



UM MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO LINEAR E PROGRAMAÇÃO DE METAS PARA ANÁLISE DE UM SISTEMA DE PRODUÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE SUCO CONCENTRADO CONGELADO DE LARANJA

José Renato Munhoz

Citrovita Agro Industrial Ltda.
E-mail: renato.munhoz@citrovita.com.br

Reinaldo Morabito

Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
E-mail: morabito@power.ufscar.br

Resumo

Neste trabalho apresenta-se um modelo baseado em programação linear e programação de metas para apoiar decisões no processo de mistura e na distribuição de suco concentrado congelado de laranja. Explora-se a importância das decisões do processo de mistura para a análise da logística de distribuição do suco de laranja, além das decisões de transporte e armazenagem. O modelo utiliza conceitos conhecidos da literatura de problemas de mistura e planejamento da produção com múltiplos produtos, estágios e períodos, e foi resolvido por meio da linguagem de modelagem GAMS (General Algebraic Modeling System). Um estudo de caso foi realizado numa empresa de suco de laranja localizada no interior do estado de São Paulo, e os resultados preliminares obtidos são promissores.

Palavras-chave: *programação linear, programação de metas, processo de mistura, logística de distribuição, suco de laranja, planejamento da produção com múltiplos produtos, estágios e períodos.*

1. Introdução

Na indústria de processamento de suco de laranja, a produção de sucos concentrados congelados (produtos finais), a partir das variedades de laranja (matérias-primas) disponíveis

no mercado, envolve a análise de uma grande quantidade de informações para que se obtenha uma otimização da utilização dos recursos disponíveis. Em certos casos, a coordenação das atividades de produção, transporte e estocagem de produtos intermediários (bases para produção

de sucos) e finais (sucos demandados) torna-se importante principalmente por causa da combinação da sazonalidade gerada pelas matérias-primas (variedades de laranja), e da relativa estabilidade da demanda dos produtos (neste estudo tal demanda é determinada pelo embarque periódico dos produtos num navio).

O presente trabalho apresenta um modelo baseado em programação linear e programação de metas (*goal programming*) para apoiar decisões táticas e operacionais no processo de mistura de bases para produção de sucos, e na distribuição (transporte e armazenagem) dos sucos produzidos. Explora-se a importância das decisões do processo de mistura das bases para a análise da logística de distribuição dos sucos produzidos. Conforme é discutido na próxima seção, o Brasil é o maior produtor e exportador mundial de suco concentrado congelado de laranja, o que evidencia a importância de pesquisas para melhorar o desempenho dos sistemas de produção e distribuição deste setor.

Em geral, o processo de otimização da distribuição do suco concentrado congelado de laranja envolve minimizar os custos de distribuição, o que resulta em maximizar a utilização do sistema de distribuição de suco a granel, uma vez que este é mais econômico do que o sistema de distribuição de suco em tambores (PINTO, 1996). Na empresa estudada no presente trabalho também se procura minimizar custos de mistura de bases e desvios de alguns objetivos secundários, tais como obter determinadas especificações para os produtos acabados, atendendo metas de qualidade. Tal otimização é feita na empresa com o auxílio de um simulador desenvolvido numa planilha eletrônica (*software Lotus*).

Basicamente, um modelo para apoiar as decisões de curto e médio prazo de distribuição de suco deve responder questões como: quanto, quando, como (granel ou tambor) e para onde transportar e estocar o suco produzido, respeitando datas de embarque do navio e restrições de capacidade de transporte e estocagem, isto tudo ao menor custo de transporte e estocagem possível. Para responder tais questões, o modelo

também deve considerar as decisões de mistura de bases para produzir os sucos, como por exemplo quanto usar de cada base para produzir cada suco. Se a capacidade de estocagem a granel esgotar, pode-se decidir misturar bases para produzir e armazenar sucos em tambores. Neste trabalho apresenta-se um modelo linear para apoiar tais decisões, que considera custos de produção e distribuição, e utiliza conceitos conhecidos da literatura de problemas de mistura e planejamento da produção com múltiplos produtos, estágios e períodos. Para resolvê-lo, utiliza-se a linguagem de modelagem GAMS (*General Algebraic Modeling System*) (BROOKE *et al.*, 1992).

O trabalho foi conduzido na unidade industrial de Matão-SP da Citrovita, porém, os pontos abordados neste estudo de caso também se aplicam a outras empresas do setor. O trabalho está organizado da seguinte maneira: na próxima seção apresenta-se uma breve descrição da indústria de suco de laranja e dos processos de mistura e distribuição. Na seção 3 propõe-se inicialmente um modelo de programação linear para tratar o problema minimizando os custos de mistura e distribuição e, em seguida, um modelo de programação de metas considerando também alguns objetivos secundários. Na seção 4 analisa-se os resultados computacionais obtidos com os modelos, ao serem aplicados numa situação simplificada do estudo de caso (devido à indisponibilidade de dados e para proteger interesses da empresa). Finalmente, na seção 5 conclui-se o trabalho e discute-se perspectivas para pesquisa futura.

2. Descrição do Problema

2.1 A indústria de suco de laranja

Conforme VIEGAS *et al.* (1983), o desenvolvimento da indústria de suco de laranja se deu nos EUA na década de 30, devido ao aumento do consumo do produto. As pesquisas mostraram que uma forma de incrementar o consumo de suco de laranja seria substituir a

fruta, cujo consumo médio diário era de meia laranja por pessoa, pelo suco, pois, para produzir um copo de suco, utiliza-se de três a quatro laranjas. Na época, desenvolveu-se um programa para demonstrar as qualidades nutritivas da laranja e também houve o lançamento dos espremedores de fruta, o que facilitou a produção de sucos em bares, restaurantes e residências. Assim, no final da década de 30, 90% das famílias norte-americanas já consumiam suco de laranja cotidianamente.

Em 1944 teve início a comercialização do suco concentrado congelado de laranja. A princípio, o governo dos EUA incentivou a indústria comprando o produto para ser utilizado pelas Forças Armadas, para programas de alimentação escolar e de auxílio aos países aliados durante a segunda guerra mundial. O incentivo continuou por meio de subsídios à exportação, o que contribuiu de forma decisiva para a consolidação da indústria de produtos cítricos no país. Na década de 60 iniciou-se a industrialização de cítricos no Brasil, e, já em 1966, o país obteve a liderança na exportação mundial de suco concentrado congelado de laranja. A tabela 1 apresenta alguma terminologia utilizada na indústria cítrica, e as tabelas 2 e 3 apresentam, respectivamente, como estão a produção de laranja e as exportações de suco concentrado de laranja no mundo nos últimos anos (note a destacada liderança do Brasil na produção e exportação deste produto).

2.2 O processo de produção, mistura e distribuição de suco de laranja

A seguir, descreve-se resumidamente um típico processo de produção do suco de laranja e seus subprodutos, conforme ilustrado na figura 1. A laranja é transportada até a fábrica por meio de caminhões que, ao chegarem na empresa, são descarregados através de rampas com acionamento hidráulico (“descarregamento de frutas” – figura 1). A fruta é transportada através de correias e elevadores de canecas até os silos de estocagem de laranja (“silos de armazenagem de

frutas” – figura 1). Durante o descarregamento da fruta, é coletada uma amostra representativa da carga do caminhão, para que seja feita a identificação das características físico-químicas desta. As principais características são o brix, *ratio*, variedade, as quais foram descritas na tabela 1.

Com base nas características físico-químicas da laranja e no plano de produção, é feita a retirada da fruta dos silos por meio de correias transportadoras e elevadores de canecas, a qual é encaminhada ao setor de lavagem e seleção (“lavagem e escolha” – figura 1). Neste setor, a laranja é lavada primeiro com água e, em seguida, com água clorada, para a devida assepsia. Após a lavagem, a laranja passa por um processo de seleção, onde são retiradas manualmente as frutas deterioradas e verdes (estas frutas são transportadas por bombeamento para o setor de produção do *pellet* de polpa cítrica, que é um subproduto da laranja utilizado como componente para ração animal). Uma vez lavada e selecionada, a fruta é transportada mais uma vez por correias transportadoras até o equipamento denominado classificador (“classificador” – figura 1). Este equipamento classifica a laranja em três diferentes grupos conforme o tamanho da fruta (pequena, média e grande). Depois de classificada, a laranja é processada no setor conhecido por extração (“sala asséptica de extração” – figura 1). É neste local que temos o equipamento conhecido por extratora, o qual fornece as seguintes fases a partir da laranja: suco com polpa, emulsão água com óleo e fragmentos de casca da laranja, e bagaço da laranja.

A fase “bagaço da laranja” é conduzida por meio de roscas transportadoras até o setor chamado de ração. Neste setor o bagaço é armazenado em um silo (“caixa de bagaço” – figura 1) a partir do qual adiciona-se cal para corrigir o pH e tornar o bagaço da laranja menos viscoso (KESTERSON & BRADDOCK, 1976). Feito isso o bagaço passa por uma seqüência de equipamentos, até resultar nos subprodutos: D’limonene, que é utilizado na fabricação de solventes, resinas, entre outros, e o *pellet* de

Tabela 1 – Terminologia utilizada na indústria cítrica

Caixa de fruta	unidade de peso equivalente a 40,8 quilos ou 90 libras.
Brix	refere-se a porcentagem de sólidos solúveis ou açúcares e ácidos, sendo quantificado em graus brix através de refratômetro. O refratômetro é um instrumento utilizado para medir o índice de refração de soluções.
Acidez	depois dos açúcares, os ácidos são os sólidos solúveis presentes em maior quantidade no suco. O teor de ácidos é determinado por titulação.
Ratio	é a relação brix/acidez e fornece o grau de maturação e qualidade do suco.
Variedade	as variedades de laranja Pêra, Natal e Valência são as mais indicadas para a industrialização, enquanto a variedade Hamlin, por ser mais precoce, permite que a fábrica opere economicamente no início da safra, mas fornece um suco de qualidade inferior e de pouca aceitação no mercado.

Tabela 2 – Produção de laranjas

Produção laranjas (em mil toneladas)	Ano							
	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Mundo	54.430	55.239	54.642	58.744	61.544	65.432	63.098	58.168
Brasil	19.657	18.771	17.418	19.613	21.865	22.961	20.723	19.399
EUA	8.082	9.972	9.370	10.371	10.366	11.514	12.401	8.968
México	2.541	2.914	3.191	3.572	3.985	3.944	3.329	3.538
Espanha	2.941	2.523	2.712	2.587	2.201	2.819	2.448	2.500
China	1.407	1.752	1.792	2.124	2.182	2.640	2.258	2.360
Índia	1.330	1.895	2.005	2.080	2.000	2.000	2.000	2.000
Itália	2.112	2.109	1.809	1.597	1.771	1.996	1.921	1.921
Irã	1.819	1.440	1.584	1.556	1.670	1.706	1.749	1.749
Egito	1.771	1.324	1.513	1.555	1.613	1.522	1.442	1.525
Paquistão	1.166	1.295	1.353	1.372	1.400	1.410	1.410	1.410
Outros	11.603	11.245	11.895	12.317	12.491	12.921	13.418	12.798

Fonte: F.A.O. (2000)

Tabela 3 – Exportações de Suco Concentrado de Laranja

Exportações de FCOJ * (em mil toneladas)	Ano							
	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Mundo	1.171	1.236	1.455	1.440	1.226	1.414	1.427	1.483
Brasil	914	972	1.165	1.147	961	1.182	1.180	1.228
EUA	147	159	123	88	91	103	122	92
Espanha	0	4	10	10	21	29	32	44
Outros	110	101	156	195	152	100	94	119

* FCOJ – Suco Concentrado Congelado de Laranja (*Frozen Concentrated Orange Juice*)

Fonte: F.A.O. (2000)

polpa cítrica, que é utilizado como um componente na fabricação de ração animal. A fase “emulsão água com óleo e fragmentos de casca de laranja” é encaminhada, por roscas transportadoras, ao setor de produção de óleo essencial de laranja. A fase “suco com polpa” é transportada por gravidade ao setor de filtragem e centrifugação (“filtros” e “centrífugas”, respectivamente – figura 1). Neste setor, é retirado do suco o excesso de polpa e outros defeitos que possam estar nele incorporados, além de se efetuar o ajuste do teor de polpa do produto dentro dos padrões desejados. A polpa retirada do suco nesta etapa é utilizada na produção do subproduto conhecido como *pulp wash* (polpa lavada), que vem a ser um suco com qualidade inferior.

Retornando ao suco que está com o teor de polpa desejado, o processo de industrialização segue, através da concentração do suco, até a especificação desejada em evaporadores múltiplos efeitos com filme descendente (“evaporadores” – figura 1). Após concentrado, resfria-se o suco e armazena-se este a granel em *tank farms* (“*Tank Farm*” – figura 1). Neste estágio, temos o suco na forma de *bases*, que serão combinadas conforme um plano de mistura e distribuição, o que é objeto deste estudo. Quando o suco está sendo concentrado nos evaporadores, ocorre a extração de outros dois subprodutos conhecidos por *oil phase* e *water phase* que, na seqüência, são armazenados em tambores metálicos de 200 litros prontos para serem comercializados.

O processo de mistura e distribuição do suco concentrado congelado de laranja se dá através de um planejamento anual (figura 2 – “Planejamento Básico da Safra”), no qual se analisam simultaneamente os estoques de passagem de uma safra para a outra, um pré-plano de vendas, um plano de frutas, um planejamento de moagem e um plano de produção. Com base nestas informações, elaboram-se os planos de mistura, movimentação, embarque e estocagem de produtos. Este processo envolve diversas áreas da empresa, tais como compras (de frutas),

vendas (de sucos), produção, logística e qualidade, as quais buscam a otimização da utilização dos recursos da empresa. Um plano de mistura consiste em determinar quanto e quando misturar as diferentes bases de suco que estão estocadas nos *tank farms* da fábrica. Estas bases foram obtidas a partir dos planos de frutas, moagem e produção, de forma a atender ao pré-plano de vendas, planos de embarque e limitações de recursos, como capacidades de estocagem e mistura.

2.3 Delimitação do problema

Conforme discutido na seção 1, o objeto deste estudo é o processo de mistura das diversas bases de suco nos *tank farms* da fábrica para produzir e armazenar os produtos finais nos *tank farms* (suco a granel) e nas câmaras frias (suco em tambores) da fábrica, assim como o sistema de distribuição (transporte e estocagem) destes produtos, desde os estoques da fábrica, passando pelos estoques externos (*tank farms* no caso de suco a granel, e câmaras frias no caso de suco em tambores), até o terminal marítimo, visando à exportação. O que diferencia uma base de suco de outra, assim como um produto final de outro, são principalmente as especificações de *ratio* e variedade. A figura 3 esquematiza esta situação numa rede de fluxos: da esquerda para a direita, o primeiro nó da figura representa o estoque de bases a granel nos *tank farms* da fábrica, os dois nós seguintes representam os estoques de produtos nos *tank farms* da fábrica (suco a granel) e nas câmaras frias da fábrica (suco em tambores), respectivamente, e os dois últimos nós representam os estoques de produtos nos *tank farms* externos (suco a granel) e nas câmaras frias externas (suco em tambores), respectivamente, disponíveis para serem embarcados no navio. Os arcos entre os nós representam os fluxos (mistura e transporte) de bases e produtos a granel ou em tambores entre os estoques, tudo isso para cada período (p.e., uma semana) do horizonte de planejamento (p.e., parte ou toda duração da safra).

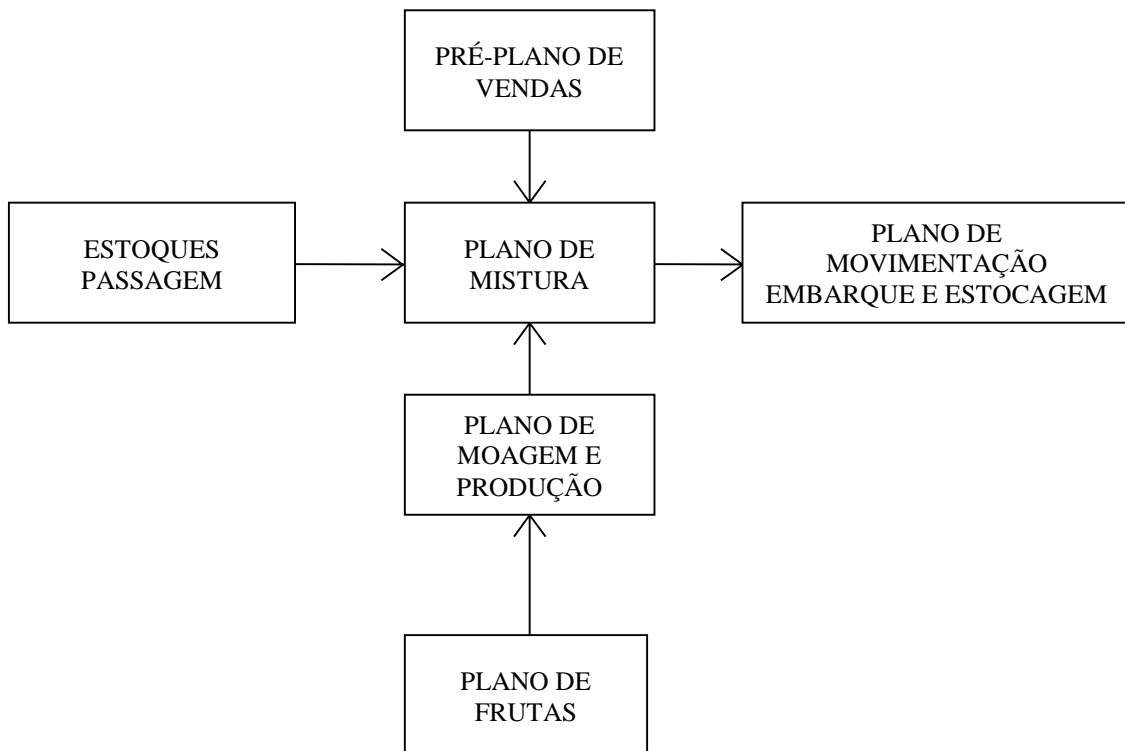


Figura 2 – Planejamento Básico da Safra

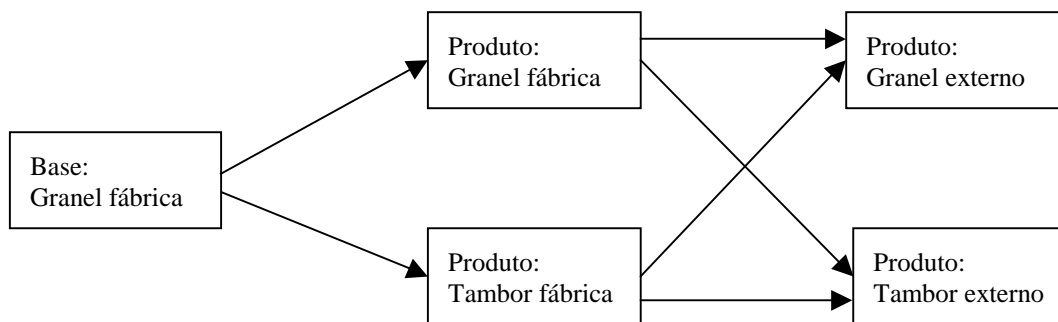


Figura 3 – Mistura de bases para produção de sucos a granel e em tambores, estoque de bases e sucos na fábrica e fora da fábrica, transporte de sucos dos estoques da fábrica para os estoques externos

Admite-se como conhecidos os planos de moagem, produção, vendas e embarque. Uma questão é determinar as quantidades e períodos em que as bases de suco devem ser utilizadas ao longo do horizonte de planejamento para a elaboração dos vários produtos. Outra questão é estabelecer as formas (a granel ou em tambores) e locais (estoques da fábrica ou estoques externos) de armazenamento destes produtos,

tudo isso de maneira a minimizar o custo total. Este custo é composto dos custos de mistura, transporte e estocagem de produtos em cada período, além dos custos de antecipação de mistura e transporte de produtos em relação aos seus períodos de demanda.

Na próxima seção modela-se o problema por meio de programação linear e programação de metas, e resolve-se o modelo por meio da

linguagem de modelagem *GAMS*. Por simplicidade, considera-se uma única fábrica, um único local para os *tank farms* externos, e um único local para as câmaras frias externas (na empresa estudada estes estoques externos estão localizados muito próximos do porto de Santos-SP), embora o modelo possa ser facilmente estendido para tratar diversas fábricas e diversos estoques externos com localizações e custos operacionais diferentes.

3. Modelagem do Problema

A modelagem matemática utiliza conceitos conhecidos da literatura de problemas de mistura e planejamento da produção com múltiplos produtos, estágios e períodos, conforme, por exemplo, em ACKHOFF (1962), JOHNSON & MONTGOMERY (1974), WILLIAMS (1978), SCHRAGE (1986), NAHMIA (1993) e SHAPIRO (1993). Entende-se aqui por distribuição, o transporte e estocagem de produtos entre diferentes locais (estoques na fábrica e externos) e formas de acondicionamento (a granel em *tank farms*, ou em tambores em câmaras frias). Especificações de qualidade da mistura, capacidade dos processos de mistura e estocagem, e balanceamento de material, formam as principais restrições do sistema, estas últimas responsáveis pela ligação entre os diferentes períodos de planejamento e locais de mistura e estocagem. Equações de balanceamento de material são comuns nos modelos com múltiplos estágios. Por exemplo, em WIIG (1975) é apresentado um modelo de planejamento para distribuição de derivados de petróleo, onde equações de balanceamento de material são muito utilizadas em cada ponto do sistema de distribuição.

Pode-se notar que a distribuição de suco de laranja, como descrita na seção 2, tem características de problemas de planejamento da produção com múltiplos produtos, estágios e períodos. Pode-se também notar que o processo de mistura de suco de laranja, como descrito na seção 2, está intimamente relacionado com problemas de mistura, onde se tem bases de suco com

diferentes propriedades e custos, sendo misturadas para se obter um produto final de custo mínimo. As disponibilidades de bases de suco e as especificações do produto final formam restrições para a obtenção da mistura ótima. Problemas de mistura representam uma importante classe de modelos de programação linear (AL-SHAMMARI & DAWOOD, 1997). Tipicamente, tais modelos giram em torno de tomar uma decisão relacionada ao melhor uso dos recursos de uma organização quando da mistura de vários ingredientes para produzir um produto final sem violar determinados critérios.

3.1 A formulação matemática

As tabelas 4 e 5 definem as variáveis e parâmetros utilizados na formulação matemática a seguir (todas as variáveis e parâmetros devem ser não negativos). Os índices j , p , k , l e t estão associados conforme segue: j representa o tipo de base (“*Hamlin*”, “*BR10*”, ...), p representa o tipo de produto (“*PA11*”, “*PA12*”, ...), k representa o tipo de estoque da fábrica (“*granel*”, “*tambor*”), l representa o tipo de estoque externo (“*granel*”, “*tambor*”), e t representa o período (1, 2, ... semanas). Sem perda de generalidade, alguns parâmetros são supostos constantes ao longo do horizonte de planejamento.

A função objetivo F a ser minimizada é a somatória dos custos de:

- misturar: $\sum_t \sum_k \sum_j \sum_p CB_j^k XB_{jpt}^k$
- transportar: $\sum_t \sum_k \sum_l \sum_p CT_p^{kl} XT_{pt}^{kl}$
- estocar: $\sum_t \sum_j HB_j EB_{jt} +$
 $+ \sum_t \sum_k \sum_p HPF_p^k EPF_{pt}^k +$
 $+ \sum_t \sum_l \sum_p HPE_p^l EPE_{pt}^l$
- financeiro: $\sum_t \sum_k \sum_p TXF^k (EPF_{pt}^k + EPE_{pt}^k) +$
 $+ \sum_t \sum_l \sum_p TXE_p^l EPE_{pt}^l$

Tabela 4 – Variáveis

Notação	Descrição
XB_{jpt}^k	Quantidade (em toneladas) da base j utilizada para produzir o produto p no período t . Esta quantidade sai do <i>tank farm</i> da fábrica como base j e entra no estoque k (granel ou tambor) da fábrica como produto p
XT_{pt}^{kl}	Quantidade (em toneladas) do produto p transportada do estoque k (granel ou tambor) da fábrica para o estoque externo l (granel ou tambor) no período t
EB_{jt}	Quantidade (em toneladas) da base j no <i>tank farm</i> da fábrica no final do período t
EPF_{pt}^k	Quantidade (em toneladas) do produto p no estoque k (granel ou tambor) da fábrica no final do período t
EPE_{pt}^l	Quantidade (em toneladas) do produto p no estoque externo l (granel ou tambor) no final do período t
F	Custo total de mistura, transporte, armazenagem e financeiro, para o horizonte de planejamento

Tabela 5 – Parâmetros

Notação	Descrição
B_t	Capacidade de mistura na fábrica (em toneladas/período) no período t
AB^k	Capacidade (em toneladas) do estoque k da fábrica (suposta constante ao longo dos períodos)
AT^l	Capacidade (em toneladas) do estoque externo l (suposta constante ao longo dos períodos)
$RATB_j$	<i>Ratio</i> médio da base j
$RATP_p$	<i>Ratio</i> mínimo do produto p
CB_j^k	Custo unitário (em unidades monetárias/tonelada) de mistura da base j do <i>tank farm</i> da fábrica para o estoque k da fábrica (suposto constante ao longo dos períodos)
CT_p^{kl}	Custo unitário (em unidades monetárias/tonelada) de transporte do produto p do estoque k da fábrica para o estoque externo l (suposto constante ao longo dos períodos). No caso de transporte de estoque a granel para estoque em tambor, ou estoque em tambor para estoque a granel, o custo unitário de transporte inclui um custo unitário de alteração da forma de acondicionamento do produto.
HB_j	Custo unitário (em unidades monetárias/tonelada/período) de estocagem da base j no <i>tank farm</i> da fábrica (suposto constante ao longo dos períodos)
HPF_p^k	Custo unitário (em unidades monetárias/tonelada/período) de estocagem do produto p no estoque k da fábrica (suposto constante ao longo dos períodos)
HPE_p^l	Custo unitário (em unidades monetárias/tonelada/período) de estocagem do produto p no estoque externo l (suposto constante ao longo dos períodos)
PR_{jt}	Produção (em toneladas) de base j no período t
D_{pt}^l	Demanda (em toneladas) de produto p no estoque externo l no período t
$PERC_t$	Porcentagem de base tipo <i>hamlin</i> adicionada ao produto acabado no período t
TXF^k	Custo financeiro unitário médio (em unidades monetárias/tonelada) de antecipar a mistura por um período no estoque k da fábrica
TXE_p^l	Custo financeiro unitário médio (em unidades monetárias/tonelada) de antecipar o transporte do produto p por um período no estoque externo l

Note na expressão acima que $TXF^k(EPF_{pt}^k + EPE_{pt}^k)$ é o custo financeiro associado ao nível de estoque do produto p no estoque k da fábrica e externo no período t que excede a sua demanda neste período. Este custo é calculado apenas sobre as despesas de antecipar a mistura por um período para a obtenção deste produto. Similarmente, $TXE_p^l EPE_{pt}^l$ é o custo financeiro associado ao nível de estoque do produto p no estoque externo l no período t . Este custo é calculado apenas sobre as despesas de antecipar o transporte do produto p por um período relativamente à sua demanda.

Portanto, a função objetivo do modelo é:

$$\begin{aligned} \text{Min } F = & \sum_t \sum_k \sum_j \sum_p CB_j^k XB_{jpt}^k + \\ & + \sum_t \sum_k \sum_l \sum_p CT_p^{kl} XT_{pt}^{kl} + \\ & + \sum_t \sum_j HB_j EB_{jt} + \\ & + \sum_t \sum_k \sum_p HPF_p^k EPF_{pt}^k + \\ & + \sum_t \sum_l \sum_p HPE_p^l EPE_{pt}^l + \\ & + \sum_t \sum_k \sum_p TXF^k(EPF_{pt}^k + EPE_{pt}^k) + \\ & + \sum_t \sum_l \sum_p TXE_p^l EPE_{pt}^l \end{aligned} \quad (1)$$

As restrições do modelo referem-se a atualização de estoques, limitantes para *ratios* da mistura, adição de base tipo *hamlin* na mistura, e capacidade de estocagem e de mistura.

- Restrições de atualização de estoques por período, produto/base e local:

$$EB_{jt} = EB_{j(t-1)} + PR_{jt} - \sum_k \sum_p XB_{jpt}^k \quad \forall j, t \quad (2)$$

$$EPF_{pt}^k = EPF_{p(t-1)}^k + \sum_j XB_{jpt}^k - \sum_l XT_{pt}^{kl} \quad \forall k, p, t \quad (3)$$

$$EPE_{pt}^l = EPE_{p(t-1)}^l + \sum_k XT_{pt}^{kl} - D_{pt}^l \quad \forall l, p, t \quad (4)$$

As equações de balanceamento de material (2)-(4) são típicas de problemas de planejamento da produção com múltiplos produtos, estágios e períodos. Note que EB_{jt} em (2) é o estoque de cada base j no *tank farm* da fábrica no final do período t . Este estoque é obtido somando-se ao estoque do final do período anterior ($EB_{j(t-1)}$) a produção no período (PR_{jt}), e subtraindo-se a quantidade de base misturada no período para a obtenção de produtos finais ($\sum_k \sum_p XB_{jpt}^k$). Similarmente para EPF_{pt}^k em (3) e EPE_{pt}^l em (4).

- Restrições de limitantes de *ratios* resultantes da mistura por local, período e produto:

$$\sum_j (RATB_j XB_{jpt}^k) \leq (RATP_p + 0,8) \sum_j XB_{jpt}^k \quad \forall k, p, t \quad (5)$$

$$\sum_j (RATB_j XB_{jpt}^k) \geq RATP_p \sum_j XB_{jpt}^k \quad \forall k, p, t \quad (6)$$

As equações (5)-(6) são típicas de problemas de mistura, onde é preciso determinar as quantidades de bases de suco que devem ser combinadas, para se obter um produto com determinadas especificações. A equação (5) estabelece o limite superior ($RATP_p + 0,8$) para o *ratio* do produto p , enquanto que a equação (6) estabelece o limite inferior ($RATP_p$).

- Restrição de adição de base tipo *hamlin* na mistura por local, período e produto:

$$XB_{hamlin}^k = PERC_t \sum_j XB_{jpt}^k \quad \forall k, p, t \quad (7)$$

A restrição (7) tem a mesma característica das restrições anteriores (5)-(6), isto é, são

típicas de problemas de mistura, e estabelece a porcentagem $PERC_t$ de base de suco do tipo $j = \text{"hamlin"}$ que deve ser adicionada ao produto p em cada período t .

- Restrição de capacidade de estocagem nos *tank farms* da fábrica e externos, e nas câmaras frias da fábrica e externas:

$$\sum_j EB_{jt} + \sum_p EPF_{pt}^{\text{"granel"}} \leq AB^{\text{"granel"}} \quad \forall t \quad (8)$$

$$\sum_p EPF_{pt}^{\text{"tambor"}} \leq AB^{\text{"tambor"}} \quad \forall t \quad (9)$$

$$\sum_p EPE_{pt}^l \leq AT^l \quad \forall l, t \quad (10)$$

A equação (8) estabelece que a soma dos estoques de bases e produtos a granel nos *tank farms* da fábrica ($k = \text{"granel"}$) no final do período t não pode exceder a capacidade $AB^{\text{"granel"}}$. A equação (9) estabelece que os estoques de produtos em tambor nas câmaras frias da fábrica ($k = \text{"tambor"}$) no final do período t não podem exceder $AB^{\text{"tambor"}}$, e a equação (10) estabelece que os estoques externos de produtos ($l = \text{"granel"}$ ou "tambor") no final do período t não podem exceder a capacidade AT^l .

- Restrição de capacidade de mistura

$$\sum_k \sum_j \sum_p XB_{jpt}^k \leq B_t \quad \forall t \quad (11)$$

A equação (11) estabelece a quantidade máxima de suco B_t que pode ser misturada em cada período t .

O modelo de programação linear (1)-(11), junto com as restrições de não negatividade das variáveis, foi codificado na linguagem de modelagem *GAMS* e resolvido num microcomputador pelo *solver GAMS/MINOS* (BROOKE *et al.*, 1992), conforme é discutido na seção 4. Convém salientar que o modelo (1)-(11) pode ser facilmente adaptado para tratar situações em que

os custos são convexos, aproximando-os por funções lineares por partes (veja, p.e., BAZARAA *et al.*, 1990).

3.2 Uma abordagem de programação de metas

A programação de metas é uma simples modificação e extensão de programação linear, que permite uma solução simultânea de um sistema de objetivos complexos, ao invés de um único e simples objetivo (HAX & CANDEA, 1984). Ela pode ser aplicada quando vários objetivos aparecem explicitamente e os *tradeoffs* entre os objetivos devem ser analisados com base em um conjunto de prioridades. Em particular, quando não é possível determinar precisamente a importância relativa dos objetivos, a chamada programação de metas *preemptive* pode ser uma ferramenta útil (WINSTON, 1991). Para maiores detalhes de programação de metas, o leitor pode consultar, por exemplo, HAX & CANDEA (1984), OZAN (1986), HILLIER & LIEBERMAN (1988) e WINSTON (1991).

No sistema de mistura de suco de laranja descrito na seção 2.2, pode ocorrer a necessidade de decisões gerenciais envolvendo vários objetivos. Muitas vezes, quando na elaboração do plano de mistura, deseja-se, além de minimizar custos, que os produtos fiquem o mais próximo possível da média de suas especificações mínimas e máximas de *ratio*. Por exemplo, em um produto com especificações 14 e 15, é desejável que seu *ratio* fique o mais próximo possível da média 14,5. Para tratar esta situação, a especificação de um conjunto de metas, com níveis de prioridades associados a cada uma delas, pode ser a seguinte:

- A meta 1, de maior prioridade, é minimizar a somatória dos custos de misturar, transportar, armazenar e financeiro (equação (1)), ou, equivalentemente, minimizar o desvio destes custos do objetivo "custo zero";
- A meta 2, de prioridade secundária, é minimizar o desvio da especificação de *ratio* médio para os diversos produtos.

Tabela 6 – Variáveis de desvio

Notação	Descrição
S_1^+	Variável de desvio indicando o quanto a somatória dos custos de misturar, transportar, armazenar e financeiro está acima da meta 1: “custo zero”
S_{2pt}^{k+}	Variável de desvio indicando o quanto o produto p no período t no estoque k da fábrica, está acima da especificação de <i>ratio</i> intermediária desejada pela meta 2 (em quantidade x <i>ratio</i>)
S_{2pt}^{k-}	Variável de desvio indicando o quanto o produto p no período t no estoque k da fábrica, está abaixo da especificação de <i>ratio</i> intermediária desejada pela meta 2 (em quantidade x <i>ratio</i>)

Definindo as variáveis de desvio conforme a tabela 6, obtemos uma nova função objetivo, para substituir a função objetivo (1) do modelo (1)-(11), dada por:

$$\min P_1(S_1^+) + P_2(\sum_t \sum_k \sum_p c_p (S_{2pt}^{k+} + S_{2pt}^{k-})) \quad (12)$$

onde $P_1 \gg P_2$ e c_p é um peso relativo para cada produto p (neste trabalho utilizou-se $c_p = 1$). As restrições (2)-(11) continuam válidas. É necessário ainda adicionar ao modelo as seguintes restrições de metas 1 e 2:

- Restrição da meta 1, obtida a partir da equação (1):

$$\begin{aligned} & \sum_t \sum_k \sum_j \sum_p CB_j^k XB_{jpt}^k + \\ & + \sum_t \sum_k \sum_l \sum_p CT_p^{kl} XT_{pt}^{kl} + \sum_t \sum_j HB_j EB_{jt} + \\ & + \sum_t \sum_k \sum_p HPF_p^k EPF_{pt}^k + \\ & + \sum_t \sum_l \sum_p HPE_p^l EPE_{pt}^l + \\ & + \sum_t \sum_k \sum_p TXF^k (EPF_{pt}^k + EPE_{pt}^k) + \\ & + \sum_t \sum_l \sum_p TXE_p^l EPE_{pt}^l - S_1^+ = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

- Restrição da meta 2, obtida a partir das equações (5) e (6):

$$\begin{aligned} & \sum_j (RATB_j XB_{jpt}^k) - S_{2pt}^{k+} + S_{2pt}^{k-} = \\ & = (RATP_p + 0,4) \sum_j XB_{jpt}^k \quad \forall k, p, t \quad (14) \end{aligned}$$

Note que a restrição (13), junto a nova função objetivo (12), estabelece que o custo total de misturar, transportar, armazenar e financeiro, deve ser o mais próximo possível de zero. Similarmente, a restrição (14) estabelece que o *ratio* médio do produto p no estoque k da fábrica, obtido a partir das misturas das várias bases j em cada período t , deve ser o mais próximo possível do valor médio da faixa de *ratio* permitida para este produto ($RATP_p + 0,4$).

O modelo linear de programação de metas *preemptive* (2)-(14), junto com as restrições de não negatividade das variáveis, também foi codificado na linguagem de modelagem *GAMS* e resolvido num microcomputador pelo *solver GAMS/MINOS*, conforme é discutido na seção 4. Para isso, inicialmente resolveu-se o problema (2)-(14) minimizando o desvio da meta 1 (custo zero), ou seja, simplesmente ignorando-se a meta 2 da função objetivo (12), para obter-se o custo mínimo F^* . Em seguida, resolveu-se o problema (2)-(14) minimizando o desvio da meta 2 (*ratio* médio) sob a meta 1, ou seja, ignorando-se a meta 1 da função objetivo (12) e adicionando-se no modelo a restrição de custo mínimo: $S_1^+ = F^*$.

4. Resultados Computacionais e Análise

Conforme mencionado na seção 3, os modelos lineares (1)-(11) e (2)-(14) foram codificados em *GAMS*, uma linguagem de modelagem projetada para a elaboração e solução de problemas de programação matemática grandes

e complexos (BROOKE *et al.*, 1992). O sistema simplifica a preparação de dados e relatórios e a transformação dos dados na forma requerida pelos otimizadores (*solvers*) nele contidos, ambas geralmente responsáveis por grande parte do tempo gasto no desenvolvimento de um modelo (FERNANDES & MORABITO, 1993). *GAMS* possui o *solver* *GAMS/MINOS*, um sistema baseado na linguagem FORTRAN e projetado para resolver problemas de otimização lineares e não-lineares. *GAMS/MINOS* resolve modelos lineares utilizando uma implementação do método primal simplex. O leitor pode obter mais informações sobre o método simplex, por exemplo, em BAZARAA *et al.* (1990). Maiores detalhes da implementação e solução dos modelos (1)-(11) e (2)-(14) na linguagem *GAMS* podem ser encontrados em MUNHOZ (2000).

4.1 Aplicação do modelo de minimização de custos

A análise do modelo (1)-(11) foi realizada em uma simplificação do problema real, devido à indisponibilidade de dados e para proteger interesses da empresa. Os parâmetros utilizados foram distorcidos, porém, procurou-se manter relativa proporcionalidade, para fins de validação do modelo. Por simplicidade de análise, reduzimos o número de períodos, quantidades de bases e produtos finais, em relação à situação real, conforme a tabela 7. A tabela 8 compara o número de variáveis e restrições do modelo (1)-(11) para os problemas real e simplificado. Convém salientar que, apesar de estarmos resolvendo um problema de tamanho muito menor do que o problema real (apenas 195 restrições, ao invés de 4233), isto não é uma limitação para a metodologia empregada (linguagem de modelagem *GAMS* com *solver* *GAMS/MINOS*).

Com base na experiência adquirida por um dos autores nestes últimos doze anos de atuação no setor de suco de laranja (desde 1988), são explorados diversos cenários para avaliar o comportamento do modelo ao se perturbar

determinados parâmetros. Inicialmente foram considerados quatro cenários que exploram alterações nas capacidades de mistura, estocagem a granel nos *tank farms* da fábrica, e estocagem a granel nos *tank farms* externos. A tabela 9 apresenta parte dos parâmetros utilizados em cada um destes cenários; os demais parâmetros $RATB_j$, $RATP_p$, CB_j^k , CT_p^{kl} , HB_j , HPF_p^k , HPE_p^l , TXF^k , TXE_p^l foram considerados fixos para os quatro cenários e podem ser encontrados em MUNHOZ (2000). As tabelas 10-12 apresentam um resumo dos resultados obtidos com o modelo (1)-(11) em cada um dos cenários (as soluções foram encontradas pelo *solver* *GAMS/MINOS* na ordem de segundos, utilizando-se um microcomputador Pentium). A seguir analisa-se os resultados de cada cenário.

Cenário 1

A solução de custo mínimo do modelo (1)-(11) resulta em $F^* = 3018.1$ unidades monetárias (u.m.), conforme a tabela 10. A demanda ocorre no período 5 (tabela 9), enquanto os produtos são produzidos nos períodos 3, 4 e 5 (tabela 10). São respeitadas as capacidades de estocagem e mistura. Também, pode-se constatar que, como a capacidade de mistura neste cenário é de 292 toneladas por período (tabela 9), e a demanda por produtos está concentrada no quinto período em 870 toneladas (tabela 9), então o modelo determina que sejam efetuadas misturas em mais de um período (tabela 10), de forma a respeitar a restrição de capacidade de mistura.

O *ratio* resultante da mistura está conforme os limites estabelecidos. A adição de base do tipo "Hamlin" também está dentro do especificado. O modelo evita misturar e/ou transportar bases e/ou produtos antes da demanda ocorrer. Por exemplo, o transporte de produtos é realizado apenas no quinto período, que é quando ocorre a demanda. Neste cenário, cabe ressaltar que o modelo determina que haja mistura de bases nos períodos 3 e 4 (tabela 10), devido à limitação de capacidade de mistura.

Tabela 7 – Parâmetros dos problema real e simplificado

	Problema real	Problema simplificado
Número de períodos	51	5
Quantidade de bases de suco	8	4
Quantidade de produtos finais	7	3
Estoques na fábrica	2	2
Estoques externos	2	2

Tabela 8 – Número de variáveis e restrições dos problemas real e simplificado

	Problema real	Problema simplificado
Variáveis de mistura	5712	120
Variáveis de transporte	1428	60
Variáveis de estoque	1836	80
Total de variáveis	8976	260
Restrições de atualização de estoques	1836	80
Restrições de mistura	2142	90
Restrições de capacidade de estocagem	204	20
Restrições de capacidade de mistura	51	5
Total de restrições	4233	195

Cenário 2

Para avaliar como o modelo se comporta com uma maior capacidade de mistura, no quarto período tal capacidade foi aumentada de 292 para 870 toneladas (tabela 9), ou seja, suficiente para atender toda demanda de 870 toneladas do quinto período. A solução de custo mínimo do modelo (1)-(11) para este cenário ($F^* = 3018.0$ u.m., conforme tabela 10) é apenas um pouco melhor do que a do cenário 1 ($F^* = 3018.1$ u.m.), devido a haver necessidade de antecipação de mistura de bases apenas no período 4 pela limitação de capacidade de mistura no período 5. Havendo antecipação de mistura apenas no período 4, o custo financeiro relativo a esta antecipação é menor relativamente ao primeiro cenário.

Cenário 3

Para avaliar como o modelo se comporta com uma menor capacidade de estocagem nos *tank farms* da fábrica, reduziu-se tal capacidade de 2790 para 800 toneladas (tabela 9). A solução de custo mínimo obtida do modelo ($F^* = 3029$ u.m., conforme tabela 10) foi antecipar parte da mistura do período 4 para o período 3 (tabela 10), e antecipar parte do transporte a granel nos períodos 3 e 4, dos *tank farms* da fábrica para os *tank farms* externos (tabela 11). Esta alteração gerou um aumento no custo total em relação ao cenário 2 de 11 u.m. (i.e., de 3018 para 3029 u.m.), devido ao custo adicional de estocar externamente à fábrica, e ao custo financeiro de antecipar a mistura e o transporte dos produtos. Note que, ao agregarmos as decisões de mistura

Tabela 9 – Parâmetros utilizados nos 4 cenários: $PERC_t$, B_t , AB^k , AT^l , D_{pt}^l e PR_{jt}

Parâmetro	Unidade	Período t	Cenário			
			1	2	3	4
$PERC_t$, $t=1, \dots, 5$	%		10	10	10	10
Cap. Mistura B_t	ton	1	292	292	292	292
	ton	2	292	292	292	292
	ton	3	292	292	292	292
	ton	4	292	870	870	870
	ton	5	292	292	292	292
Cap. est. $AB^{\text{"granel"}}$	ton		2.790	2.790	800	800
Cap. est. $AT^{\text{"granel"}}$	ton		1.650	1.650	1.650	200
Cap. est. $AB^{\text{"tambor"}}$	ton		-	-	-	-
Cap. est. $AT^{\text{"tambor"}}$	ton		100.000	100.000	100.000	100.000
Demanda $D_{PA12}^{\text{"granel"}}$ especificação de <i>ratio</i> : 12.0 a 12.9	ton	1				
	ton	2				
	ton	3				
	ton	4				
	ton	5	330	330	330	330
Demanda $D_{PA13}^{\text{"granel"}}$ especificação de <i>ratio</i> : 13.0 a 13.9	ton	1				
	ton	2				
	ton	3				
	ton	4				
	ton	5	440	440	440	440
Demanda $D_{PA11}^{\text{"tambor"}}$ especificação de <i>ratio</i> : 11.0 a 11.9	ton	1				
	ton	2				
	ton	3				
	ton	4				
	ton	5	100	100	100	100
Produção $PR_{BR10}^{\text{"BR10"}}$	ton	1				
	ton	2	110	110	110	110
	ton	3				
	ton	4				
	ton	5				
Produção $PR_{BR11}^{\text{"BR11"}}$	ton	1				
	ton	2	90	90	90	90
	ton	3	100	100	100	100
	ton	4	90	90	90	90
	ton	5				
Produção $PR_{BR14}^{\text{"BR14"}}$	ton	1	140	140	140	140
	ton	2	90	90	90	90
	ton	3	190	190	190	190
	ton	4	200	200	200	200
	ton	5				
Produção $PR_{Hamlin}^{\text{"Hamlin"}}$	ton	1	150	150	150	150
	ton	2				
	ton	3				
	ton	4				
	ton	5				

Obs: os parâmetros em negrito na tabela acima representam os valores que foram alterados, relativamente ao cenário imediatamente anterior.

Tabela 10 – Resultados: custo mínimo F^* em unidades monetárias (u.m.), quantidades misturadas de bases XB_{jpt}^k e produção resultante da mistura (em toneladas), em cada período dos 4 cenários

Variável	Unidade	Período	Cenário			
			1	2	3	4
Custo total F^*	u.m.		3018.1	3018.0	3029	3724
Qtde. misturada $XB_{j"BR10"}^k$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	48	-	-	-
	ton	4	-	49	-	98
	ton	5	61	61	61	12
Qtde. misturada $XB_{j"BR11"}^k$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	119	-	29	10
	ton	4	68	187	158	180
	ton	5	93	93	93	90
Qtde. misturada $XB_{j"BR14"}^k$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	138	-	34	52
	ton	4	147	284	300	274
	ton	5	109	109	109	180
Qtde. misturada $XB_{j"Hamlin"}^k$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	29	-	7	7
	ton	4	29	58	51	57
	ton	5	29	29	29	29
Ratio/Qtde produzida "PA12gr" especificação de <i>ratio</i> : 12.0 a 12.9	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	12.9 / 138	12.9 / 138	12.9 / 138	12.9 / 144
	ton	5	12.9 / 192	12.9 / 192	12.9 / 192	12.9 / 186
Ratio/Qtde produzida "PA13gr" especificação de <i>ratio</i> : 13.0 a 13.9	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	13.1 / 286	-	13.1 / 70	13.9 / 70
	ton	4	13.1 / 154	13.1 / 440	13.1 / 370	13.1 / 264
	ton	5	-	-	-	13.9 / 106
Ratio/Qtde produzida "PA11tb" especificação de <i>ratio</i> : 11.0 a 11.9	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	11.2 / 100
	ton	5	11.9 / 100	11.9 / 100	11.9 / 100	-
Ratio/Qtde produzida "PA13tb" especificação de <i>ratio</i> : 13.0 a 13.9	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	13.1 / 60
	ton	5	-	-	-	-

Tabela 11 – Resultados: quantidades transportadas de produtos XT_{pt}^{kl} (em toneladas), em cada período dos 4 cenários

Variável	Unidade	Período	Cenário			
			1	2	3	4
Qtde. transportada $XT_{PA11}^{granel,granel}$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	-
	ton	5	-	-	-	-
Qtde. transportada $XT_{PA11}^{tambor,tambor}$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	-
	ton	5	100	100	100	100
Qtde. transportada $XT_{PA12}^{granel,granel}$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	-
	ton	5	330	330	330	330
Qtde. transportada $XT_{PA12}^{tambor,tambor}$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	-
	ton	5	-	-	-	-
Qtde. transportada $XT_{PA13}^{granel,granel}$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	70	70
	ton	4	-	-	290	130
	ton	5	440	440	80	240
Qtde. transportada $XT_{PA13}^{tambor,tambor}$	ton	1	-	-	-	-
	ton	2	-	-	-	-
	ton	3	-	-	-	-
	ton	4	-	-	-	60
	ton	5	-	-	-	-

ao modelo de distribuição, permitimos a antecipação da produção de produtos para, em seguida, enviá-los aos estoques externos.

Cenário 4

Para avaliar como o modelo se comporta quando o volume de produção excede a capacidade total de armazenagem a granel, reduziu-se

a capacidade de estocagem nos *tank farms* externos de 1650 para 200 toneladas (tabela 9). Nesta nova configuração, o modelo, no terceiro período, esbarra na restrição de capacidade de estocagem nos *tank farms* da fábrica (tabela 12). Assim, fez-se necessário efetuar a mistura e transporte de produto para os *tank farms* externos (tabelas 10 e 11, respectivamente). No entanto, no quarto período a capacidade de

Tabela 12 – Resultados: estoques de produtos na fábrica $\sum_p EPF_{pt}^k$ e externo $\sum_p EPE_{pt}^l$ (em toneladas), no final de cada período nos 4 cenários

Variável	Período	Cenário			
		1	2	3	4
Fab.: $\sum_p EPF_{pt}^{granel} + \sum_j EB_{jt}$	1	290	290	290	290
	2	580	580	580	580
	3	870	870	800	800
	4	1.160	1.160	800	800
	5	290	290	290	230
Ext.: $\sum_p EPE_{pt}^{granel}$	1	-	-	-	-
	2	-	-	-	-
	3	-	-	70	70
	4	-	-	360	200
	5	-	-	-	-
Fab.: $\sum_p EPF_{pt}^{tambor}$	1	-	-	-	-
	2	-	-	-	-
	3	-	-	-	-
	4	-	-	-	-
	5	-	-	-	-
Ext.: $\sum_p EPE_{pt}^{tambor}$	1	-	-	-	-
	2	-	-	-	-
	3	-	-	-	-
	4	-	-	-	160
	5	-	-	-	60

armazenagem a granel da fábrica e fora dela esgotou-se (tabela 12). Deste modo, o modelo determinou o entamboramento do excedente de produção (tabela 10). Com isto, o custo total do sistema cresce 695 u.m. em relação ao cenário 3 (de 3029 para 3724 u.m., conforme tabela 10), em função da necessidade de entamborar, transportar e estocar a produção excedente, além do custo financeiro desta operação.

Outros cenários

Vários outros cenários foram explorados a partir do cenário 4, como por exemplo:

- Aumentou-se a porcentagem de adição de base tipo “Hamlin”, de 10% para 20%. Como resposta, o modelo corretamente retornou que o problema é infactível.
- Aumentou-se a capacidade de armazenagem em tambores nas câmaras frias da fábrica de 0 para 60 toneladas. A resposta do modelo foi deixar de transportar o excedente entamborado (60 toneladas), das câmaras frias da fábrica para as câmaras frias externas, gerando economias com transporte e armazenamento. O custo total deste cenário foi de 3558 u.m.
- Alterou-se o estoque inicial do produto “PA12” (granel) de 0 para 100 toneladas. A resposta do modelo foi reduzir a produção deste produto em 100 toneladas, e aumentar o entamboramento em outras 100 toneladas de “PA13” (tambor), este último, devido à falta de espaço físico para armazenagem a granel. O custo total deste cenário foi de 4870 u.m.

Tabela 13 – Ratios obtidos pelo modelo (1)-(11) (coluna “antes”) e pelo modelo (2)-(14) (coluna “depois”) para o cenário 4

Produto <i>p</i>	Meta <i>p/ ratio</i>	Resultados											
		Antes						Depois					
		Período 3		Período 4		Período 5		Período 3		Período 4		Período 5	
		Qtde (ton)	Ratio	Qtde (ton)	Ratio	Qtde (ton)	Ratio	Qtde (ton)	Ratio	Qtde (ton)	Ratio	Qtde (ton)	Ratio
PAR11 em tambor	11.5	-	-	100	11.2	-	-	-	-	100	11.9	-	-
PAR12 a granel	12.5	-	-	144	12.9	186	12.9	-	-	38	12.5	292	12.5
PAR13 a granel	13.5	70	13.9	264	13.1	106	13.9	70	13.5	370	13.5	-	-
PAR13 em tambor	13.5	-	-	60	13.1	-	-	-	-	60	13.5	-	-

Com base nos resultados obtidos nessa seção, observamos que o modelo é consistente e reflete satisfatoriamente o comportamento esperado do sistema em estudo ao se perturbar determinados parâmetros.

4.2 Avaliação do modelo de programação de metas

Para analisar o modelo de programação de metas (2)-(14), utilizou-se arbitrariamente o cenário 4. Primeiramente, resolveu-se o modelo (2)-(14) considerando-se apenas a meta 1 na função objetivo (12), o que, como era esperado, resultou na mesma solução de custo mínimo do modelo (1)-(11), com valor $S_1^+ = F^* = 3724$ u.m. (conforme tabela 10). Em seguida, resolveu-se o modelo (2)-(14) considerando-se apenas a meta 2 na função objetivo (12) e incluindo-se a restrição $S_1^+ = F^*$ (conforme discussão na seção 3.2), o que resultou na solução de desvio mínimo dos valores médios das especificações de *ratio* de cada produto, com valor $\sum_t \sum_k \sum_p (S_{2pt}^{k+} + S_{2pt}^{k-}) = 40,5$.

Note que este desvio é bem menor do que o desvio de 224,0 da solução de custo mínimo do modelo (1)-(11). A tabela 13 apresenta as quantidades e os *ratios* dos produtos produzidos nos períodos 3, 4 e 5 para a solução do modelo

(1)-(11) (coluna “antes” da tabela 13) e a solução do modelo (2)-(14) (coluna “depois”). Observe que, para o mesmo valor da meta 1 (custo total), o modelo (2)-(14) apresentou benefícios significativos do ponto de vista da meta 2 em relação ao modelo (1)-(11), o que justifica sua utilização.

5. Conclusões e Perspectivas

Com base nos resultados obtidos na seção 4, verifica-se que os modelos aqui apresentados, baseados em programação linear e programação de metas, se comportam de maneira satisfatória para representar o problema em estudo. Observa-se que é importante agregar o plano de mistura ao plano de distribuição, uma vez que isto permite a antecipação da produção de sucos na fábrica e imediata estocagem fora da fábrica (conforme discutido, por exemplo, no cenário 3 da seção 4.1), obtendo-se assim uma ferramenta efetiva para a análise de custos e o planejamento dessas atividades. Convém salientar que a metodologia utilizada no trabalho, baseada em programação linear, programação de metas e na linguagem de modelagem *GAMS*, é acessível para aplicações empresariais.

Uma perspectiva importante para pesquisa futura é aplicar os modelos em uma situação real de uma safra, e comparar as soluções obtidas

pelos modelos com as adotadas pela empresa. Apesar das dificuldades deste experimento, principalmente com respeito à compilação e análise de dados, pretendemos realizá-lo num futuro próximo na própria Citrovita. Outra possível pesquisa futura bem mais trabalhosa que a anterior seria integrar, no presente modelo de mistura e distribuição de suco, um modelo de planejamento de colheita de laranja, o que geraria um poderoso instrumento para análise de decisões táticas e estratégicas, desde a colheita

da laranja no campo, até a colocação do produto final em navios para exportação.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Candido Shigueyuki Hotta, Gerente Geral Industrial da Citrovita, e Otto L. Azevedo Barreto, Gerente Industrial da Citrovita, pelo apoio a presente pesquisa. Também agradecem aos três revisores anônimos pelos úteis comentários e sugestões.

Referências Bibliográficas

- ACKOFF, R.L.:** *Scientific Method: optimizing applied research decisions*. John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- AL-SHAMMARI, M. & DAWOOD, I.:** “Linear Programming Applied to a Production Blending Problem: A Spreadsheet Modeling Approach.” *Production and Inventory Management Journal*, v. 38, n. 1, p. 1-7, 1997.
- BALLOU, R.H.:** *Business Logistics Management*. Prentice-Hall, Inc., 1992.
- BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J. & SHERALI, H.D.:** *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- BROOKE, A.; KENDRICK, D.; MEERAUS, A. & ROSENTHAL, R.E.:** *GAMS: A User's Guide*, Release 2.25, The Scientific Press, 1992.
- F.A.O. (Food and Agriculture Organization of the United Nations):** *Oranges Production*. Fonte: <<http://apps.fao.org/lim500/nph-wrap.pl?Production.Crops.Primary&Domain=SUA&servlet=1>>, impresso em 01/02/2000.
- F.A.O. (Food and Agriculture Organization of the United Nations):** *Orange Juice Concentrated Exports*. Fonte: <<http://apps.fao.org/lim500/nph-wrap.pl?Trade.CropslivestockProduct&Domain=SUA&servlet=1>>, impresso em 02/02/2000.
- FERNANDES, F. & MORABITO, R.:** “Linguagens de Modelagem GAMS e LINGO: Aplicação a um Problema de Balanceamento de Linha de Montagem.” *Cadernos DEP*, n. 20, p. 8-28, Universidade Federal de São Carlos, 1993.
- HAX, A.C. & CANDEA, D.:** *Production and Inventory Management*. Prentice-Hall, Inc., 1984.
- HILLIER, F.S. & LIEBERMAN, G.J.:** *Introdução à Pesquisa Operacional*. Editora Campus Ltda. / São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1988.
- JOHNSON, L.A. & MONTGOMERY, D.C.:** *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*. John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- KESTERSON, J.W. & BRADDOCK, R.J.:** “By-Products and Specialty Products of Florida Citrus.” Institute of Food and Agricultural Sciences, University of Florida, Gainesville, Bulletin 784, 1976.
- MUNHOZ, J.R.:** *Um Modelo Baseado em Programação Linear e Programação de Metas para Análise de um Sistema de Produção e Distribuição de Suco Concentrado Congelado de Laranja*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal de São Carlos, 2000.
- NAHMIA, S.:** *Production and Operations Analysis*. Richard D. Irwin, Inc., 1993.
- OZAN, T.M.:** *Applied Mathematical Programming for Engineering and Production Management*. Prentice-Hall, Inc., 1986.
- PINTO, K.C.R.:** *Contribuição à Análise de Decisão sobre os Sistemas de Distribuição Física de Suco de Laranja Brasileiro de Exportação*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 1996.
- SCHRAGE, L.:** *Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO*. The Scientific Press, 1986.

- SHAPIRO, J.F.:** “Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling.” Em: GRAVES, S.C., RINNOOY KAN, A.H.G. and ZIPKIN, P.H. (editors): *Logistics of Production and Inventory* (Handbooks in Operations Research and Management Science: v.4), Elsevier Science Publishers B.V., p. 371-439, 1993.
- VIEGAS, F.C.P.; STEGER, E.; ANTONIO, A.P.; FOX, K.I. & GRAY, L.E.:** “Processamento dos Produtos Cítricos com Máquinas FMC”. *Apostila do curso “Processamento de Laranja com Máquinas FMC”*, Araraquara-SP, FMC do Brasil S.A., 1983.
- WIIG, K.M.:** “Petroleum Product Distribution Planning by Linear Programming.” Em: SALKIN, H.M. and SAHA, J. (editors): *Studies in Linear Programming* (Studies in Management Science and Systems: v.2), North-Holland Publishing Company, p. 74-91, 1975.
- WILLIAMS, H.P.:** *Model Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons, Ltd., 1978.
- WINSTON, W.L.:** *Operations Research: Applications and Algorithms*. Wadsworth, Inc., 1991.

A MODEL BASED ON LINEAR PROGRAMMING AND GOAL PROGRAMMING TO ANALYZE A FROZEN CONCENTRATED ORANGE JUICE PRODUCTION AND DISTRIBUTION SYSTEM

Abstract

This work proposes a model based on linear programming and goal programming to support decisions in the blending process and distribution of frozen concentrated orange juice. This study explores the importance of blending decisions for the logistic analysis of the orange juice distribution, besides transportation and storage decisions. The model utilizes well-known concepts from the literature of blending problems and multistage, multiproduct and multiperiod production planning problems, and it was solved using the GAMS (General Algebraic Modeling System) programming language. A case study was developed in an orange juice industry located in São Paulo State, and the preliminary results are promising.

Key words: linear programming, goal programming, blending process, logistics of distribution, orange juice, multistage, multiproducts and multiperiods production planning.