

## Um modelo para análise do fluxo através das fundações de barragens de concreto

Jorge Felipe da Silva Filho

Eng. Civil, Doutor, Consultor em Engenharia Geotécnica.  
E-mail: jfsf@cmecc.com.br

Evandro Moraes da Gama

Eng. de Minas, PhD, Professor do Departamento de Minas, UFMG.  
E-mail: emgama@demin.ufmg.br

### Resumo

A determinação das subpressões, na base de barragens de concreto apoiadas em rochas contínuas permeáveis, exige a realização de uma análise de percolação. Esse tipo de análise é bastante complexo, principalmente pela presença dos drenos, perfurados em suas fundações, o que lhe confere um caráter tridimensional. Um enfoque numérico para esse problema é apresentado. Uma comparação com os resultados obtidos através de solução analítica, disponível na literatura, é realizada e os resultados obtidos mostram que a solução numérica proposta é adequada para utilização prática. Sugere-se que a solução proposta possa ser usada no projeto de barragens de concreto, assentes sobre materiais rochosos contínuos e permeáveis, incluindo aquelas cuja geometria e/ou condições geológicas não permitam a aplicação da solução analítica.

**Palavras-chaves:** Fundações de barragens, análise de percolação, subpressões.

### Abstract

*The determination of the uplift pressures in concrete dams, resting on continuous rocks, constitutes a complex three-dimensional seepage analysis problem due mainly to the presence of drains perforated in the foundations. Because of the difficulties involved, this type of analysis is seldom performed in dam design practice. A numerical approach to solve this problem is presented. A comparison with a closed form solution available in the literature is performed and the results obtained shows that the proposed numerical model is adequate for practical purposes. It is suggested that the proposed solution could be used in most cases of concrete dam design, including those where geological or geometrical conditions would not allow the use of the closed form solution.*

**Keywords:** Foundations of dams, flux and flow, subpression

# 1. Introdução

Uma das tarefas mais importantes do projeto geotécnico de barragens de concreto é a determinação de sua estabilidade ao deslizamento.

A Figura 1 mostra o sistema de forças que atuam em uma barragem de concreto típica. A correlação entre essas forças, de forma a manter o equilíbrio, é dada pela expressão:

$$F_s = \frac{(P - U).tg\Theta + cA}{H_m - H_j} \quad (1)$$

onde:

$F_s$  é o coeficiente de segurança ao deslizamento,  $P$  é o peso da estrutura (kN),  $H_m$  é a força devida ao reservatório de montante (kN),  $H_j$  é a força devida ao reservatório de jusante (kN),  $U$  é a força resultante das subpressões atuantes na base (kN),  $\Theta$  é o ângulo de atrito na base ( $^\circ$ ),  $c$  é a coesão na base (kN/m<sup>2</sup>) e  $A$  é a área da base da estrutura (m<sup>2</sup>).

A coesão e o ângulo de atrito são propriedades dos materiais de fundação. Os outros componentes são função da geometria da barragem, com exceção das subpressões, que são tanto função das permeabilidades dos materiais de fundação quanto da geometria do sistema de drenagem subsuperficial da barragem.

Assim, os únicos componentes da expressão (1) que podem ser manipulados pelo projetista são o peso da estrutura ( $P$ ) e a força resultante das subpressões ( $U$ ).

A expressão (1) mostra que o coeficiente de segurança aumenta com o peso da estrutura e diminui com a força resultante das subpressões. Como o peso da estrutura pode ser alterado, através de modificações na sua geometria, uma diminuição da força resultante das subpressões permitiria reduzir o volume de concreto da estrutura.

Assim, como as subpressões tem uma forte influência, tanto na estabilidade, quanto no custo da estrutura, sua determinação é provavelmente a tarefa mais importante do engenheiro responsável pelos aspectos geotécnicos do projeto de uma barragem de concreto.

# 2. Solução Analítica

A solução analítica desenvolvida por Muskat [7] para análise do fluxo convergente a uma linha de poços, perfurada em material homogêneo e isotrópico e localizada entre dois canais de água, foi usada por Casagrande [1] para determinar as subpressões atuantes na base de uma barragem de concreto contendo uma galeria de drenagem, com drenos lisos, conforme indicado na Figura 2.

A expressão utilizada por Casagrande [1] para a determinação das subpressões, na base da barragem, foi a seguinte:

$$s(x, y) = \frac{h_c a}{4\pi d} \ln \frac{\cosh 2\pi \left( \frac{y+d}{a} \right) - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\cosh 2\pi \left( \frac{y-d}{a} \right) - \cos \frac{2\pi x}{a}} \quad (2)$$

onde  $s(x, y)$  é a pressão (mca) em um ponto de coordenadas  $(x, y)$ , localizado no plano  $xy$  que contém a base da barragem (m),  $h_c$  é a carga total (m), " $a$ " é o espaçamento entre os drenos (m) e " $d$ " é a distância entre a face de montante e a linha de drenos (m).

As simplificações necessárias para a obtenção da expressão (2) foram as seguintes:

- Fluxo permanente e laminar e água incompressível.
- Material de fundação homogêneo, saturado, incompressível e isotrópico.
- Drenos lisos com comprimento igual à espessura das fundações.
- Fluxo apenas de montante, não ocorrendo fluxo a jusante da linha de drenos.
- Uma única linha de drenos.
- Base da barragem horizontal.

Essas simplificações impõem limitações para a aplicação da solução analítica, representada pela expressão (2), a casos reais. Como exemplo, a Figura 3 mostra uma seção de uma barragem de concreto típica que viola as simplificações apresentadas anteriormente, nos seguintes itens:

- Mais de uma linha de drenos.
- Drenos menores que a espessura das fundações.
- A base da barragem não é horizontal.
- Fluxo ocorre tanto por montante quanto por jusante.

# 3. Solução Numérica

Para contornar as limitações da expressão (2), uma solução numérica foi desenvolvida, através do método dos elementos finitos, obedecendo à seguinte seqüência:

- Desenvolvimento de um modelo para análises tridimensionais de meios contínuos permeáveis.
- Desenvolvimento de um modelo para simular o fluxo em drenos de seção circular.

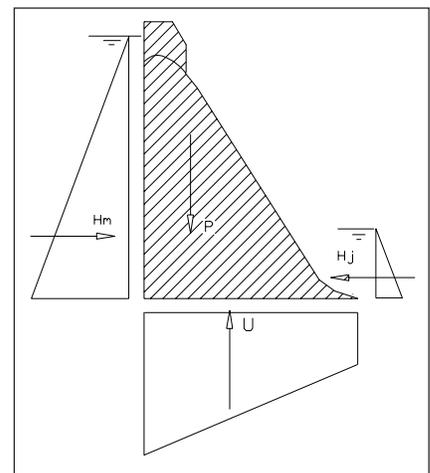


Figura 1 - Forças que atuam numa típica barragem de concreto.

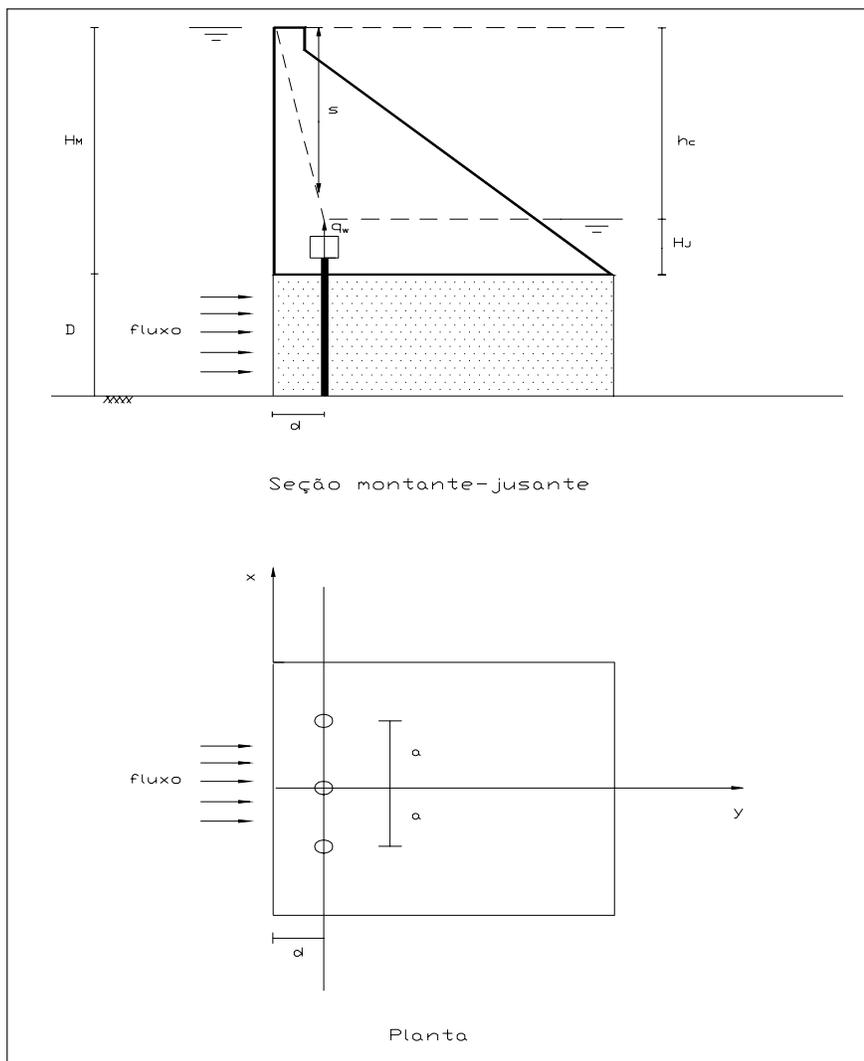


Figura 2 - Barragem de concreto com uma galeria de drenagem e uma linha de drenos.

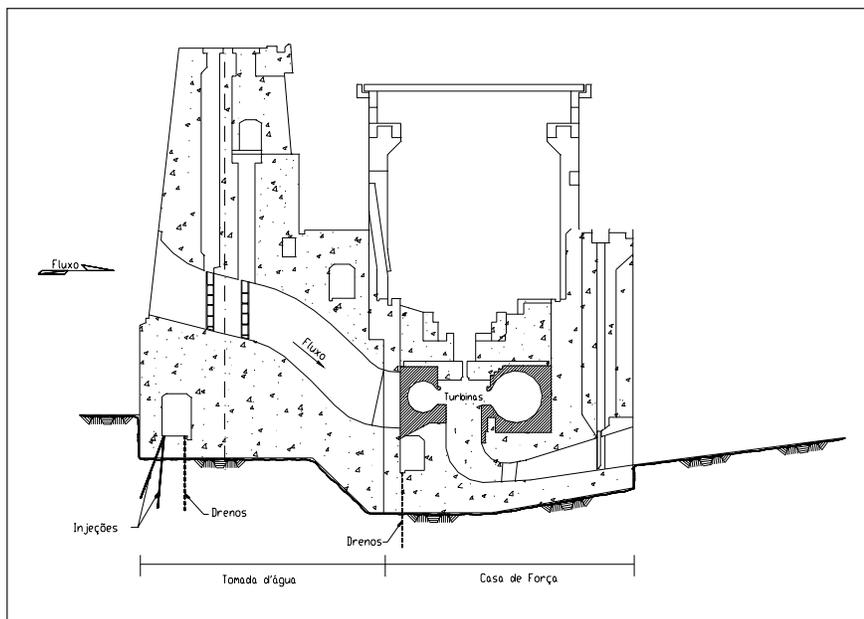


Figura 3 - Seção transversal - Estruturas da tomada d'água e casa de força.

### 3.1 Análises 3D em materiais contínuos e permeáveis

Em meios rochosos contínuos, o fluxo de água ocorre através dos poros do maciço e, para representá-lo, dois tipos de elementos finitos foram utilizados: hexaedros regulares, com oito nós, e prismas triangulares regulares com seis nós. Seguindo o proposto por Simunek et al. [8], cada hexaedro é subdividido em cinco tetraedros e cada prisma triangular é dividido em três tetraedros, na forma indicada na Figura 4.

Assim, basta determinar a matriz de rigidez para um tetraedro, já que os outros elementos podem ser obtidos através de uma montagem adequada de tetraedros.

A Figura 5 mostra uma tetraedro limitado pelos pontos nodais I, J, K e L e também um sistema global de coordenadas XYZ. Para um tensor de permeabilidades, simétrico, é possível definir um sistema de coordenadas X'Y'Z', chamado de sistema principal, no qual o tensor é diagonal e as permeabilidades cruzadas são todas iguais a zero. Assumindo a validade da lei de Darcy, tem-se para o caso tridimensional:

$$\begin{aligned} V_{x'} &= k_{x'} i_{x'} \\ V_{y'} &= k_{y'} i_{y'} \end{aligned} \quad (3)$$

$V_{z'} = k_{z'} i_{z'}$   
onde  $V_{x'}$  é a velocidade do fluxo na direção X' (m/s),  $K_{x'}$  é o coeficiente de permeabilidade na direção X' (m/s),  $i_{x'}$  é o gradiente hidráulico na direção X', etc.

As equações (3) podem ser representadas pela expressão de Hubbert [5]:

$$\begin{aligned} V_{x'} &= -K_{x'} \left( \frac{\partial P}{\partial x'} + \rho g_{x'} \right) \\ V_{y'} &= -K_{y'} \left( \frac{\partial P}{\partial y'} + \rho g_{y'} \right) \\ V_{z'} &= -K_{z'} \left( \frac{\partial P}{\partial z'} + \rho g_{z'} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $V_{x'}$  é a velocidade do fluxo na direção X' (m/s),  $K_{x'}$  é o coeficiente de permeabilidade na direção X' (m/s), P é a pressão num ponto no interior do elemento ( $\text{kN/m}^2$ ),  $\rho$  é a densidade da água

(kN/m<sup>3</sup>),  $g_x$  é a aceleração da gravidade na direção X' (m/s<sup>2</sup>),  $i_x$  é o gradiente hidráulico na direção X', etc.

Assumindo uma variação linear de P, no interior do tetraedro, tem-se que:

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 x' + \alpha_3 y' + \alpha_4 z' \quad (5)$$

Em forma matricial:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

As pressões nos pontos nodais são então:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x'_i & y'_i & z'_i \\ 1 & x'_j & y'_j & z'_j \\ 1 & x'_k & y'_k & z'_k \\ 1 & x'_l & y'_l & z'_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad \therefore \{P_i\} = [\phi_i] \{\alpha_i\} \quad (7)$$

Invertendo (7) tem-se:

$$\{\alpha_i\} = [\phi_i]^T \{P_i\} \quad (8)$$

Substituindo (6) em (8):

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{bmatrix} [\phi_i]^T \{P_i\} \quad \therefore \{P\} = [N] \{P_i\} \quad (9)$$

A expressão (9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} \quad (10)$$

onde, segundo Zienkiewicz [9]:

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x' + c_i y' + d_i z') \quad (11)$$

$$N_j = \frac{1}{6V} (a_j + b_j x' + c_j y' + d_j z')$$

$$N_k = \frac{1}{6V} (a_k + b_k x' + c_k y' + d_k z')$$

$$N_l = \frac{1}{6V} (a_l + b_l x' + c_l y' + d_l z') \text{ e:} \quad (12)$$

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x'_i & y'_i & z'_i \\ 1 & x'_j & y'_j & z'_j \\ 1 & x'_k & y'_k & z'_k \\ 1 & x'_l & y'_l & z'_l \end{vmatrix}$$

sendo "V" o volume do tetraedro e:

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x'_j & y'_j & z'_j \\ x'_k & y'_k & z'_k \\ x'_l & y'_l & z'_l \end{vmatrix} \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y'_j & z'_j \\ 1 & y'_k & z'_k \\ 1 & y'_l & z'_l \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$c_i = -\det \begin{vmatrix} x'_j & 1 & z'_j \\ x'_k & 1 & z'_k \\ x'_l & 1 & z'_l \end{vmatrix} \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x'_j & y'_j & 1 \\ x'_k & y'_k & 1 \\ x'_l & y'_l & 1 \end{vmatrix}$$

As outras constantes são obtidas através de uma rotação cíclica dos índices, na ordem i, j, k, l.

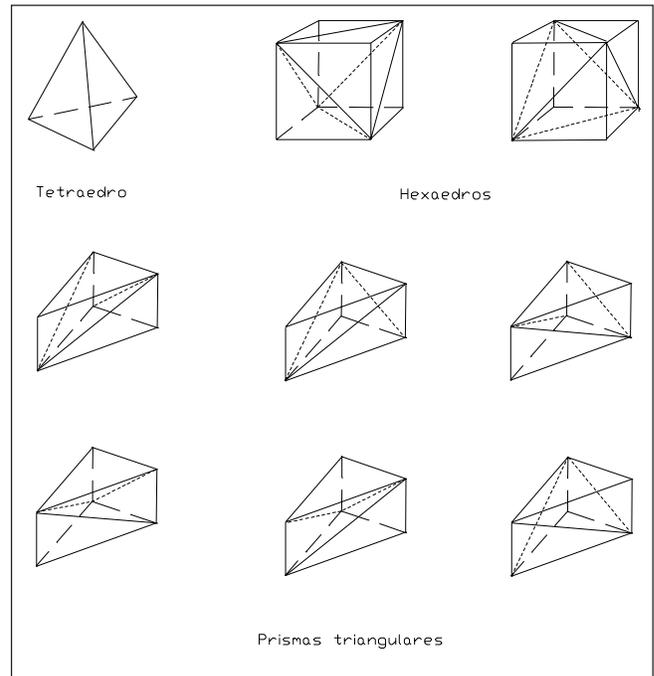


Figura 4 - Subdivisão de prismas em tetraedros [8].

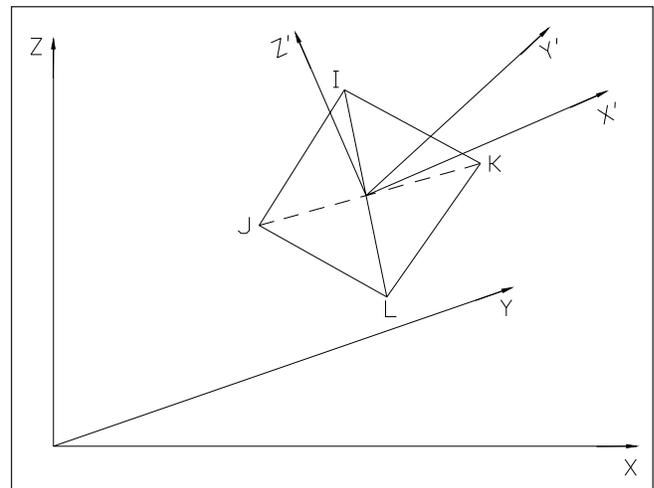


Figura 5 - Tetraedro submetido a um fluxo tridimensional.

Das expressões anteriores tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x'} \\ \frac{\partial P}{\partial y'} \\ \frac{\partial P}{\partial z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Das expressões (4) e (14) tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & K_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & K_{z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho g_{x'} \\ \rho g_{y'} \\ \rho g_{z'} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

onde:

$$[k] = - \begin{bmatrix} K_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & K_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & K_{z'} \end{bmatrix} \quad (16) \text{ e}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} \quad (17)$$

De acordo com Desai e Cristian [4], em termos de coordenadas globais:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(y', x) & \cos(z', x) \\ \cos(x', y) & \cos(y', y) & \cos(z', y) \\ \cos(x', z) & \cos(y', z) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

De acordo com Kealy and Busch [6], tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x'} + \rho g_{x'} \\ \frac{\partial P}{\partial y'} + \rho g_{y'} \\ \frac{\partial P}{\partial z'} + \rho g_{z'} \end{Bmatrix} = [C]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Assim, a expressão (15) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = -[C] [k] [C]^T \begin{Bmatrix} \frac{1}{6V} [B] \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

onde  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  são as velocidades do fluxo, em termos de coordenadas globais.

De acordo com Desai [3], o fluxo nos nós é igual a :

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \\ Q_l \end{Bmatrix} = -\frac{1}{6} [B]^T \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Substituindo (20) em (21):

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \\ Q_l \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} [B]^T [C] [k] [C]^T \begin{Bmatrix} \frac{1}{6V} [B] \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

A matriz

$$[K] = \frac{1}{36V} [B]^T [C] [k] [C]^T [B] \quad (23)$$

é a matriz de rigidez do tetraedro.

## 3.2 Fluxo em drenos lisos

A Figura 6 indica um elemento finito unidimensional, limitado pelos nós I e J, que representa um dreno circular com fluxo na direção X'. Indica-se, ainda, um sistema de coordenadas globais XYZ.

Assumindo que a lei de Darcy, para tubos circulares lisos, possa representar o fluxo de água nos drenos, tem-se que:

$$V_{\text{dreno}} = \frac{g D^2}{32\nu} i \quad (24)$$

Onde  $V_{\text{dreno}}$  é a velocidade do fluxo no dreno (m/s),  $g$  é a aceleração da gravidade (m/s<sup>2</sup>),  $D$  é o diâmetro do dreno (m) and  $\nu$  é a viscosidade cinemática da água.

A equação (24) pode ser escrita como:

$$V_{x'} = K_{x'} i_{x'} \quad (25)$$

onde  $V_{x'}$  é a velocidade do fluxo na direção X' (m/s),  $K_{x'}$  é o coeficiente de permeabilidade do dreno liso, "equivalente" ao coeficiente de permeabilidade  $K$  de um meio poroso, na direção X' (m/s) e  $i_{x'}$  é o gradiente hidráulico na direção X'.

Comparando-se as equações (24) e (25), tem-se:

$$K_{x'} = \frac{g D^2}{32\nu} \quad (26)$$

A equação (25), de acordo com Hubbert's [5], pode ser expressa da seguinte forma:

$$V_{x'} = -K_{x'} \left( \frac{\partial P}{\partial x'} + \rho g_{x'} \right) \quad (27)$$

onde  $V_{x'}$  é a velocidade do fluxo na direção  $X'$  (m/s),  $K_{x'}$  é o coeficiente de permeabilidade na direção  $X'$  (m/s),  $P$  é a pressão em um ponto no interior do elemento (kN/m<sup>2</sup>),  $\rho$  é a densidade da água (kN/m<sup>3</sup>) e  $g_{x'}$  é o componente da aceleração da gravidade, na direção  $X'$  (m/s<sup>2</sup>).

Assumindo uma variação linear para  $P$ , no interior do dreno:

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 x' \quad (28)$$

E, em forma matricial:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 1 & x' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Da equação (28) tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial x'} = \alpha_2 \quad (30)$$

Aplicando a equação (28) aos nós I e J:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x'_i \\ 1 & x'_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

A inversão de (31) permite determinar  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x'_j - x'_i} \begin{bmatrix} x'_j & -x'_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} \quad (32)$$

A substituição de (30) e (32) em (27) permite determinar a velocidade no dreno:

$$\{V_{x'}\} = -[K_{x'}] \frac{1}{x'_j - x'_i} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} - [K_{x'}] \{\rho g_{x'}\} \quad (33)$$

O fluxo nos nós I e J pode ser expresso por:

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Ak_{x'}}{L} & -\frac{Ak_{x'}}{L} \\ -\frac{Ak_{x'}}{L} & \frac{Ak_{x'}}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Ak_{x'} \rho g \sin \Theta \\ -Ak_{x'} \rho g \sin \Theta \end{Bmatrix} \quad (34)$$

onde  $Q_i$  é o fluxo no nó I (m<sup>3</sup>/s),  $Q_j$  é o fluxo no nó J (m<sup>3</sup>/s),  $A$  é a área da seção transversal do dreno (m<sup>2</sup>),  $K_{x'}$  é o coeficiente de permeabilidade "equivalente" do dreno (m/s),  $P_i$  é a pressão no nó I (kN/m<sup>2</sup>),  $P_j$  é a pressão no nó J (kN/m<sup>2</sup>),  $\Theta$  é o ângulo entre as direções  $X$  e  $X'$  (°),  $\rho$  é a densidade da água (kN/m<sup>3</sup>) e  $g$  é a aceleração da gravidade (m/s<sup>2</sup>).

Na expressão (34), a matriz:

$$\{K\} = \begin{bmatrix} \frac{Ak_{x'}}{L} & -\frac{Ak_{x'}}{L} \\ -\frac{Ak_{x'}}{L} & \frac{Ak_{x'}}{L} \end{bmatrix} \quad (35)$$

é a matriz de rigidez do elemento dreno.

### 3.3 Solução do sistema de equações

Seguindo o exposto em Kealy e Busch [6], considerando-se todos os elementos conectados a um nó "M" qualquer, a continuidade do fluxo nesse nó será assegurada por:

$$\sum_{i=1}^m Q_M^i = 0 \quad (36)$$

onde "m" é o número total de elementos conectados ao nó "M" e "i" é o elemento a partir do qual  $Q_M^i$  é computado.

## 4. Verificação da precisão do modelo

A Figura 7 mostra uma barragem de concreto, apoiada em material homogêneo e isotrópico, juntamente com os dados necessários para utilização da solução analítica (2).

A Figura 8 indica a malha de elementos finitos tridimensionais, utilizada para a análise da percolação nas fundações da barragem indicada na Figura 7.

Os resultados obtidos pelas duas soluções estão indicados na Figura 9 e na Figura 10, que mostram os diagramas de subpressão na base da barragem de concreto, tanto no sentido montante-jusante quanto no sentido ombreira-ombreira. As duas seções foram traçadas passando pelos drenos.

## 5. Conclusões

Os resultados das análises, indicadas na Figura 9 e na Figura 10, mostram uma aderência muito boa entre os resultados obtidos através da solução analítica e através do modelo numérico proposto, para as subpressões na base da barragem.

Embora a solução numérica tenha eliminado a maioria das limitações da solução analítica, ela ainda possui algumas limitações como as que exigem que o material de fundação seja

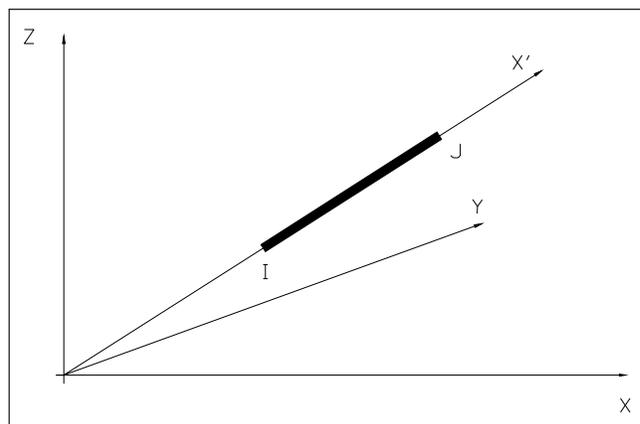


Figura 6 - Elemento finito unidimensional (dreno).

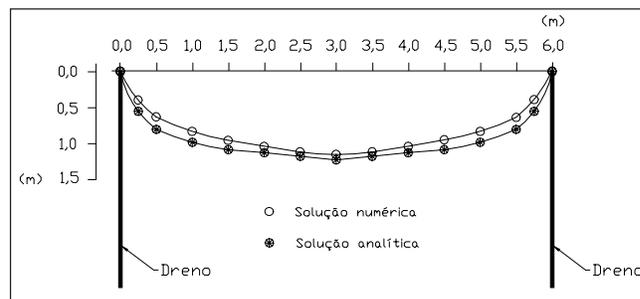
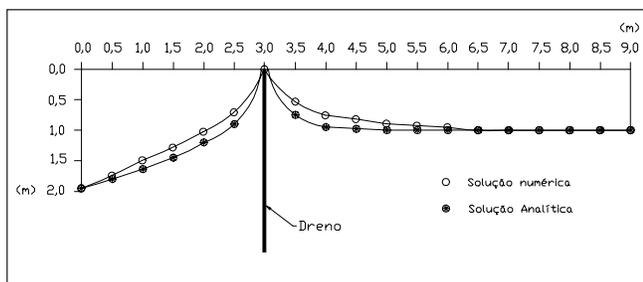
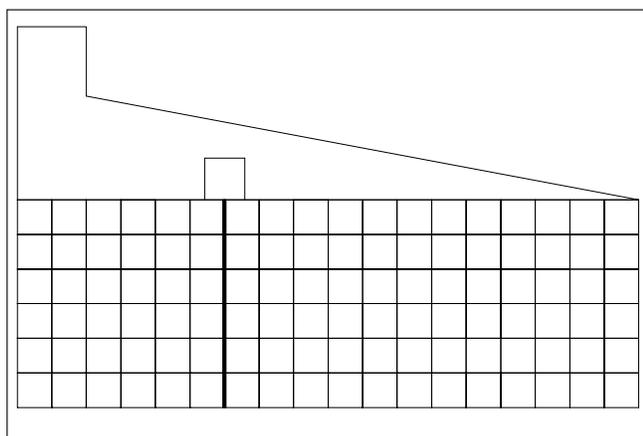
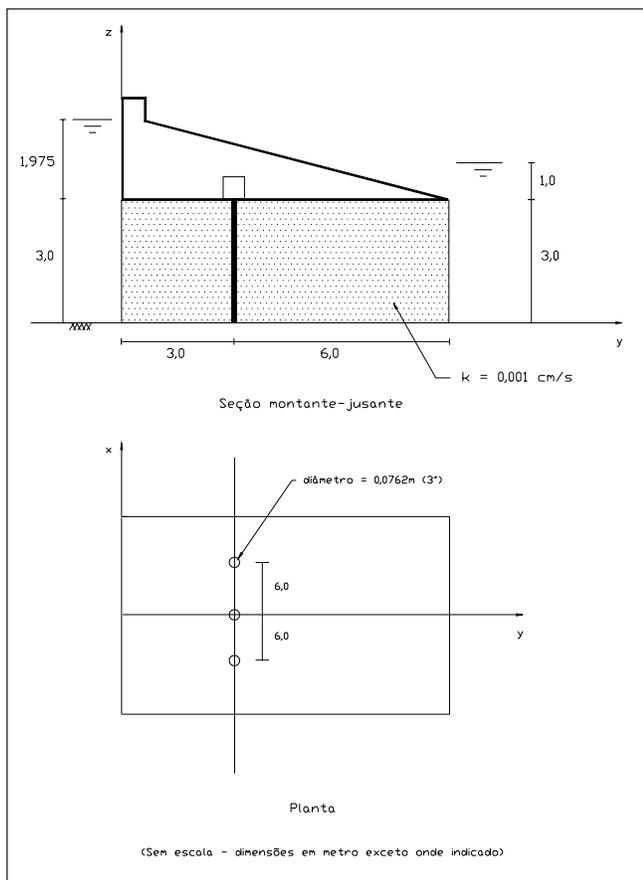


Figura 10 - Diagrama de subpressões na base de barragem de concreto - Seção ombreira-ombreira.

contínuo e que os drenos sejam lisos. Apesar dessas limitações, os resultados das análises indicaram que a solução numérica proposta pode ser utilizada, de forma adequada, em análises de percolação de casos reais de barragens de concreto.

## Referências bibliográficas

- [1] CASAGRANDE, A. *Control of seepage through foundations and abutments of dams*. Primeira "Rankine lecture". Milestones in soil mechanics. London: Institution of Civil Engineers, 1975. p. 1-21.
- [2] DA SILVA FILHO, J.F. *Modelo numérico para a análise do fluxo tridimensional de água através das fundações de barragens de concreto assentes sobre rochas contínuas permeáveis*. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais. 2002. (Tese de doutorado).
- [3] DESAI, C.S., ABEL, J.F. *Introduction to the finite element method*. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold, 1972.
- [4] DESAI, C.S., CHRISTIAN, J.T. *Numerical methods in geotechnical engineering*. Nova Iorque: McGraw-Hill: 1977.
- [5] HUBBERT, MK. The theory of ground-water motion. *J. Geol.* v. 48, n. 8, Parte 1, p. 785-944, 1940.
- [6] KEALY, C.D., BUSCH, R.A. *Determining seepage characteristics of mill tailings dams by the finite element method*. Washington: US Bureau of Mines Report of Investigation, 1971, RI-7477.
- [7] MUSKAT M. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Ann Arbor: J.M. Edwards, 1946.
- [8] SIMUNEK, J., HUANG K, VAN GENUCHTEN, M Th. *The Swms3d code for simulating flow and solute transport in three-dimensional variably-saturated media*. Riverside. California. Research report no. 139: U.S. Salinity Laboratory: 1995.
- [9] ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. 3. ed. London: McGraw-Hill, 1977.

Artigo recebido em 23/09/2002 e aprovado em 01/12/2003.