QUADRADOS LATINOS OBTIDOS POR MEIO DE TÉCNICAS DE CONFUNDIMENTO EM ENSAIOS FATORIAIS[1]

Maria Cristina Stolf Nogueira[2]*; José Eduardo Corrente[2]; Sônia Maria de Stefano Piedade[2]

[2]Depto. de Ciências Exatas - USP/ESALQ, C.P. 9 - CEP: 13418-900 - Piracicaba, SP.
*Autor correspondente <mcsnogue@carpa.ciagri.usp.b>

RESUMO: Os esquemas em quadrado latino tem se mostrado muito úteis na experimentação agronômica e zootécnica. O modo de obtenção dos quadrados latinos em geral segue regras algébricas de construção a partir de operações básicas sobre o conjunto de números inteiros positivos, mais especificamente, sobre as classes de resto módulo (m). Da mesma forma, considerando um ensaio instalado em esquema fatorial, ao se usar a técnica do confundimento, formam-se tantos quadrados latinos ortogonais quantos forem os níveis de tratamento. Tais esquemas conduzem a repetições ortogonais de quadrados latinos. Assim, o objetivo deste trabalho é abordar a aplicação desta técnica de modo a facilitar o planejamento. É apresentado um exemplo de um ensaio fatorial 3 x 3 x 3 sem repetições.
Palavras-chave: quadrado latino, confundimento, ensaios fatoriais

LATIN SQUARES OBTAINED BY CONFOUNDING TECHINIQUES IN FACTORIAL DESIGNS

ABSTRACT: Latin square designs have been very useful in agriculture and animal sciences. They are, in general, obtained following algebrical rules from basic operations for positive integers and the m-modular number system. In this way, from an experiment installed in a factorial scheme, it is possible to obtain as many latin squares as the levels of treatments, through the use of a confounding technique. These schemes lead to orthogonal replications of latin squares. The aim of this work was to evaluate this technique in order to facilitate plannings. An example of a 3 x 3 x 3 factorial design without replications is presented.
Key words: latin square, counfounding, factorial design

INTRODUÇÃO

Um delineamento experimental é denominado de quadrado latino *p*x*p*, segundo Mead (1988), quando as *p*x*p* unidades experimentais são distribuídas em uma estrutura de classificação de dupla-blocagem, isto é, os blocos são tomados nos sentidos horizontal e vertical respectivamente. Sendo os *p* blocos tomados em cada sentido, com *p* unidades experimentais, e cada um dos *p* tratamentos considerados ocorre uma única vez em cada bloco estruturado em cada sentido.

O modelo matemático e a análise da variância para o quadrado latino são simples extensões do delineamento em blocos casualizados, onde os blocos são estruturados nos dois sentidos e são tradicionalmente referidos como linhas (estrutura de blocos no sentido horizontal) e como colunas (estrutura de blocos no sentido vertical). O modelo matemático para variável resposta referente a i-ésima linha com a j-ésima coluna, de acordo com Mead (1988), é o seguinte:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{k(ij)} + \varepsilon_{ij}$$

Os valores referentes à variável resposta referem-se somente para duas das três classificações de linhas, colunas e tratamentos. Isto é, cada tratamento ($\tau_{k(ij)}$) está presente em cada linha e também está presente em cada coluna, e ainda, cada linha ocorre em cada coluna. Mas somente duas classificações são requeridas para classificar unicamente cada observação. O índice *k* está associado aos tratamentos e é definido completamente pelos índices *i* e *j* de linhas e colunas; esta dependência é apresentada pela notação *k(ij)*. De acordo com Mead (1988) os efeitos do modelo podem ser estimados (como solução do sistema de equações normais) ortogonalmente através da aplicação das restrições,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0 \quad , \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{p} \tau_k = 0$$

Confrontando um experimento fatorial *pxpxp* com um quadrado latino *pxp*, segundo Winer (1971), observa-se a existência de uma relação entre eles, a qual pode ser notada no seguinte exemplo: seja um experimento fatorial 3x3x3, que quando fracionado origina um conjunto de 3 quadrados latinos 3x3 balanceados. Com o objetivo de ilustrar, considere a seguinte representação de um fatorial 3x3x3,

[1]Trabalho apresentado na 44ª. Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria e 8º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica - Botucatu, 1999.

	c_0			c_1			c_2		
	b_0	b_1	b_2	b_0	b_1	b_2	b_0	b_1	b_2
a_0	X	Y	Z	Z	X	Y	Y	Z	X
a_1	Z	X	Y	Y	Z	X	X	Y	Z
a_2	Y	Z	X	X	Y	Z	Z	X	Y

Tem-se que X representa as combinações dos níveis dos fatores A, B, e C que irão formar um quadrado latino 3x3; Y representa as combinações dos níveis dos fatores A, B e C que irão formar um segundo quadrado latino 3x3 e Z representa as combinações dos níveis dos fatores A, B e C que irão formar um terceiro quadrado latino 3x3, constituindo um conjunto de quadrados latinos balanceados.

As combinações dos níveis dos fatores A, B e C, representadas por X, podem ser agrupadas da seguinte maneira:

$a_0b_0c_0$	$a_1b_0c_2$	$a_2b_0c_1$
$a_0b_1c_1$	$a_1b_1c_0$	$a_2b_1c_2$
$a_0b_2c_2$	$a_1b_2c_1$	$a_2b_2c_0$

Esta fração 3x3 do fatorial 3x3x3, considerando os níveis do fator A (a_0, a_1 e a_2) como linhas e os níveis do fator B (b_0, b_1 e b_2) como colunas e os níveis do fator C (c_0, c_1 e c_2) como os tratamentos, pode ser representada pela seguinte estrutura

	b_0	b_1	b_2
a_0	c_0	c_1	c_2
a_1	c_2	c_0	c_1
a_2	c_1	c_2	c_0

que é a estrutura de um quadrado latino.

Nota-se ainda que, de maneira análoga, as combinações representadas por Y e Z representam as estruturas dos outros dois quadrados latinos.

Assim, verifica-se que existe uma íntima relação entre as frações 3x3 obtidas de um esquema fatorial 3x3x3 correspondentes aos componentes da interação AxBxC, que para o caso ilustrativo consiste naquelas combinações dos níveis dos fatores A, B e C que satisfaçam a relação

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,1,2 \pmod 3, \qquad (1)$$

isto é,

Quadrados Latinos	Componentes AxBxC
X	$(AB^2C)_0$
Y	$(AB^2C)_1$
Z	$(AB^2C)_2$

Os experimentos fatoriais completos são balanceados em relação a todas as combinações dos níveis dos fatores, isto é, a_i ocorre em combinação com todos os b_j e c_k e também com todas as combinações possíveis $(bc)_{jk}$ para i, j, k = 1 , ...,p. Já os quadrados latinos, originados por meio da relação (1), são parcialmente balanceados, isto é, a_i ocorre em combinação com todos os b_j e c_k, mas não ocorre em combinação com todos os possíveis pares $(bc)_{jk}$ para i, j, k = 1, ..., p. Desse modo, um quadrado latino forma uma estrutura de dados balanceado com respeito aos efeitos principais, mas é parcialmente balanceado em relação à interação com dois fatores.

O modo de obtenção do quadrado latino através da relação (1) origina-se, de acordo com Birkoff & Bartee (1970), de um sistema numérico modular construído através das classes de resto módulo (m) segundo uma operação previamente definida.

MATERIAL E MÉTODOS

No planejamento seguindo um esquema fatorial, são exigidos todos os tratamentos (originados através das combinações dos níveis dos fatores de tratamentos), o que acarreta um número excessivo de tratamentos, dificultando o controle local. Com o objetivo de controlar o erro experimental, os tratamentos podem ser subdivididos em grupos de tratamentos. Esses grupos de tratamentos são chamados de blocos.

A idéia principal é manter os blocos com o menor tamanho possível, de modo a manter a homogeneidade dentro deles.

Para obter esse controle adicional, de acordo com Winer (1971), perde-se alguma informação relativa à interação de maior ordem (ou a de menor interesse). A técnica utilizada com este objetivo é o confundimento.

Desse modo a técnica do confundimento aplicada em uma estrutura fatorial 3x3x3, por exemplo, consiste em confundir (3 - 1) = 2 graus de liberdade do efeito de blocos (os blocos aqui tem o significado de grupos de tratamentos) com algum dos efeitos envolvidos no modelo fatorial. Obtêm-se, assim, três frações 3x3 desta estrutura fatorial 3x3x3. No estudo em questão, foram confundidos 2 graus de liberdade do efeito de blocos com a interação AxBxC.

A relação utilizada para aplicar a técnica de confundimento foi

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,1,2 \pmod 3,$$

que corresponde a notação de Yates, ABC(X), de acordo com Winer (1971).

Desse modo, tem-se a geração de três frações 3x3 que, fixando o fator A como linhas, o fator B como colunas e o fator C como tratamentos, obtendo-se uma estrutura correspondente a três quadrados latinos.

A estrutura obtida é balanceada em relação aos efeitos principais e parcialmente balanceada para tratamentos em relação à interação de linhas com colunas.

Os esquemas da análise de variância para os três quadrados latinos são apresentadas a seguir nos TABELAS 1 e 2, considerando as somas de quadrados Tipo I e Tipo III do “*SAS*”. Com o objetivo de ilustrar o comentário feito anteriormente, incluiu-se nas fontes de variação a interação de linhas com colunas (AxB).

Convém chamar a atenção para a interação de linhas e colunas, com 2 graus de liberdade, considerando

TABELA 1 - Esquema da análise da variância, para uma entrada seqüencial dos efeitos no modelo em quadrado latino.

Fonte de Variação	GL	SQ Tipo I	GL	SQ Tipo III
Linhas (A)	2	SQ(A| μ)	2	SQ(A| μ, B, C, AxB)
Colunas (B)	2	SQ(B| μ, A)	2	SQ(B| μ, A, C, AxB)
Tratamentos (C)	2	SQ(C| μ, A, B)	0	SQ(C| μ, A, B, AxB)
LinhasxColunas (AxB)	2	SQ(AxB| μ, A, B, C)	2	SQ(AxB| μ, A, B, C)

TABELA 2 - Esquema da análise da variância, invertendo a seqüência de entrada das fontes de variação de tratamentos (C) e interação de linhas com colunas (AxB).

Fonte de Variação	GL	SQ Tipo I	GL	SQ Tipo III
Linhas (A)	2	SQ(A| μ)	2	SQ(A| μ, B, AxB, C)
Colunas (B)	2	SQ(B| μ, A)	2	SQ(B| μ, A, AxB, C)
LinhasxColunas (AxB)	4	SQ(AxB| μ, A, B)	2	SQ(AxB| μ, A, B, C)
Tratamentos (C)	0	SQ(C| μ, A, B, AxB)	0	SQ(C| μ, A, B, AxB)

a SQTipo I, como será mostrado posteriormente, que refere-se a soma de quadrados do resíduo, da análise da variância de um modelo em quadrado latino.

Invertendo a seqüência na entrada das fontes de variação referentes a tratamentos (C) e a interação de linhas com colunas (AxB), e considerando as somas de quadrados Tipos I e III do *"SAS",* obtêm-se o esquema da análise da variância dado na TABELA 2.

Observa-se pelas TABELAS 1 e 2 que, considerando a SQ Tipo I:

SQ (AxB | μ, A, B, C) = SQ (AxB | m , A, B) - - SQ(C | μ , A, B),

sendo que:

SQ (AxB | μ , A, B, C) corresponde a soma de quadrados da interação de linhas com colunas (AxB) ajustada para a média, linhas (A), colunas (B) e tratamentos (C), com 2 graus de liberdade.

SQ (AxB | μ, A, B) corresponde a soma de quadrados da interação de linhas com colunas (AxB) ajustada para a média, linhas (A) e colunas (B), com 4 graus de liberdade.

SQ (C | μ, A, B) corresponde a soma de quadrados de tratamentos (C) ajustada para a média, linhas (A) e colunas (B), com 2 graus de liberdade.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Consideremos, como ilustração, o conjunto de dados da TABELA 3, extraído de Gomes (1987), obtidos de um experimento instalado no esquema fatorial 3x3x3, com confundimento, referente a notação de Yates, ABC(X), de acordo com Winer (1971).

Os tratamentos apresentados nos blocos 1, 2 e 3 foram distribuídos de acordo com a aplicação das relações $(AB^2C)_0$, $(AB^2C)_1$ e $(AB^2C)_2$ respectivamente. Cada bloco corresponde a uma fração 3x3, que foi tomada como uma estrutura de quadrado latino, sendo que os níveis do fator A (0, 1, 2) foram considerados como linhas, os níveis do fator B (0, 1, 2) foram considerados como colunas e os níveis do fator C (0, 1, 2) foram considerados como tratamentos.

A seguir é apresentado a TABELA 4, referente aos resultados, para o quadrado latino 1 (bloco 1), da análise da variância considerando a SQ Tipo I do *"SAS"*. A seqüência de entrada dos efeitos seguiu o modelo matemático tradicional do quadrado latino acrescentando a este, ao invés do erro experimental, o efeito da interação de linhas com colunas (AxB).

Nota-se que o efeito da interação de linhas com colunas (AxB) corresponde ao resíduo ou o erro experimental na análise da variância do quadrado latino.

Invertendo a seqüência da entrada correspondente aos efeito de tratamentos (C) e da interação de linhas e colunas, obteve-se o seguinte resultado que consta na TABELA 5.

TABELA 3 - Dados de produção de cana-de-açúcar.

Bloco 1		Bloco 2		Bloco 3	
A B C	Produção	A B C	Produção	A B C	Produção
0 0 0	37,0	0 0 1	60,2	0 0 2	28,3
0 1 2	42,6	0 1 0	57,6	0 1 1	66,6
0 2 1	68,4	0 2 2	76,0	0 2 0	66,8
1 0 1	33,5	1 0 2	42,8	1 0 0	32,6
1 1 0	45,7	1 1 1	63,4	1 1 2	63,4
1 2 2	49,7	1 2 0	58,2	1 2 1	71,1
2 0 2	36,2	2 0 0	56,6	2 0 1	41,3

TABELA 4 - Tabela da Análise da Variância, correspondente a entrada seqüencial tradicional para o quadrado latino 1 (bloco 1).

Fonte de Variação	GL	SQ Tipo I
Linhas (A)	2	834,56888889
Colunas (B)	2	64,62888889
Tratamentos (C)	2	73,84888889
LinhasxColunas (AxB) = Resíduo	2	54,94222222
Total	8	1027,98888889

Pelos resultados apresentados na TABELA 5, observa-se que o efeito da interação de linhas com colunas (AxB) foi ajustado para a média, linhas (A) e colunas (B) apenas, enquanto que o efeito de tratamentos (C) foi ajustado para todos os efeitos inclusive para a interação de linhas com colunas (AxB). Devido a esse fato, nota-se que não restou graus de liberdade suficientes para detectar o efeito de tratamentos (C). Este fato é explicado pela maneira como o modelo foi ajustado, revelando, assim, que o efeito de tratamentos está *aliased* com o efeito da interação de linhas e colunas. Isto ocorre, por causa do balanceamento parcial dos tratamentos com a interação de linhas e colunas.

Verifica-se, ainda, que o mesmo ajuste para o efeito de tratamentos (C) ocorre quando se aplica a SQ TIPO III, independente da seqüência aplicada, como é apresentado nas TABELAS 6 e 7. E também observa-se que os resultados para a interação de linhas e colunas é igual ao apresentado na TABELA 4, independente da seqüência,.

Analogamente, se obtém as mesmas análises para os blocos de tratamentos 2 e 3 , referente a aplicação das relações $(AB^2C)_1$ e $(AB^2C)_2$, chegando-se as mesmas conclusões do que foi observado para o bloco de tratamentos 1, $(AB^2C)_0$.

TABELA 5 - Tabela da Análise da Variância, correspondente a seqüência de entrada dos efeitos da interação Linhas x Colunas (AxB) seguida do efeito de Tratamentos (C) para o quadrado latino 1 (bloco 1).

Fonte de Variação	GL	SQ Tipo I
Linhas (A)	2	834,56888889
Colunas (B)	2	64,62888889
LinhasxColunas (AxB)	4	128,791111
Tratamentos (C)	0	
Total	8	1027,98888889

TABELA 6 - Tabela da Análise da Variância para o quadrado latino 1 (bloco 1). Utilizando a SQ Tipo III do *"SAS"*.

Fonte de Variação	GL	SQ Tipo III
Linhas (A)	2	834,56888889
Colunas (B)	2	64,62888889
Tratamentos (C)	0	
LinhasxColunas (AxB)	2	54,94222222

TABELA 7 - Tabela da Análise da Variância para o quadrado latino 1 (bloco 1). Utilizando a SQ Tipo III do *"SAS"*.

Fonte de Variação	GL	SQ Tipo III
Linhas (A)	2	834,56888889
Colunas (B)	2	64,62888889
LinhasxColunas (AxB)	2	54,94222222
Tratamentos (C)	0	

CONCLUSÕES

• É possível através da técnica do confundimento gerar estruturas de quadrados latinos balanceados .

• A seqüência de entrada dos efeitos do modelo, incluindo a interação de linhas com colunas, acarreta mudanças nos resultados das somas de quadrados, mas revelou que a SQ (AxB | μ , A, B, C),referente a soma de quadrados da interação de linhas com colunas ajustada para todos os efeitos do modelo é a soma de quadrados do erro experimental (resíduo) para o quadrado latino.

• O erro experimental para o quadrado latino é a parte não confundida da interação de linhas com colunas com o efeito de tratamentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIRKOFF, G; BARTEE, T.T. **Modern applied algebra**. New York: McGraw-Hill Book, 1970.

GOMES, F.P. **Curso de estatística experimental.** 12.ed. São Paulo: Nobel, 1987. 403p. São Paulo.

MEAD, R. **The design of experiments***:* statistical principles for practical applications. Cambrige: University Press, 1988. 618p.

WINER, B.J. **Statistical principles in experimental desing.** 2.ed. New York: McGraw Hill, 1971. 897p.

SAS INSTITUTE. **SAS/STAT user's guide.** 4.ed. Cary: Statistical Analisys System Institute, 1990. 1675p.

Recebido em 13.09.99