 em 4 a cada termo. Depois, repete a mesma estratégia que já havia apresentado: $4 \times 6 - 1$. No entanto, o aluno não apresenta justificações.

> *Professor: Olha, você já identificou que cresce de 4 em 4. Como o 6 é pequeno, dá para ir contando de 4 em 4. Quanto vai ter o termo 4?*
> *Manoel: 14, 15, 16, 17. 17.*
> *Professor: 17. E o termo 5? E o termo 6?*
> *Manoel: Ah, entendeu.*
> *[...]*
> *Manoel: 6 vezes 3? 6 vezes 3, não. 6 vezes 4?*
> *Professor: 24.*
> *Manoel: Menos 1?*
> *Professor: Menos 1, 23. Mas por que menos 1?*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

Manoel: Porque é 2 vezes o número que acrescenta. Aqui acrescenta 3. 2 vezes 3?
Professor: 3 o quê?
Manoel: 3 bolinhas aqui.
Professor: Mas essa é a primeira figura.
Manoel: Então, mas vai sempre acrescentando 3.
(Diálogo entre o professor e Manoel, 2019).

O professor faz a sugestão de determinar o próximo termo com base no anterior. A princípio, Manoel diz ter compreendido a proposta. No entanto, pouco tempo depois, ele retoma sua estratégia anterior: $4 \times 6 - 1$. Não foi possível compreender o porquê de Manoel utilizar tal estratégia. Além disso, o aluno não consegue fornecer uma justificação clara para a mesma. Assim, podemos dizer que Manoel estava adotando a estratégia de generalização de *tentativa e erro*.

Professor: Fez as contas? Aqui tem 5. Aqui tem quantas? [Referindo-se ao termo 2]
Manoel: Tem 9.
Professor: 9. Acrescentou quantas?
Manoel: Acrescentou 4.
Professor: E daqui para cá?
Manoel: Dá 4. Ah, então tinha feito certo. É 4 em 4, então?
Professor: 4 em 4. Quantos vai ter a figura 4?
Manoel: Quantos que deu aqui? Ah, entendi.
Professor: Entendeu, Gisele?
Manoel: Então dá 25. [Referindo-se ao termo 6]
Professor: Explica com as suas palavras.
[...]
Professor: Explica como que você pensou para chegar no resultado. Como que você chegou no 25?
Manoel: Cresce de 4 em 4. Daí você vai fazendo os cálculos e dá.
Professor: A figura 4 vai ter quantos, se acrescenta de 4 em 4?
Manoel: Dá 17.
Professor: E a 5?
Manoel: A 5 dá 21.
Professor: E a 6?
Manoel: 25.
(Diálogo entre o professor e Manoel, 2019).

Mais uma vez, o professor sugere que Manoel utilize outro modo de obter a resposta da primeira questão da tarefa, determinando o próximo termo com base no anterior. Ao fazer isso, Manoel utiliza a *estratégia recursiva* de generalização. O aluno a sustenta com uma *justificação empírica*, pois se baseia em casos particulares, os termos 4, 5 e 6, que foram determinados com base nos anteriores. Manoel diz: *Cresce de 4 em 4. Daí você vai fazendo os cálculos e dá*.

Professor: Vamos lá. O que você fez aí?
Manoel: Olha, professor, deixa eu lembrar. Deu 5 a primeira, né, professor? Sei lá o que eu fiz, aí eu pensei: se deu 5, daí eu fiz 37, que é o que nós vamos ter que chegar. Daí diminui 1 um, dá o resultado.
Professor: Vamos lembrar dessa conta. 4 vezes 6 deu 24
Manoel: Ah, acrescenta mais 2.
Professor: Mais 2? Vamos fazer um teste aqui. Olha, essas figurinhas a gente sabe quantas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

> *bolinhas tem, porque é fácil contar. Aqui você fez 4 vezes 3, né? Se você fizer 4 vezes 3, o que acontece*? [Referindo-se ao termo 3]
> *Manoel: 4 vezes 3? Não chega no resultado, eu acho. Eu acho que dá 1 a menos. 4 vezes 3 dá 12.*
> *Professor: 12. Falta quanto para chegar aqui?*
> *Manoel: 1.*
> *Professor: E no 2? Quatro vezes 2 dá quanto?*
> *Manoel: 4 vezes 2 dá 8. Aí acrescenta 1. Dá 9.*
> *Professor: Bate com a quantidade aqui? E aqui?*
> *Manoel: Bate também.*
> *Professor: 4 vezes 1?*
> *Manoel: 4. Mais 1, 5.*
> *Professor: E aqui?*
> *Manoel: Ah, entendi.*
> (Diálogo entre o professor e Manoel, 2019).

Então, sobre a segunda questão da tarefa, Manoel volta a utilizar estratégias que não foram compreendidas. Primeiro o aluno diz: *se deu 5, daí eu fiz 37 [...] Daí diminui 1*. Depois, quando o professor pede que ele compare com a estratégia que elaborou na primeira questão, Manoel afirma: *acrescenta mais 2*. Entendemos que Manoel estava utilizando a estratégia de generalização de *tentativa e erro*, pois utilizava números ao acaso em suas operações. Mas, com o auxílio do professor, Manoel começa a testar a estratégia de multiplicar o 4 pelo número do termo e a compará-la com o número de pontos dos termos já disponíveis, que eram 1, 2, 3 e 6.

Com isso, Manoel parece ter elaborado uma nova estratégia: 4 vezes o número do termo mais 1. O aluno chega a essa conclusão por meio dos testes com os demais termos. Manoel conclui que tal estratégia está correta com a seguinte fala: *4 vezes 3? Não chega no resultado [...]. Dá 1 a menos*. Com isso, a estratégia de Manoel se configura como uma *generalização empírica*, já que surge a partir da observação de casos particulares, apoiada por uma *justificação empírica*, visto que Manoel sustenta a generalização também com base em casos particulares. Depois disso, Manoel e Gisele ainda complementam, afirmando que o termo 37 possui 149 pontos. Gisele resume toda a estratégia da dupla: *é só multiplicar o número do termo por 4 e acrescentar 1 que dá o resultado*.

> *Manoel: Olha, fiz aquilo lá que você falou.*
> *Professor: Qual conta você fez?*
> *Manoel: Eu fiz trinta e sete vezes quatro. Dá cento e quarenta e oito. Daí aumenta um, dá cento e quarenta e nove. E o resultado é cento e quarenta e nove.*
> *Gisele: 149. Para você chegar nesse resultado é só multiplicar o número do termo por 4 e acrescentar 1 que dá o resultado.*
> (Diálogo entre o professor, Gisele e Manoel, 2019).

4.3 Emerson e Tiago

A dupla formada pelos alunos Emerson e Tiago não demora para elaborar estratégias e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

a fornecer uma resposta para a primeira questão da tarefa, como se pode notar no diálogo a seguir.

> *Professor (para a turma toda): A primeira pergunta é: no termo 6, qual seria a quantidade de pontos? Ou seja, quantos pontos vão ter lá no termo 6?*
> *Tiago: 24.*
> *Emerson: Por que 24? Eu não entendi.*
> *Tiago: Porque aumenta de 4 em 4.*
> *Jean[1]: Não, aumenta de 5 em 5.*
> *Tiago: 4 em 4. Olha, aqui tem 5, aqui tem 9, aqui tem 13. 4 em 4.* [Referindo-se aos três primeiros termos]
> (Diálogo entre o professor, Emerson, Tiago e Jean, 2019).

Logo depois de o professor realizar a leitura da tarefa com a sala toda, Tiago já fornece uma resposta para a primeira questão da tarefa. Ele diz que o termo 6 possui 24 pontos. Emerson não compreende o motivo da resposta de Tiago que, por sua vez, não explicita a estratégia que levou à sua resposta, mas revela ter empregado o processo de raciocínio matemático de *identificação de padrões*, quando diz: *aumenta de 4 em 4*. Jean, um aluno de outra dupla, diz que, na verdade, o número de pontos a cada termo aumentaria de 5 em 5. Mas Tiago reforça a sua posição e explicita, novamente, a sua identificação do padrão, quando diz: *aqui tem 5, aqui tem 9, aqui tem 13. 4 em 4*.

> *Emerson: Então vai ter o quê?* [Referindo-se ao termo 6]
> *Tiago: Vai ter 25 ou 24. Não sei.*
> *Emerson: É 25.*
> *Professor: Como é que vocês chegaram nisso?*
> *Tiago: Contando de 4 em 4.*
> *Emerson: 5 para 9? 4. 9 para 13? Mais 4.* [Referindo-se aos três primeiros termos]
> *Tiago: Mais 4. Aí nós fomos indo. Até dar termo 6.*
> *Professor: Termo 4 tem quantos, então?*
> *Tiago: Termo 4? Calma aí, calma aí. Tem 17.*
> *Emerson: 17.*
> *Tiago: Depois 21, depois 25. Termo 5 tem 21, termo 6 tem 24. Opa, 25.*
> (Diálogo entre o Emerson e Tiago, 2019).

No diálogo acima, Tiago demonstra dúvida sobre a sua própria resposta, dada anteriormente: *25 ou 24. Não sei*, ele diz. Emerson afirma que a resposta correta é 25. Quando os alunos são questionados pelo professor sobre como obtiveram tal resposta, eles revelam que utilizaram uma *estratégia recursiva* de generalização. A dupla determinou os termos 4, 5 e 6 com base nos anteriores, o que fica evidente na fala de Tiago: *Termo 4? Tem 17. [...] Depois 21, depois 25*.

> *Emerson: E o termo 37? Tem como fazer conta, né?*
> *Tiago: Tem sim.*
> *Professor: Tenta aí. Tenta fazer.*

[1] Jean, o mesmo da dupla apresentada anteriormente neste trabalho, intervém brevemente na resolução da dupla Emerson e Tiago.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

[...]
Tiago: Até o 37? Faz até o 10. Quer ver?
Emerson: 5. 7 é o quê?
Tiago: 29. Calma aí. 25, 26, 28, 29. Termo 7.
(Diálogo entre o professor, Emerson e Tiago, 2019).

Depois de responderem à primeira questão da tarefa, os alunos se dedicaram à próxima, que tinha como objetivo determinar o número de pontos do termo 37. A princípio, a dupla insinua que pode elaborar uma estratégia diferente da primeira para responder à questão. No entanto, logo depois, eles continuam utilizando a estratégia recursiva, determinando o número de pontos de cada termo com base nos anteriores, ainda que o termo 37 exigisse vários cálculos. A opção por seguir com a mesma estratégia fica evidente com a fala de Tiago, quando buscava determinar o número de pontos do próximo termo: *25, 26, 27, 28, 29. Termo 7*. Os alunos seguiram com essa estratégia até determinar o número de pontos do termo 37, como se pode ver na Figura 2.

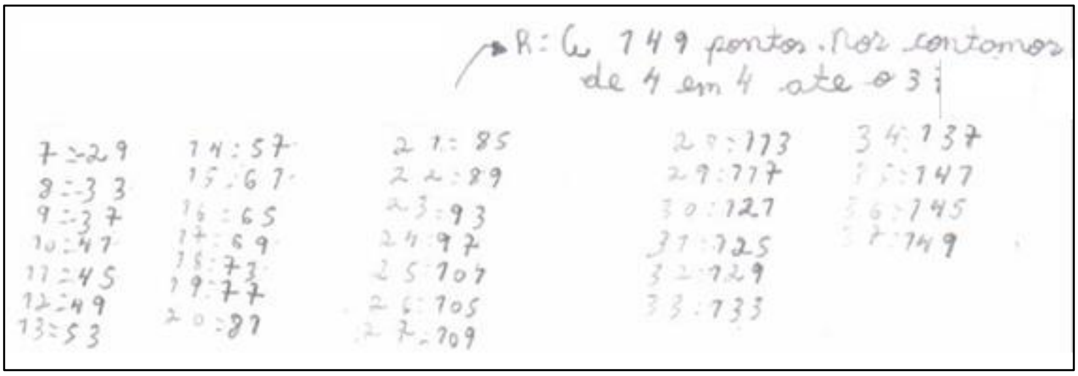

Figura 2 - Resposta de Emerson e Tiago para a segunda questão
Fonte: Dados da pesquisa

Professor: Você foi contando um por um?
Tiago: É só você olhar aqui. Eu não fui fazendo. Chegou no 100 eu fui fazendo diferente, professor.
Professor: Como você fez?
Tiago: Fui fazendo assim, chegou no 100... Chegou no 120, porque aí dava para olhar. Dava para fazer tudo a mesma coisa. É a mesma coisa da tabuada, só que diferente. [Ao dizer 120, o aluno se referia, na verdade, a 121, o número de pontos do termo 30]
Professor: Como assim?
Emerson: Eu comecei a repetir. É só olhar para o resto. É só olhar o último número de cada um.
Tiago: É só olhar aqui, olha. Chegou no 25, né. 25. Aí 29, 33, 37, 41, 45, 49.
(Diálogo entre o professor, Emerson e Tiago, 2019).

Mesmo com a necessidade de realizar cálculos repetitivos, os alunos seguiram com a estratégia recursiva até obter o número de pontos do termo 37. Isso fica bastante evidente com a resposta, que pode ser vista na Figura 2, dada pelos alunos na segunda questão: *149 pontos. Nós contamos de 4 em 4 até o 37*. No entanto, os alunos perceberam uma maneira mais rápida de determinar o número de pontos de cada um dos termos subsequentes. De acordo com eles,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

em certo momento notaram que as dezenas começavam a se repetir. Por exemplo: os termos 5, 6 e 7 eram formados, respectivamente, por 21, 25 e 29 pontos, enquanto os termos 30, 31 e 32 eram formados, respectivamente, por 121, 125 e 129 pontos, e assim por diante. De acordo com Tiago, *é a mesma coisa da tabuada*. Portanto, pode-se dizer que os alunos empregaram, novamente, o processo de *identificação de padrões*, pois perceberam uma relação recursiva nos dados que geraram.

> *Professor: E será que não tinha outro jeito de descobrir quantos pontos tem cada um?*
> *Emerson: 6 vezes 4.* [Referindo-se ao termo 6]
> *Tiago: Dá quantos?*
> *Emerson: 24.*
> *Tiago: 4 vezes 37 é 148.*
> (Diálogo entre o professor, Emerson e Tiago, 2019).

Mesmo com a resposta correta da questão, o professor pede que os alunos pensem em outra maneira de determinar o número de pontos do termo 37. Diante disso, Emerson fala em 6 vezes 4, talvez pensando na estratégia elaborada na primeira questão como inspiração para a segunda, já que ela pedia o número de pontos do termo 6. Então, Tiago multiplica 4 por 37, obtendo 148. Possivelmente, multiplicando por 4, que foi o padrão identificado na sequência, pelo número do termo.

> *Tiago: 4 vezes 37 dá 148. Mais 1.*
> *Professor: O que é o 4?*
> *Tiago: 37 é o termo.*
> *Professor: É o termo. Isso mesmo.*
> *Tiago: De onde que eu tirei o 4, mesmo? Ah, 4 é o... 4 em 4.*
> *Professor: Isso mesmo. E por que mais 1?*
> *Tiago: Isso que é o estranho.*
> *Professor: Por que nesse caso tem que ser mais 1? E como você sabe que isso dá certo?*
> *Tiago: Porque eu somei. 4 vezes 37 dá 148. Aí eu coloquei mais 1.*
> *Professor: Por que mais 1?*
> *Tiago: Isso que eu estou tentando saber.*
> (Diálogo entre o professor e Tiago, 2019).

Diante da estratégia utilizada pelos alunos para obter o número de pontos do termo 37, o professor questiona-os sobre o significado de cada um dos números que utilizaram. Então, Tiago afirma que 37 é o termo que se quer o número de pontos e 4 é o padrão identificado na sequência. Como os alunos atribuíram significado aos números, desenvolveram uma *generalização empírica*, já que se baseava na determinação do número de pontos do termo 6, quando multiplicaram 6 por 4. No entanto, os alunos não conseguem atribuir um significado para o número 1 que foi somado ao resultado da multiplicação de 4 por 37. Possivelmente, como já sabiam que a resposta correta era 149, os alunos somaram 1 a 148 para chegar a ela. Um indício disso é quando Tiago diz: *4 vezes 37 dá 148. Aí eu coloquei mais 1*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

> *Professor: Você sabia quanto era o da figura 37 já?*
> *Tiago: Não, eu somei.*
> *Professor: Somou aqui, né. E daí chegou em quanto?*
> *Tiago: 149.*
> *Professor: Isso. Antes de você chegar aqui, você chegou em 148. Por que você somou 1?*
> *Tiago: Porque eu pensei, com a minha cabeça.*
> *Professor: Pensou o quê?*
> *Tiago: Mais 1.*
> *Professor: Para...*
> *Tiago: Ficar 149.*
> (Diálogo entre o professor e Tiago, 2019).

No diálogo acima, há mais alguns questionamentos do professor, que pergunta a Tiago o porquê de ele ter somado 1 ao resultado da multiplicação de 4 por 37. Tiago diz que realizou essa operação para obter 149. Consideramos que isso constitui uma *justificação empírica*, que dá validade à generalização empírica que os alunos desenvolveram. Isso porque, como já sabiam que o número de pontos do termo 37 era 149, por terem determinado de outra maneira anteriormente, eles se basearam nesse caso para validar a generalização empírica que construíram. Ou seja, basearam-se na validade de um caso particular, o que constitui uma justificação empírica.

5 Discussão e considerações finais

Neste artigo, identificamos as estratégias de generalização empregadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa sobre sequências. Concluímos que tal objetivo foi alcançado, já que foram identificadas as estratégias de generalização utilizadas por cada uma das duplas aqui analisadas. Foram observadas as estratégias: *contagem*, *tentativa e erro*, *estratégia recursiva* e *generalização empírica*. A seguir, detalhamos aquelas empregadas por cada dupla na resolução da tarefa.

A dupla formada pelos alunos Jean e Gilmar, a princípio, adotou a *contagem* como estratégia de generalização. Isso fica evidente a partir de uma fala de Jean para Gilmar – *Você vai ficar fazendo o desenho?* – enquanto ele desenhava o próximo termo a partir dos três primeiros fornecidos pela tarefa. A contagem consiste em desenhar uma figura para contar o atributo desejado (LANNIN, 2005).

É provável que Gilmar quisesse descobrir o número de pontos do termo 6 – essa era a primeira questão da tarefa – desenhando os próximos termos. No entanto, a dupla passa a discutir a tarefa e identifica um padrão ao perceber que o número de pontos aumentava de 4 em 4 a cada figura. Com isso, os estudantes adotam a *estratégia recursiva* (LANNIN, 2005) ao

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

determinarem o termo 6 a partir do termo 5 e, o 5, a partir do 4, e assim sucessivamente. Além disso, adotam uma *justificação empírica* ao dizerem que sua estratégia se sustenta porque o primeiro termo, somado com 4, o padrão identificado pelos alunos, era igual a 9, assim como mostrado no termo 2.

Quando buscam uma resposta para a segunda questão da tarefa, os alunos adotam a *generalização empírica* como estratégia. Ela se diferencia da estratégia recursiva porque os estudantes construíram uma regra para determinar o número de pontos do termo 37, sem precisar determinar o número de pontos de todos os termos anteriores a ele. Para validar a generalização, os alunos utilizam casos particulares como exemplos, configurando uma *justificação empírica* (LANNIN, 2005).

Na resolução dessa dupla foi possível percebermos que os alunos aprimoraram as estratégias de generalização adotadas. O primeiro fator que permitiu isso foi a identificação de um padrão, o que permitiu a estratégia recursiva. A segunda questão da tarefa não privilegiava o uso da estratégia recursiva, já que o número do termo era 37 e seria necessário determinar o número de pontos de todos os termos anteriores a ele. Com isso, a partir de discussões entre a dupla e com o professor, os alunos empregaram uma generalização empírica, já que elaboraram uma regra para determinar o número de pontos do termo 37. A justificação empírica que empregaram foi a verificação da validade da regra a partir dos termos cujo número de pontos já era conhecido.

A dupla Manoel e Gisele inicia a resolução da tarefa com a identificação do padrão. Manoel o faz quando diz: *de 4 em 4 [...] 4, 8, 12, 16, 24*, quando calculava a multiplicação de 4 por 6, o termo que deveriam descobrir o número de pontos. Depois, a dupla tenta uma generalização por *tentativa e erro*, já que Manoel começa a construir regras com os diversos números que aparecem na tarefa (LANNIN, 2005). Até esse momento, não foram apresentadas validações para as estratégias construídas pela dupla.

Após um diálogo com o professor, a dupla muda sua estratégia e constrói uma *estratégia recursiva*, passando a determinar o número dos termos 4, 5 e 6. A validação da estratégia ocorre por meio da *justificação empírica*, já que os alunos se baseiam na validade para os três primeiros termos. Para determinar o número de pontos do termo 37, os alunos utilizam uma generalização empírica, ao construírem uma regra que se baseia na observação de casos particulares. A validação que empregaram é uma *justificação empírica*, já que se apoiaram na validade da estratégia em casos particulares já conhecidos.

Novamente, destacamos a importância da identificação de padrões para a realização dessa tarefa. Mesmo quando a dupla adotou a tentativa e erro como estratégia, sempre fizeram

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

uso do número 4, que era a quantidade de pontos que aumentava a cada termo, indicando que já haviam identificado um padrão. Depois disso, após diálogos com o professor, os alunos ainda empregaram a estratégia recursiva e a generalização empírica, sempre se apoiando em justificações empíricas.

Os alunos Tiago e Emerson também identificam um padrão assim que começam a resolver a tarefa, quando Tiago diz: *Olha, aqui tem 5, aqui tem 9, aqui tem 13. 4 em 4*. A partir disso, os alunos determinam a quantidade de pontos do termo 6, respondendo à primeira questão da tarefa. Eles fazem isso determinando o número de pontos de cada termo com base no anterior, ou seja, utilizando uma *estratégia recursiva* (LANNIN, 2005).

Na segunda questão da tarefa, pedia-se o número de pontos do termo 37. E, apesar da dificuldade imposta pela questão para a utilização de uma estratégia recursiva, é o que Tiago e Emerson fazem, como mostra a Figura 2. Os estudantes determinaram o número de pontos de todos os 37 primeiros termos com base no anterior, mantendo o uso de uma estratégia recursiva.

Depois disso, são questionados pelo professor sobre outras maneiras de obter a resposta da questão. Os alunos constroem uma regra para determinar o número de pontos do termo em questão: $37 \times 4 + 1$. Os estudantes, quando questionados, atribuem significados aos números. Concluem que 37 é o número do termo e 4 é o número de pontos que aumenta a cada termo. No entanto, não atribuem significado para o número 1, justificando-o como uma necessidade para se obter 149. Ou seja, uma *justificação empírica*, visto que se apoia em um caso particular (LANNIN, 2005). Dessa maneira, a estratégia que utilizaram também se configura como uma *generalização empírica* por se basear em casos particulares.

Além do objetivo do trabalho, de identificar as estratégias de generalização empregadas por cada dupla, entendemos que há outras considerações interessantes a serem feitas e que podem contribuir no debate sobre o assunto. Verificamos que as justificações são essenciais para entender as generalizações produzidas pelos estudantes e que é impossível separá-las, como destaca Lannin (2005).

A dupla Tiago e Emerson, por exemplo, constrói a seguinte generalização para determinar o número de pontos do termo 37: $37 \times 4 + 1$. Não é possível dizer, prontamente, se essa estratégia constitui uma generalização empírica ou teórica. O que permite determinar isso é a justificação adotada pelos estudantes. Quando eles explicitam uma justificação empírica, baseada em casos particulares, revelam que a generalização que construíram também se apoiava em casos particulares, configurando, assim, uma generalização empírica (CARRAHER; MARTÍNEZ; SCHLIEMANN, 2008). A justificação dada pelo estudante, seja escrita ou verbalizada, propicia evidências do seu raciocínio.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

Também, percebemos que os alunos, no decorrer da tarefa, utilizaram diferentes estratégias de generalização. Exemplificamos com a dupla Jean e Gilmar. Para a primeira questão, que pedia o número de pontos do termo 6, foi empregada a estratégia recursiva. Mas, na segunda questão, na qual se pedia o número de pontos do termo 37, os estudantes utilizaram a generalização empírica, mesmo já tendo elaborado uma estratégia anteriormente. Sabemos que a questão não privilegiava a estratégia recursiva pelos repetitivos cálculos que demandaria. Portanto, os estudantes utilizaram outra estratégia de generalização. Assim, a tarefa também propicia o desenvolvimento de estratégias que envolvem raciocínios mais complexos.

Visto isso, podemos responder à questão colocada no início deste trabalho: *há diferentes estratégias de generalização ou ela é um processo único do raciocínio matemático?* Na nossa visão, existem diferentes estratégias de generalização. Entendemos que, se a generalização for considerada um processo único, somente será válida aquela que se apoiar em uma justificação dedutiva. Uma generalização nesses moldes, tratada neste trabalho como generalização teórica, é mais desejável por envolver raciocínios de maior complexidade (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). No entanto, apontamos que, para a matemática escolar, é útil observar a generalização como um processo mais amplo, que pode se apoiar em evidências empíricas, para compreender de que maneira os alunos podem empregar estratégias mais sofisticadas de generalização.

Por fim, destacamos que nenhuma dupla desenvolveu uma generalização teórica. Não cabe, aqui, especularmos sobre as razões disso; apenas, destacamos que são necessários futuros estudos e, possivelmente, pensar em tarefas ou ações do professor que propiciem o desenvolvimento de generalizações teóricas.

Referências

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de Raciocínio Matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 9, n. 18, p. 118-136, 2020.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 67, p. 441-461, 2020.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

CAÑADAS, M. C.; DEULOFEU, J.; FIGUEIRAS, L.; REID, D.; YEVDOKIMOV, O. The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. **Journal of Teaching and Learning**, Windsor, v. 5, n. 1, p. 55-72, 2007.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a12

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM**, Hamburg, v. 40, n. 1, p. 3-22, 2008.

CHIMONI, M.; PITTA-PANTAZI, D.; CHRISTOU, C. Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 98, n. 1, p. 57-78, 2018.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J. K. Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. **Mathematical Thinking and Learning**, Windsor, v. 7, n. 3, p. 231-258, 2005.

LANNIN, J. K.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

MATA-PEREIRA, J. **O raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, J. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 96, n. 2, p. 781-801, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Teachers' Actions to Promote Students' Justifications. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 3, p. 487-505, 2018a.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018b.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 4, p. 552-570, 2018.

OCDE. **Conhecimentos e habilidades em Ciências, Leitura e Matemática:** Estrutura da Avaliação do PISA 2006. São Paulo: Editora Moderna, 2007.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2019.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, 2012.

RIVERA, F.; BECKER, J. Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. *In:* CAI, J.; KNUTH, E. (org.). **Early Algebraization. Advances in Mathematics Education**. Springer: Berlim, 2011. p. 323-355.

STYLIANIDES, G. J. Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, Windsor, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.

Submetido em 24 de Novembro de 2021.
Aprovado em 18 de Julho de 2022.