

## Aplicação de um elemento finito híbrido não linear na modelagem de estruturas metálicas

### *Application of a nonlinear hybrid finite element in the structural steel modeling*

#### **Marcelo Nascimento Santos**

M.Sc., Professor

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG)  
Campus Congonhas: Área de Edificações  
Ouro Preto, MG, Brasil  
[marcelo.santos@ifmg.edu.br](mailto:marcelo.santos@ifmg.edu.br)

#### **Paulo Anderson Santana Rocha**

D.Sc., Professor Adjunto,  
Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)  
Campus Ouro Branco  
Departamento de Engenharia Civil  
Ouro Branco, MG, Brasil  
[pandrocha@yahoo.com.br](mailto:pandrocha@yahoo.com.br)

#### **Andréa Regina Dias da Silva**

D.Sc., Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC)  
Deciv / Escola de Minas, UFOP  
Ouro Preto, MG, Brasil  
[andreadiassilva@yahoo.com.br](mailto:andreadiassilva@yahoo.com.br)

#### **Ricardo Azoubel da Mota Silveira**

D.Sc., Professor Associado,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC)  
Deciv / Escola de Minas, UFOP  
Ouro Preto, MG, Brasil  
[ricardo@em.ufop.br](mailto:ricardo@em.ufop.br)

#### **Resumo**

Nesse trabalho, um elemento finito híbrido, que incorpora em sua formulação os efeitos não lineares de segunda ordem, da inelasticidade do aço e da semirrigidez da ligação, é utilizado para modelar e analisar sistemas estruturais reticulados planos em aço. Trata-se do elemento finito clássico de pórtico plano que apresenta, em suas extremidades, pares de molas dispostas em série. Uma das molas é representada pelo parâmetro  $S_c$ , que define o grau de rigidez da ligação entre as barras; a outra mola é representada pelo parâmetro  $S_p$ , que avalia a plastificação da seção. A matriz de rigidez desse elemento incorpora todos os efeitos não lineares supracitados. O presente trabalho faz uma averiguação da eficiência computacional do elemento híbrido na simulação isolada e combinada desses efeitos não lineares. Problemas clássicos de equilíbrio e estabilidade são inicialmente modelados e, em seguida, a atenção é voltada para a análise de sistemas estruturais com ligações flexíveis. Por fim, o referido elemento é utilizado em análises inelásticas de pórticos planos baseadas no método da rótula plástica refinado. Através dessas análises, é possível verificar e validar o emprego do elemento híbrido na modelagem numérica de diversos problemas estruturais não lineares na engenharia civil.

**Palavras-chave:** Elemento finito híbrido, análise não linear, método dos elementos finitos, estabilidade estrutural.

#### **Abstract**

*In this work, a hybrid finite element that incorporates in its formulation the second-order effect, material yielding and connection flexibility effects are presented to study the behavior of plane steel frames. In fact, it is the classic beam-column finite element that presents, at its ends, pairs of springs arranged in sequence. One of the springs is represented in the mathematical formulation of this element by the parameter  $S_c$ , which defines the joint stiffness of the members; the other spring, whose rigidity is simulated by the parameter  $S_p$ , evaluates the plastification of the cross section. The element stiffness matrix incorporates these three mentioned nonlinear effects. Therefore, the aim of this work is to investigate the computer efficiency of this hybrid finite element in the isolated and combined simulation of these nonlinear effects. Initially, equilibrium and stability of classic structural problems with high nonlinear behavior and critical points in the equilibrium paths are studied. Semi-rigid structural systems with initial geometric imperfections are also evaluated. Later, the hybrid element is tested in the inelastic analysis of plane steel frames based on refined plastic-hinge*

method. Through these examples, it was possible to validate and verify the use of the proposed hybrid finite element in the numerical modeling of various nonlinear structural problems in civil engineering.

**Keywords:** Hybrid finite element, nonlinear analysis, finite element method, structural stability.

## 1. Introdução

As metodologias de análise/projeto estrutural passam por uma mudança de paradigma, onde as análises lineares (com adaptações para consideração de efeitos não lineares) estão sendo progressivamente substituídas por análises capazes de englobar diversos efeitos não lineares (segunda-ordem, inelasticidade do aço, semirrigidez das ligações, interação solo-estrutura, efeitos dinâmicos, entre outros). Diversas normas de projeto, mesmo que sugerindo o uso de análises não lineares, ainda apresentam inconsistências no sentido de estabelecer uma conexão entre a etapa da análise e a de projeto estrutural (AISC, 2005; NBR8800, 2003; AS4100, 1990). Por exemplo, no caso das estruturas reticuladas metálicas, a relação entre o comportamento global do sistema e seus membros isolados é estabelecida através do fator de comprimento efetivo de flambagem  $K$ .

Pode-se afirmar, então, que o comportamento do sistema estrutural e de seus membros possui uma interdependência, que é considerada de forma inadequada pelas normas técnicas atuais. Em geral, são feitas análises elásticas de segunda or-

dem e os resultados obtidos são aplicados em equações de interação, que consideram a plastificação da seção. Esse fato, aliado à evolução dos sistemas computacionais, exige, então, a adoção de uma nova metodologia ou um conceito para a análise e o projeto. Essa metodologia deve ser capaz de avaliar, conjuntamente, o comportamento membro-estrutura. Vários pesquisadores têm estudado o assunto e desenvolvido formulações com o objetivo de examinar o comportamento não linear de estruturas metálicas. Atenção especial tem sido dada à inclusão, na análise, de vários efeitos não lineares, sejam eles de origem física ou geométrica. Nessa linha de pesquisa, pode-se destacar os trabalhos de Chen & Sohal (1995), Chan & Chui (2000), Chan e Zhou (2004) e Gizejowski et al. (2006). No Brasil, os trabalhos de Landesmann (1999), Assaid (2001), Machado (2005), Alvarenga (2005) e Rocha (2006) merecem destaque.

A maioria dessas pesquisas está relacionada com a chamada *Análise Numérica Avançada* de estruturas metálicas. Em geral, são propostos modelos numéricos estruturais com o emprego de

elementos finitos não lineares, que incorporam, em suas formulações, fatores considerados relevantes para uma análise/projeto. Entre esses fatores relevantes, destacam-se: os efeitos da plastificação da seção e dos grandes deslocamentos da estrutura (efeitos de segunda ordem). A consideração da flexibilidade das ligações e das tensões residuais na formulação do elemento finito híbrido, assim como a possibilidade de introdução de imperfeições geométricas e de carregamento no modelo estrutural, é muito importante para a obtenção de um dimensionamento seguro (Santos, 2007).

Nesse contexto, o objetivo do presente trabalho é apresentar e discutir as respostas numéricas de alguns sistemas estruturais metálicos modelados com o elemento finito híbrido não linear de viga-coluna (Rocha, 2006; Santos, 2007). Os exemplos escolhidos destacam-se por serem problemas estruturais já consagrados na literatura e que apresentam comportamento governado para cada um dos efeitos não lineares isolados ou em conjunto (segunda ordem, inelasticidade do aço e flexibilidade da ligação).

## 2. Elemento finito híbrido não linear

O elemento finito híbrido adotado, aqui, na modelagem de problemas estruturais não lineares, é ilustrado na Figura 1. Trata-se do elemento de pórtico plano que possui, acoplado a cada uma de suas extremidades, um par de molas dispostas

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_{cs}} \begin{bmatrix} \beta_{cs} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{cs} S_{cs1} - S_{cs1}^2 (S_{cs2} + K_{22}) & S_{cs1} S_{cs2} K_{12} \\ 0 & S_{cs2} S_{cs1} K_{21} & \beta_{cs} S_{cs2} - S_{cs2}^2 (S_{cs1} + K_{11}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e \\ \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

em série. Cada mola destina-se à simulação de um efeito não linear. Uma das molas incorpora o efeito da rigidez da ligação através do parâmetro  $S_c$  e a outra está relacionada com o efeito da plastificação da seção através do parâmetro  $S_s$ .

pectivamente, o módulo de elasticidade, a área da seção transversal e o comprimento do elemento. Os parâmetros  $\beta_{cs}$ ,  $S_{cs1}$  e  $S_{cs2}$  acoplam os efeitos da rigidez

Por simplicidade, os elementos de mola são modelados como pontuais (dimensões desprezíveis) e apenas a deformação rotacional da conexão é considerada. A relação de equilíbrio do referido elemento (sistema corrotacional básico) é definida como segue:

$$\beta_{cs} = (S_{c1} + K_{11})(S_{c2} + K_{22}) - K_{12} K_{21},$$

$$S_{cs1} = \frac{S_{c1} S_{s1}}{(S_{c1} + S_{s1})}$$

$$S_{cs2} = \frac{S_{c2} S_{s2}}{(S_{c2} + S_{s2})} \quad (2)$$

Os valores de  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{12}$  e  $K_{21}$  são definidos de forma a incorporarem

os efeitos de segunda ordem. No caso

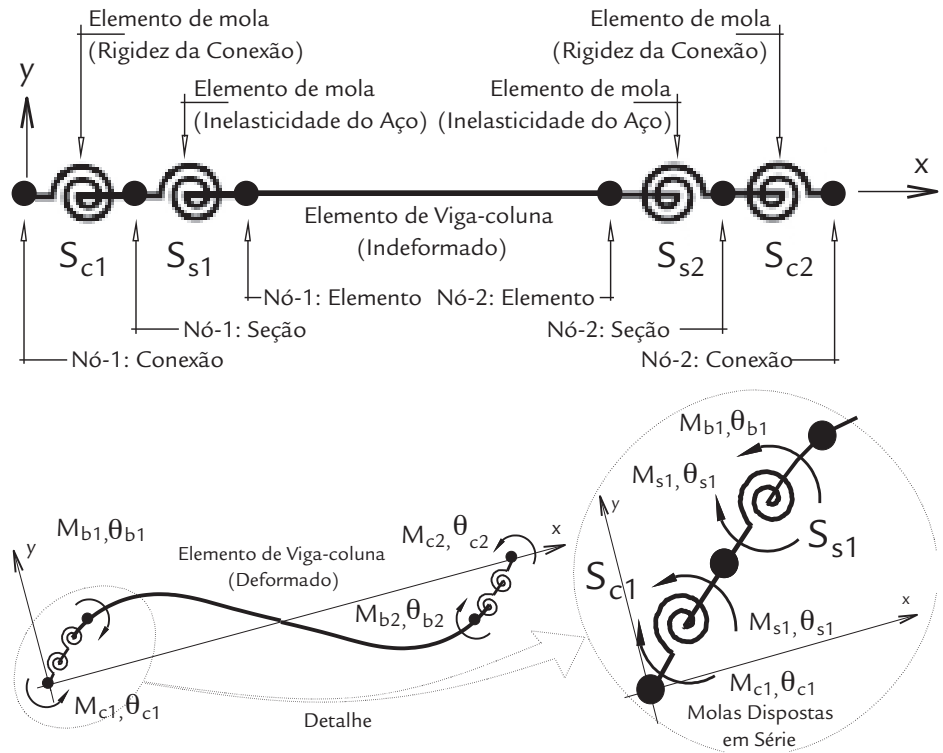


Figura 1  
Elemento finito híbrido  
de viga-coluna (Santos, 2007).

de sistemas estruturais, ou membros, com presença de forças axiais P de mo-

derada magnitude, pode-se fazer o uso de uma formulação simplificada (Chan

& Chui, 2000), para esses coeficientes  $K_{ij}$ , ou seja:

$$K_{11} = K_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} \text{ e } K_{12} = K_{21} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} \quad (3)$$

em que EI é a rigidez flexional e P é a força axial atuante no elemento.

Note que a Equação 1 define o equilíbrio do elemento híbrido no seu sistema

de coordenadas local básico ou sistema corrotacional. Porém, durante a montagem da matriz de rigidez e do vetor das forças internas da estrutura, é necessário

que se tenham, respectivamente, os vetores de forças e deslocamentos nodais no sistema de coordenadas global (6 componentes por elemento; Machado, 2005).

### Modelagem numérica da ligação semirrígida

Os modelos que caracterizam o comportamento de uma ligação semirrígida podem ser classificados em lineares ( $S_c$  constante) e não lineares ( $S_c$  variável). Em ambos os casos, a rigidez dos nós do

elemento finito pode ser avaliada através do fator de rigidez  $\gamma$ , que apresenta valores compreendidos entre 0, no caso de ligação rotulada, e 1, no caso de a mesma ser rígida.

$$S_c^0 = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{3EI}{L} \quad (4)$$

Já, para o caso de um modelo não linear de ligação, normalmente um número maior de parâmetros é necessário. Tal modelo deve ser capaz de fornecer va-

lores atualizados de rigidez  $S_c$  a cada passo incremental-iterativo. Entre os vários modelos não lineares utilizados, para representar a variação momento-rotação

A rigidez inicial da ligação ( $S_c^0$ ), que, no caso do modelo linear, é mantida constante durante toda análise, pode ser fornecida através da expressão:

de uma conexão, destaca-se, aqui, o modelo exponencial, cuja expressão matemática é dada por (Pinheiro, 2003; Lui & Chen, 1988):

$$S_c = \frac{DM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} \exp \left[ \frac{|\phi_c|}{2j\alpha} \right] + R_{kf} \quad (5)$$

onde M é o momento na conexão;  $\phi_c$  é a deformação rotacional;  $R_{kf}$  é o ganho de

rigidez devido ao encruamento do aço;  $\alpha$  é um fator de escala; n é o número de ter-

mos considerados e  $C_j$  é o coeficiente de ajuste da curva.

### Modelagem numérica da inelasticidade do aço

O parâmetro  $S_s$ , que simula a degradação da resistência da seção causada

pela plastificação, pode ser definido de acordo com a expressão (Chan & Chui,

2000; Sekulovic e Nefovska-Danilovic, 2004):

$$S_s = \frac{6EI}{L} \frac{|M_{pr} - M|}{|M - M_{er}|}, \text{ para } M_{er} < M < M_{pr} \quad (6)$$

na qual,  $M_{pr}$  é o momento de plastificação reduzido e  $M_{er}$  é o momento de início

de escoamento, que estão definidos em Machado (2005).

### 3. Estratégia de solução não linear

A metodologia de solução de equações não lineares adotada nesse

trabalho é apresentada na Figura 2. Esse algoritmo baseia-se na solução da

equação de equilíbrio (Equação 7) de forma incremental-iterativa.

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{F}_e, \text{ ou } \mathbf{F}_i(\mathbf{u}) \equiv \lambda \mathbf{F}_r \quad (7)$$

Como apresentado, para cada incremento de carga, duas fases são definidas: a *predita*, que envolve a obtenção dos deslocamentos nodais incrementais; e a *correti-*

va, que tem o objetivo de corrigir as forças internas até o equilíbrio ser atingido. Na equação anterior, o vetor das forças internas  $\mathbf{F}_i$  é função dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  nos

pontos nodais da estrutura,  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas e  $\lambda$  é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de  $\mathbf{F}_r$ , que é um vetor de referência.

- 
1. Configuração inicial:  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$
  2. Solução incremental inicial:  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0$ 
    - a. Calcula a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$
    - b. Resolve:  $\delta\mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
    - c. Define:  $\Delta\lambda^0$
    - d. Calcula:  $\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_r$
    - e. Atualiza as variáveis:  
 ${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0$
  3. Iterações Newton-Raphson:  $k = 1, 2, \dots, N_i$ 
    - a. Calcula:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$
    - b. Calcula:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)} - {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r$
    - c. Verifica a convergência:  $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\| \leq \xi$
- Sim:** Novo incremento: retorne ao item 1
- d. Calcula:  $\delta\lambda^k$
  - e. Determina:  $\delta\mathbf{u}^k = \delta\mathbf{u}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{u}_r^k$ , sendo:  
 $\delta\mathbf{u}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$  e  $\delta\mathbf{u}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$
  - f. Atualiza o parâmetro de carga e os deslocamentos:  
 Incrementais:  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k$   
 Totais:  ${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^k = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k$   
 e retorna ao item 3.
- 

Notação:  $\lambda$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\delta\lambda$ , e  $\mathbf{u}$ ,  $\Delta\mathbf{u}$ ,  $\delta\mathbf{u}$  = parâmetros de carga e deslocamento nodal total, incremental e iterativo;  $k$  = contador do número de iterações;  $(k-1)$  = última iteração;  $N_i$  = número máximo de iterações;  $\xi$  = fator de tolerância;  $\delta\mathbf{u}_r$  = vetor de deslocamentos nodais tangente;  $\delta\mathbf{u}_g$  e  $\delta\mathbf{u}_r$  = correção dos deslocamentos nodais devido a  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{F}_r$ ,  $t+\Delta t$  = configuração de equilíbrio atual;  $t$  = última configuração de equilíbrio conhecida.

Figura 2  
Algoritmo de solução não linear adotado.

## 4. Exemplos

### Arco circular abatido biapoado

O primeiro problema estudado é mostrado na Figura 3, juntamente com algumas trajetórias de equilíbrio. Trata-se de um arco circular abatido esbelto com comportamento geometricamente não linear acentuado. Apenas a condição da carga vertical  $P$  aplicada no eixo de simetria do arco (sistema perfeito) foi considerada. Os

resultados dessa análise são comparados com os de Galvão (2000), que empregou uma formulação de ordem elevada.

Considerou-se, na modelagem, apenas o elemento híbrido apresentado na Seção 2, mas com os parâmetros  $S_c \equiv \infty$  e  $S_s \equiv \infty$  (na realidade,  $\sigma_y \equiv \infty$ ). Foram adotadas malhas com 4, 6, 10 e 20 elementos

(arco completo). Através da Figura 3, observa-se que o comportamento esperado do arco não é descrito adequadamente com 4 elementos e a carga crítica atingida é inferior àquela obtida por Galvão (2000); o modelo com 10 elementos híbridos apresenta boa concordância com os resultados da literatura.

### Arco treliçado simplesmente apoiado

Analisa-se, agora, o arco treliçado mostrado na Figura 4. Objetiva-se

estudar a bifurcação desse arco e a influência da rigidez da conexão entre

as barras no valor da sua carga crítica. Três hipóteses de vinculação entre as

barras foram consideradas: rotuladas  $L_f = L_b$  ( $S_c \rightarrow 0$ ), semirrígidas  $L_f = 0.8L_b$  ( $S_c \rightarrow 1.56EI/L_b$ ) e rígidas  $L_f = 0.5L_b$  ( $S_c \rightarrow \infty$ ).  $L_b$  e  $L_f$  são, respectivamente, o comprimento real da barra da treliça e o comprimento de flambagem elástica do elemento finito híbrido. Para estimular o modo de flambagem assimétrica do

arco, impôs-se uma pequena imperfeição geométrica inicial ( $e = L/1000$ ) à estrutura, como é ilustrado no detalhe 1 da Figura 4.

A Figura 5 exibe as trajetórias de equilíbrio do arco treliçado (caso rotulado:  $L_f = L_b$ ;  $S_c \rightarrow 0$ ), para o caso perfeito ( $e = 0$ ) e imperfeito ( $e \neq 0$  indicada

no detalhe 1). Observa-se, a partir dessa figura, que foi possível reproduzir, com boa precisão, o comportamento assimétrico da estrutura. Já, na Figura 6, são apresentados os valores de carga crítica ( $e \neq 0$ ), para as três hipóteses de rigidez consideradas na ligação entre as barras.

Figura 3  
Arco circular abatido: dados e trajetórias de equilíbrio do sistema perfeito ( $M = 0$ ).

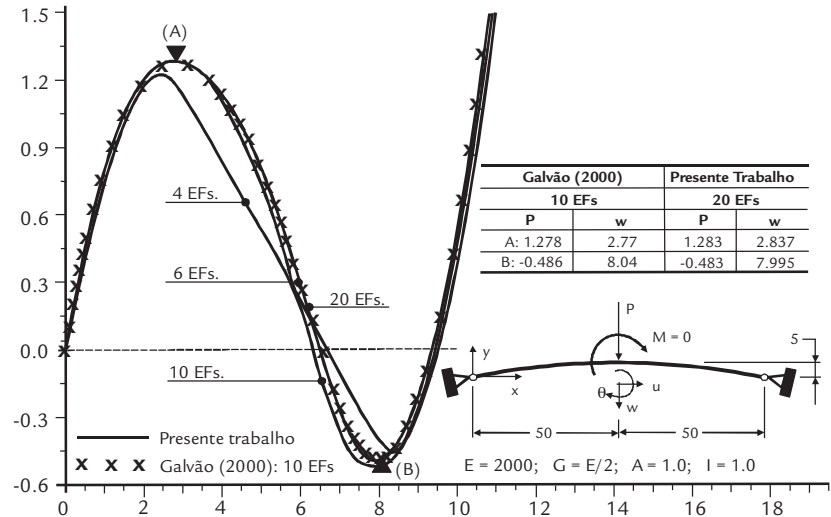


Figura 4  
Arco treliçado com ligações rotuladas, rígidas e semirrígidas.

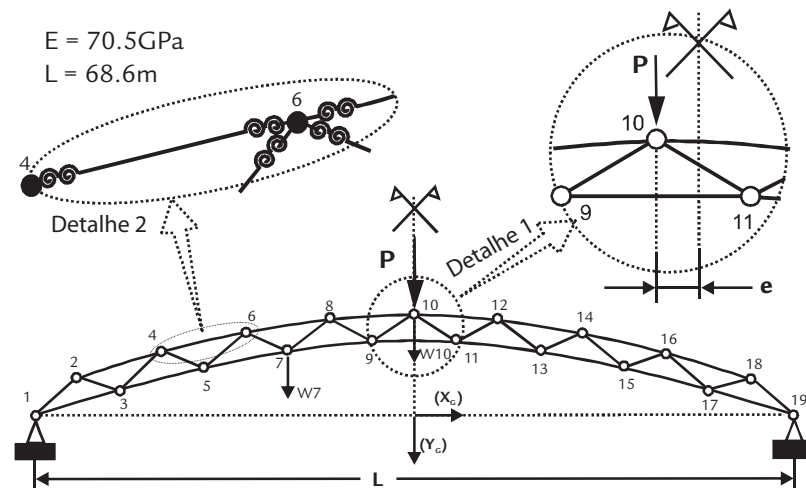
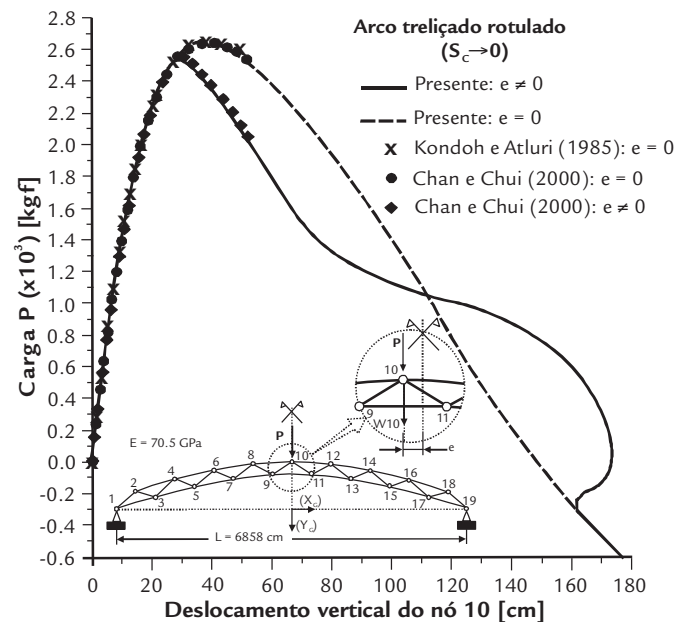


Figura 5  
Trajetórias de equilíbrio do arco treliçado rotulado.



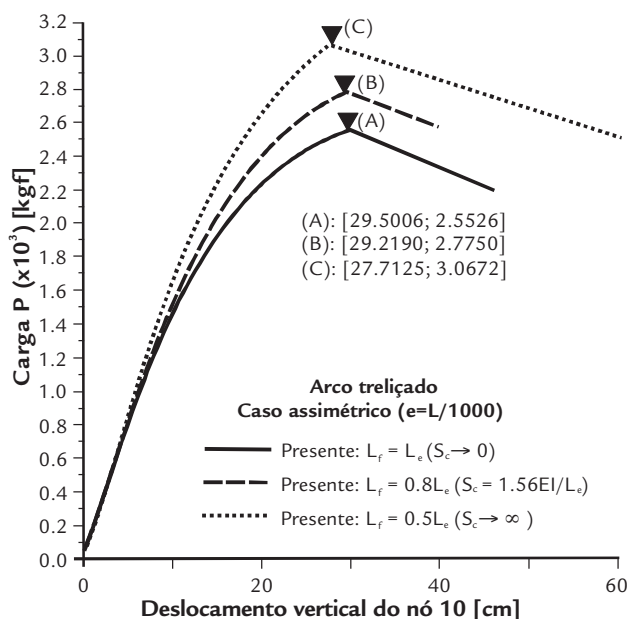


Figura 6  
Influência da rigidez da ligação  
na carga crítica do arco.

## Pórtico travado lateralmente

O estudo, agora, tem como finalidade avaliar a eficiência do elemento finito proposto na análise inelástica de estruturas de aço. Nesse trabalho, a plastificação da seção transversal é avaliada, usando-se o método da rótula plástica. Esse método - que supõe os efeitos da plasticidade concentrados - pode ser classificado em método da rótula elastoplástica e método da rótula plástica refinado. O primeiro deles considera, de forma simplificada, os efeitos da inelasticidade do material na análise. Supõe-se que a seção permanece em regime elástico até que a resistência plástica seja alcançada, formando-se uma rótula plástica. Os efeitos das tensões residuais não são considerados. No método da rótula plástica refinado, ao contrário, é possível acompanhar o processo de plastificação da seção, desde o início do escoamento até a sua plastificação completa. Também, nesse método, as tensões residuais podem ser consideradas. Admite-se, aqui, que as rótulas plásticas se formam apenas nas extremidades do elemento finito ilustrado na Figura 1.

A estrutura a ser analisada é mostrada na Figura 7. O estudo do comportamento desse pórtico foi feito também por Chen et al. (1990), usando-se o método da zona plástica, e por Machado (2005), através da abordagem por rótulas plásticas, e seus resultados serão usados para comparação. Cabe esclarecer que, no método da zona plástica, além da discretização dos membros estruturais em elementos finitos, a seção transversal de cada um desses elementos é dividida em fibras. Os efeitos de

segunda ordem e as tensões residuais podem ser incluídos diretamente na análise. Na análise feita por Chen et al. (1990), foi considerada a tensão residual máxima em todas as seções igual a 30% da tensão de escoamento. Nesse trabalho, seguindo as recomendações da ECCS (1983), as tensões residuais máximas, nas vigas e nas colunas, foram consideradas iguais a 30% e 50% da tensão de escoamento, respectivamente. O módulo de elasticidade usado na análise é de  $205 \text{ kN/mm}^2$  e a tensão de escoamento de  $235 \text{ N/mm}^2$ .

A viga é submetida a um carregamento uniformemente distribuído e uma restrição ao movimento lateral é imposta à estrutura, para se simular um contra-ventamento por um membro inclinado ou por um sistema rígido (uma parede de concreto, por exemplo). As colunas são consideradas como tendo uma imperfeição geométrica de forma senoidal e com valor máximo igual a  $L_c/1000$  no seu ponto nodal central. Quatro elementos finitos foram usados na modelagem desses membros para, além de aproximar a curvatura inicial, detectar a formação de possíveis rótulas plásticas entre as suas extremidades. A viga foi discretizada com oito elementos. No estudo, os resultados foram obtidos para um fator de carga  $\beta$ , indicado na Figura 7, igual a 0.34. Esse parâmetro define a razão entre a carga na viga e a carga total aplicada na estrutura.

Na formulação proposta aqui, a superfície de plastificação definindo o estado limite último de uma seção transversal é dependente das propriedades geométricas da seção e segue as prescrições

da norma BS5950 (1990). Vale ressaltar que a presença de força axial reduz a capacidade de momento da seção.

A interação entre as forças internas em três seções da estrutura, ocorrida durante a análise, é mostrada na Figura 7. As seções escolhidas foram a base e o topo da coluna à esquerda, posições A e B indicadas nessa figura, respectivamente, e o centro da viga, posição C. Apresenta-se, então, a modificação na intensidade e direção da força axial,  $P$ , e do momento-fletor,  $M$ , nessas seções transversais selecionadas, durante a aplicação do carregamento. Na figura,  $M_p$  refere-se ao momento de plastificação e  $P_y$ , a carga axial de escoamento. As superfícies de início de escoamento e de plastificação para as seções que compõem os membros estruturais, são também apresentadas. Como a força axial no topo das colunas aumenta, as forças internas que atuam, nessa seção, se movem em direção à superfície de resistência plástica da seção. Para um determinado nível de carga, através da interação entre a força axial e o momento fletor, essa superfície é atingida. Com a formação das rótulas plásticas, no topo das colunas, ocorre uma redistribuição de momentos-fletores na viga. Uma vez formada a rótula plástica, observa-se que as forças internas, nessa seção transversal, se movem mantendo-se sobre a superfície de resistência plástica da mesma. Quando o momento plástico, no centro da viga, é alcançado, ocorre o desenvolvimento de um mecanismo que causa o colapso dessa estrutura com a formação de três rótulas plásticas. Os

resultados obtidos, nesse trabalho, são comparados aos de Chen et al. (1990) e Machado (2005). Este último simulou o

escoamento gradual causado pelas tensões residuais, utilizando o conceito de módulo tangente, e adotou a superfície

de interação bilinear recomendada pelo AISC-LRFD (AISC, 2005) como critério de resistência da seção transversal.

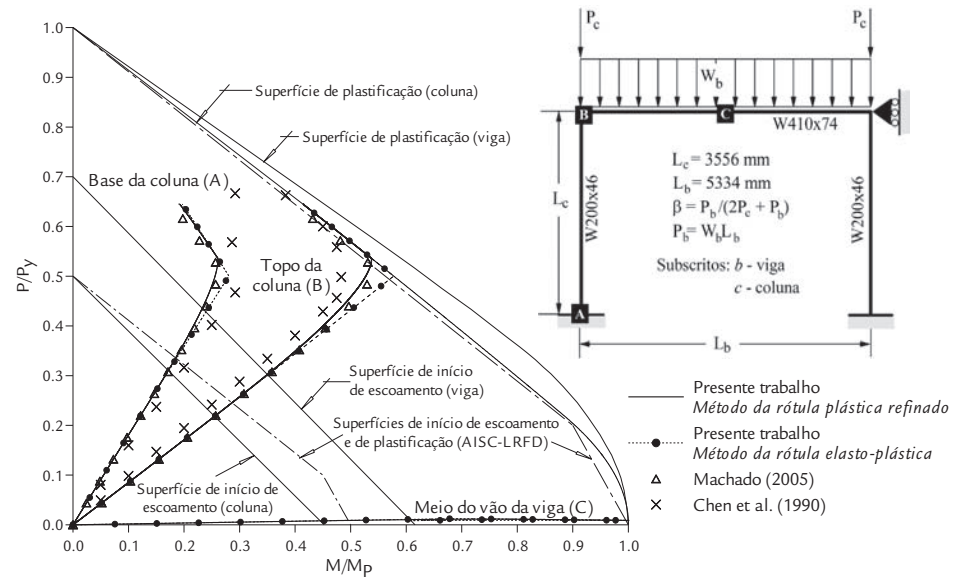


Figura 7  
Pórtico com bases engastadas: geometria e variação das forças internas em diferentes seções.

**Pórtico simples - todos os efeitos combinados**

O pórtico mostrado, na Figura 8, foi, inicialmente, analisado por Lui e Chen (1988), que, estabeleceram o valor de  $1.56EI/L^2$  para a carga de flambagem elástica do pórtico com ligação semirrígida (viga-coluna) considerando a rigidez  $S_c$  igual a  $10 EI/L$ .

Análises elásticas e inelásticas de segunda ordem foram realizadas aqui para dois tipos de ligações entre a viga e a coluna, a saber: rígida e semirrígida. Apenas o elemento híbrido foi usado na modelagem do pórtico, na qual uma malha com 3 elementos (1 por membro) foi adotada.

No caso da análise elástica, considerou-se o material com um valor bas-

tante elevado da tensão de escoamento  $\sigma_y$  ( $S_s \approx \infty$ ). Os resultados dessas análises são apresentados na Figura 8, na qual é possível perceber que as curvas se aproximam assintoticamente dos valores teóricos das cargas críticas fornecidas por Lui e Chen (1988), além de concordarem com as respostas de Pinheiro (2003) e Chan e Chui (2000). Os resultados das análises inelásticas (elastoplástica e plástica refinada) são mostrados nas Figuras 9 e 10. No caso do portal simples com ligação rígida entre a viga e as colunas (Figura 10), considerou-se a ligação perfeitamente rígida ( $S_c \approx \infty$ ) e os resultados encontrados se mostraram semelhantes aos encontrados por Machado (2005) e

Chan e Chui (2000).

Os resultados obtidos com a inclusão dos vários efeitos não lineares (segunda ordem, plastificação e flexibilidade da conexão) estão na Figura 10. Mais uma vez, observe a boa concordância com as trajetórias de equilíbrio e com os valores da carga crítica da literatura. Nota-se que a carga de colapso de um sistema estrutural pode ser, significativamente, alterada, quando se introduzem, na análise, vários efeitos não lineares. No problema em questão, a carga crítica variou de  $P_{cr} = 1.82 EI/L^2$  (análise elástica com ligação rígida) até o valor de  $P_{cr} = 1.28 EI/L^2$  (análise inelástica com ligação semirrígida).

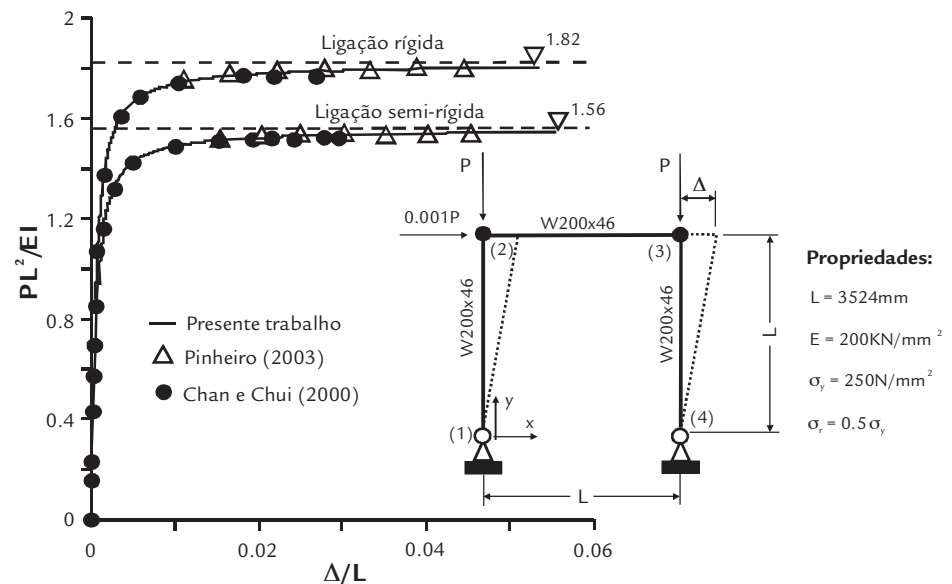


Figura 8  
Portal simples: geometria e trajetórias de equilíbrio (análise elástica de segunda ordem).

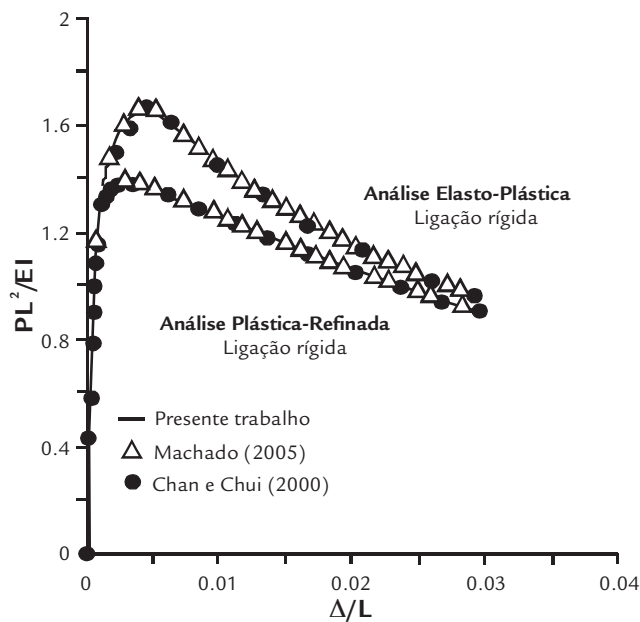


Figura 9  
Análises inelásticas de segunda ordem com ligação rígida viga-coluna ( $S_c \equiv \infty$ ).

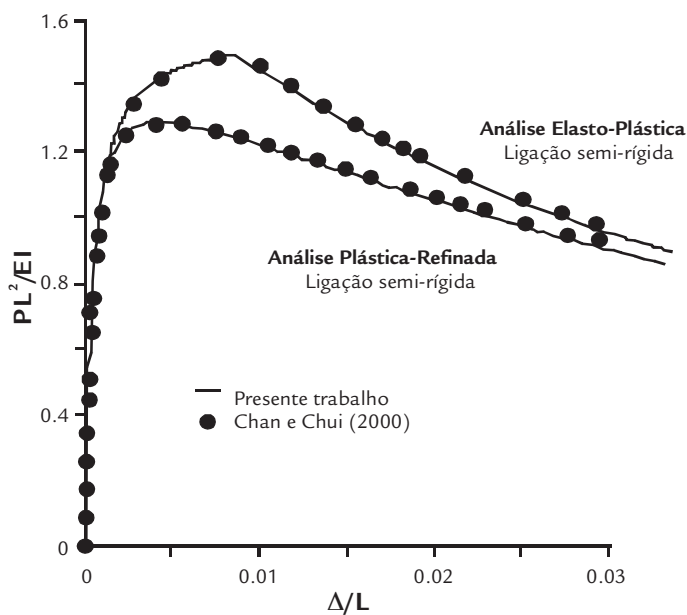


Figura 10  
Análises inelásticas de segunda ordem com ligação semirrígida viga-coluna ( $S_c = 10 EI/L$ ).

## 5. Considerações finais

Esse trabalho apresentou um elemento finito reticulado plano proposto para análise de estruturas de aço, na qual duas fontes de não linearidades são consideradas: a geométrica, que considera os efeitos da deslocabilidade da estrutura, e a física, causada pela inelasticidade do aço e pela semirrígidez das ligações entre os membros estruturais. Com esse elemento, foi possível a realização de uma análise mais completa e realística do comportamento da estrutura, estimando-se, precisamente, a carga e seu modo de colapso.

Através das análises numéricas efetuadas, pode-se verificar a boa concordância entre as respostas obtidas, nesse trabalho, e aquelas encontradas por outros pesquisadores. Isso permite afirmar

que a formulação e a metodologia de solução adotadas são eficientes e que podem ser usadas para avaliar o comportamento estático de estruturas reticuladas planas em aço.

Adicionalmente, alguns comentários, referentes ao emprego do elemento finito híbrido na modelagem computacional de sistemas reticulados em aço, podem ser feitos. Inicialmente, ficou evidente que, mesmo empregando-se uma teoria de segunda ordem simplificada em sua formulação, o referido elemento mostrou-se eficiente na simulação de estruturas esbeltas com comportamento fortemente não linear. Em algumas situações, entretanto, refinamentos na discretização da estrutura foram necessários. Cabe enfatizar que a consideração de valores in-

finitos, para os parâmetros de rigidez da ligação e da seção,  $S_c$  e  $S_s$ , simulando, respectivamente, uma ligação rígida e uma análise elástica, não desestabilizou, numericamente, a análise não linear. Para as estruturas com ligações semirrígidas, como esperado, o enrijecimento das ligações promoveu o aumento da capacidade de carga do sistema estrutural (no caso do arco treliçado). Posto isso, conclui-se que a escolha de modelos discretos incapazes de refletir, com boa precisão, o comportamento real das ligações pode conduzir a erros na avaliação da capacidade de carga da estrutura. Finalmente, as análises inelásticas evidenciaram a importância em se adotar uma abordagem plástica-refinada, capaz de acompanhar a redução gradativa da resistência da se-



ção transversal. Isso não é possível com o emprego da formulação elastoplástica. Assim, resultados mais realistas e, pos-

sivelmente, mais econômicos podem ser alcançados ao permitir que o parâmetro  $S_s$  seja atualizado ao longo da análise, de

forma a acompanhar a plastificação gradual da seção transversal.

## 6. Agradecimentos

Os autores desse trabalho agradecem à CAPES, ao CNPq, à FAPEMIG,

à V&M Tubes, à UFSJ/Campus Ouro Branco e ao IFMG/Campus Congonhas

pelo apoio recebido para realização dessa pesquisa.

## 7. Referências bibliográficas

- ALVARENGA, A. R. *Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Ouro Preto: Construção Metálica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2005. 303 p. (Dissertação de Mestrado).
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. *Steel construction manual*. (13. ed.). AISC, Chicago, IL, 2005. 518 p.
- ASSAID, L. M. B. *Método plástico aplicado às estruturas aperticadas de aço*. Rio de Janeiro: Estruturas Metálicas, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, 2001. 150 p. (Tese de Doutorado).
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 8800: Projeto e execução de estruturas em aço e estruturas mistas aço-concreto de edifícios*. Rio de Janeiro: ABNT, 2003. 289 p.
- BRITISH STANDARD INSTITUTE. *BS5950: Part 1 - Structural use of steelwork in building*. BSI, London, England, 1990. 222 p.
- CHAN, S. L., CHUI, P. P. T. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford: Elsevier, 2000. 350 p.
- CHAN, S. L., ZHOU, Z. H. I. Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. II: Three hinges along member. *Journal of Structural Engineering*, v. 130, n. 4, p. 545-553, 2004.
- CHEN, W. F., SOHAL, I. *Plastic design and second-order analysis of steel frames*. New York: Springer-Verlag, 1995. 509p.
- CHEN, W.F., DUAN, L., ZHOU, S.P. Second order inelastic analysis of braced portal frames – Evaluation of design formulae in LRFD and GBJ specification. *Journal of Singapore Structural Steel Society*, v. 1, n. 1, p. 5-15, 1990.
- EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK. *Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints*. ECCS, 1984. n. 33. 26p.
- GALVÃO, A. S. *Formulações não lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Ouro Preto: Construção Metálica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2000. 241 p. (Dissertação de Mestrado).
- GIZEJOWSKI, M. A., BARSZCZ, A. M., BRANICKI, C. J. E UZOEGBO, H. C. Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, p. 81-92, 2006.
- LANDESMANN, A. *Análise e implementação de modelo plástico para estruturas metálicas aperticadas*. Rio de Janeiro: Estruturas Metálicas, Programa de Engenharia Civil/COPPE/ UFRJ, 1999. 225 p. (Dissertação de Mestrado).
- LUI, E. M., CHEN, W. F. Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames. *Int. J. Solids Structures*, v. 24, n. 9, p. 893-913, 1988.
- MACHADO, F. C. S. *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Ouro Preto: Construção Metálica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2005. 163 p. (Dissertação de Mestrado).
- PINHEIRO, L. *Análises não lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semirígidos*. Ouro Preto: Construção Metálica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2003. 245 p. (Dissertação de Mestrado).
- ROCHA, P. A. S. *Análise inelástica de segunda ordem de estruturas metálicas com ligações semi-rígidas*. Ouro Preto: Construção Metálica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2006. 112 p. (Dissertação de Mestrado).

- SANTOS, M. N. *Emprego de elemento finito híbrido na análise não-linear de estruturas metálicas*. Ouro Preto: Construção Metálica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2007. 144 p. (Dissertação de Mestrado).
- SEKULOVIC, M., NEFOVSKA-DANILOVIC, M. Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections. *Theoret. Appl. Mech.* v. 31, n. 2, p. 101-134, 2004.
- STANDARDS AUSTRALIA. *AS4100: Steel structures*. AS, Sydney, Austrália, 1990. 250 p.

---

Artigo recebido em 09 de abril de 2009. Aprovado em 06 de dezembro de 2011.