



Estimativa da difusividade térmica de grãos de soja pelo método da compactação

Pedro A. P. Borges¹, Caroline Fengler¹ & Angéli Cervi¹

RESUMO

A medição da difusividade térmica de grãos, como trigo, arroz e cevada torna-se impraticável com métodos que dependam da introdução de sensores no interior do grão. Propôs-se, neste trabalho, um método para a determinação da difusividade do grão com base nas variações da difusividade da massa de grãos submetida a diferentes níveis de compactação e em curvas de temperatura por tempo, medidas em pontos internos e na fronteira de cilindros da massa de grãos. O problema de transferência de calor (problema direto) foi resolvido numericamente pelo método das diferenças finitas. A difusividade da massa de grãos foi estimada resolvendo o problema inverso. Com os valores da difusividade se sugeriu uma função de ajuste relacionando-se a difusividade e a densidade da massa de grãos. Esta função foi usada para projetar o valor da difusividade do grão com base na medida da sua densidade, cujo resultado obtido é compatível com os dados da literatura. A precisão do método depende bastante da qualidade dos dados experimentais e da posição da densidade do grão, no intervalo de dados pesquisados da densidade da massa de grãos.

Palavras-chave: problema inverso, secagem de grãos, *Glycine Max* (L.)

Thermal diffusivity of soy bean grains by the compacting method

ABSTRACT

The measurement of thermal diffusivity of grains such as wheat, rice and barley becomes impracticable with methods that depend on the introduction of sensors inside the grain. In this study a method was proposed to determine the thermal diffusivity of grain considering the variations of the mass diffusivity of grains submitted to different compacting levels. Temperature was measured in internal points and in the border of cylinders of grain mass, for three compacting levels. The thermal diffusivity of grain mass was estimated solving the inverse problem. The heat transfer problem (direct problem) was solved numerically by the finite differences method. With the values of the thermal diffusivity for the three compacting levels, a function was fitted relating the grain mass diffusivity and density. This function was used to project the value of grain diffusivity as a function of measured grain density. The result obtained for soy bean is compatible with the existing data found in the literature. The precision of the method depends strongly on the experimental data quality and grain position density in the researched data interval of the grain mass density.

Key words: inverse problems, grain drying, *Glycine Max* (L.)

¹ DeFEM/UNIJUI. Rua São Francisco, 501, CP 560, CEP 98700-000, Ijuí, RS. Fone: (55) 3332-0200. E-mail: pborges@unijui.edu.br; carolfengler@yahoo.com.br; agcervi@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

A secagem de grãos é uma medida preventiva que, juntamente com a aeração, viabiliza o acondicionamento das safras por períodos até maiores do que um ano. A modelagem matemática de secadores é uma das formas de otimizar a secagem, aperfeiçoando equipamentos e processos com o objetivo de reduzir custos, tempo e manter a qualidade dos grãos. Os modelos matemáticos para a simulação e monitoramento do funcionamento de secadores precisam de informações técnicas sobre o comportamento térmico dos grãos. Essas informações são produzidas na forma de coeficientes e/ou funções de troca de calor e massa. A difusividade térmica da massa de grãos e do grão, o coeficiente de transferência de calor por convecção e o fluxo de massa na superfície do grão, são alguns desses coeficientes.

Os coeficientes de transferência de calor são determinados experimentalmente e expressos por equações empíricas, em função de números adimensionais (Incropera & Witt, 1992) ou são considerados constantes, como em Oliveira & Haghighi (1998) e Brooker et al. (1982) que utilizam a difusividade térmica calculada por Kreith & Bohn (1986) para resolver o problema de secagem de grãos. Os coeficientes também podem ser expressos diretamente em função das variáveis intervenientes em algum problema específico, como ocorre nos trabalhos de Courtois et al. (1991) que usam uma equação empírica para o fluxo de calor, em função da temperatura do grão e do teor de umidade do ar.

Borges et al. (2004) desenvolveram um método para estimar a difusividade térmica e o coeficiente de transferência de calor por convecção, através da resolução do problema inverso em duas etapas: na primeira, estimaram a difusividade térmica e, na segunda, o coeficiente de transferência de calor por convecção, para um intervalo de temperatura de secagem entre 353 e 403 K; observaram que a difusividade térmica aumenta com o aumento da temperatura de secagem. Borges et al. (2005) mostraram experimentalmente, que quanto maior o teor de umidade do grão menor é a difusividade térmica; propuseram, então, uma função linear para relacionar essas variáveis e notaram que a difusividade varia em torno de 25% no intervalo de teor de umidade entre 0,1 a 0,27 b.u. (base úmida). Nessas pesquisas se utilizou um método para medir a difusividade térmica chamado, neste trabalho, método direto, o qual consiste em se coletar dados de temperatura interna (centro) e externa (superfície) de um grão usando-se pequenos termopares, quando o grão é submetido a um processo de aquecimento e calcular a difusividade térmica, resolvendo o problema inverso de transferência de calor; existem pelo menos duas dificuldades experimentais neste método: a primeira é que a grandeza investigada depende da existência de quantidade significativa de massa do produto entre o termopar e a superfície. Um grão de soja tem o diâmetro maior variando entre 6 e 9 mm, para o teor de umidade entre 0,12 a 0,18 b.u. e um termopar tem um bulbo com diâmetro de 1 mm. Com essas medidas, a maior distância entre o termopar e a superfície é de 4 mm, a segunda dificuldade é a instalação do termopar exatamente no centro do grão; mesmo assim, o método apresenta re-

sultados da mesma ordem de grandeza dos dados encontrados na literatura.

O método direto só é aplicável com sucesso quando o diâmetro do grão é suficientemente maior que o diâmetro do termopar; mesmo para um grão de soja, a relação entre os diâmetros já é questionável, haja vista que a introdução do termopar pode interferir na precisão dos parâmetros que se deseja medir. Para grãos menores que o de soja ou aquele em que a introdução do termopar seja inviável pela dureza, por exemplo, a utilização deste método se torna impraticável. Considerando-se as dificuldades do método direto, o problema proposto neste trabalho é o desenvolvimento de um método alternativo (método da compactação) para estimativa da difusividade térmica do grão, relacionando a variação da difusividade da massa de grãos com a difusividade do grão, quando a massa é submetida a diferentes níveis de compactação.

MATERIAL E MÉTODOS

Os experimentos foram realizados no Laboratório de Medidas Físicas para Modelagem Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do RS (UNIJUI). Os grãos de soja utilizados nos experimentos foram do tipo industrial, colhidos no município de Ijuí, RS, com teor de umidade 0,12 b.u. As medidas de massa foram tomadas através de uma balança de precisão 10^{-3} g modelo KN WAAGEN e os cilindros foram aquecidos em uma estufa modelo NBR 11378.

Obtiveram-se as medidas de temperatura por meio de um sistema de aquisição eletrônica de dados, composto de: termopares modelo MTK – Tipo K-Universal, com sensores de diâmetro de ± 1 mm; placa de aquisição de dados analógico/digital (placa A/D) do tipo LR 7018, 16 bits, 8 pontos com conversor 485 para 232 e outra placa tipo LR 7520, 8 canais de leitura de dados (10 leituras por segundo); um computador pessoal com processador PENTIUM 266, 32 MB de memória RAM. Para a calibração dos termopares se utilizou um termômetro calibrado. Um cilindro de aço foi construído (torneado) de forma a suportar as pressões decorrentes da forte compactação.

O método da compactação foi aplicado sobre grãos de soja para compará-lo com o valor da difusividade térmica encontrado usando-se o método direto. O método tem duas hipóteses básicas: 1) a difusividade térmica da massa de grãos tende para a difusividade térmica do grão, na medida em que a densidade da massa de grãos tende para a densidade do grão. 2) a massa de grãos e a massa de um grão são consideradas meios isotrópicos e homogêneos. Essas hipóteses são assumidas como aproximações, visto que o grão é composto de diferentes tecidos (massa, casca e celulose, dentre outras) e não há uma equivalência perfeita entre as propriedades físicas da massa de grãos e do grão, mesmo quando suas densidades têm valores próximos.

O método da compactação tem a seguinte seqüência de procedimentos experimentais e numéricos:

1. Seleção do material utilizado para a realização dos experimentos

2. Avaliação da incerteza das medidas de massa, volume e temperatura
3. Compactação da massa de grãos
4. Aquisição dos dados da temperatura em função do tempo para diferentes densidades
5. Solução do problema de transferência de calor para o cilindro da massa de grãos (Problema Direto)
6. Determinação da difusividade térmica para as massas de grãos com diferentes densidades (Problema Inverso)
7. Ajuste dos parâmetros da função que relaciona a difusividade térmica com densidade da massa de grãos
8. Cálculo da difusividade térmica para a densidade do grão

A Figura 1 apresenta o esquema geral do experimento de aquecimento da massa de grãos. A massa de grãos foi acondicionada em um cilindro de metal com fundo e comprimida com auxílio de um torno de mesa, movimentando-se o êmbolo na superfície, de cima para baixo. A cada variação da posição do êmbolo (aumento da pressão), media-se o volume (para calcular a densidade da massa de soja) e a temperatura em função do tempo (para calcular a difusividade térmica). Considerou-se, após medição de temperatura em diferentes ângulos para o mesmo raio (Fengler, 2006), que o problema apresenta simetria em relação ao eixo central. Instalaram-se 6 termopares para monitorar as temperaturas internas (termopares T4, T5 e T6) e de fronteira (termopares T1, T2 e T3). As alturas dos termopares T2 a T6 são variáveis, definidas em função da altura da massa de grãos para cada nível de compactação.

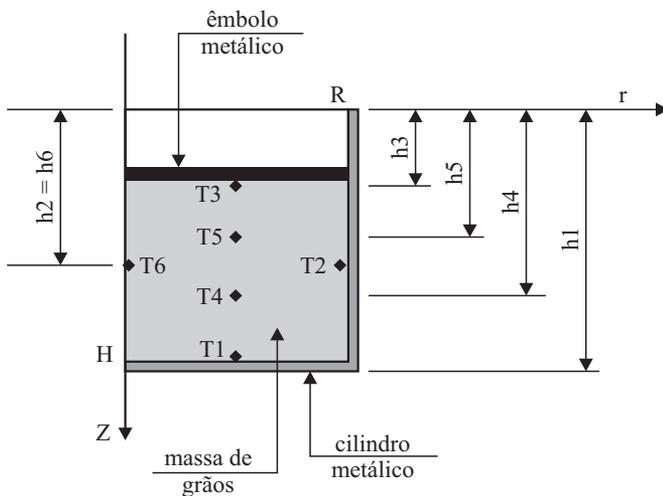


Figura 1. Esquema geral do experimento de aquecimento da massa de grãos e distribuição dos termopares

Análise de incerteza das medidas de massa e temperatura

Fez-se a determinação da incerteza nas medições de massa e temperatura considerando-se os erros sistemáticos e erros randômicos, de acordo com a Eq. 1:

$$U_x = \sqrt{B_x^2 + P_x^2} \quad (1)$$

em que U_x é a incerteza de medida da grandeza x , B_x são os erros sistemáticos e P_x são os erros randômicos.

O erro sistemático na medida da massa (B_m) depende da exatidão do aparelho utilizado (balança analítica) que, neste caso, é de 10^{-3} g de acordo com a informação fornecida pelo fabricante. O erro randômico na medida de massa (P_m) foi considerado o desvio padrão de uma série de repetições de medidas de massa (Fengler, 2006), obtendo-se o valor de 0,011467 g. Substituindo-se os valores encontrados de P_m e B_m na Eq. 1, a incerteza na medida de massa foi de $U_m = 0,011511$ g.

O erro sistemático de temperatura (B_T) depende da exatidão do aparelho que, neste caso, significa a diferença em relação à medida padrão de temperatura (termômetro padrão) e o erro de leitura do sistema termopares-placas. Para avaliar este erro realizaram-se medidas de temperatura em copos com água, no intervalo de 0 e 80 °C, com os termopares e o termômetro padrão; desenvolveu-se uma equação de calibração para cada termopar, que leva em conta as diferenças em relação ao termômetro padrão e a influência da temperatura ambiente. O maior desvio padrão (entre todos os termopares utilizados) das medidas de temperatura em relação à curva de calibração, foi de $s_T = 1,6848$ °C. O erro máximo de escala do equipamento, conforme informação do fabricante, foi de 0,75% da medida lida. Considerando-se como temperatura máxima trabalhada de 100 °C, o erro de escala é de 0,75 °C; somando-se esses erros, obtém-se a incerteza referente aos erros sistemáticos de temperatura: $B_T = \pm 2,4348$ °C; o erro randômico na medida de temperatura (P_T) foi obtido através do cálculo do desvio padrão máximo da temperatura da água em experimentos repetidos, cujo valor encontrado foi de 1,00732 °C; substituindo-se as incertezas P_T e B_T na Eq. 1, obtém-se a incerteza total das medidas de temperatura, de $U_T = \pm 2,6350$ °C. Os valores de U_m e U_T serão usados para analisar a incerteza do método da compactação.

Problema de transferência de calor na massa de grãos

Para estimar a difusividade térmica (α) é necessário resolver, antes, o problema de transferência de calor na massa de grãos (Problema Direto) com a geometria descrita na Figura 1; para isto, empregou-se a equação do calor, cuja dedução é encontrada em Özisik (1993), em coordenadas cilíndricas, de eixo simétrico, propriedades térmicas constantes e sem fonte de calor, dada pela Eq. 2.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{para } 0 < r < R, 0 < z < H, t > 0 \quad (2)$$

em que T é a temperatura da massa de grãos (°C), z e r são as variáveis espaciais (m), t é o tempo (s), α é a difusividade térmica da massa de grãos ($m^2 s^{-1}$), R e H são o raio e a altura da massa de grãos, respectivamente (m).

As condições de fronteira (Eqs. 3 a 6) são de primeira espécie, variáveis em função do tempo e determinadas experimentalmente.

$$T(r,0,t) = T_3(t), \quad t > 0 \text{ e } 0 < r < R \quad (3)$$

$$T(R,z,t) = T_2(t), \quad t > 0 \text{ e } 0 < z < H \quad (4)$$

$$T(r,H,t) = T_1(t), \quad t > 0 \text{ e } 0 < r < R \quad (5)$$

$$T(r,z,0) = T_i(t), \quad 0 < r < R \text{ e } 0 < z < H \quad (6)$$

em que T_1 , T_2 e T_3 são as temperaturas das fronteiras ($^{\circ}\text{C}$) e T_i é a temperatura inicial ($^{\circ}\text{C}$).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A solução do problema direto foi implementada numericamente em Diferenças Finitas Centrais, com o esquema explícito (Smith, 1985). Como esta solução visa à aplicação em um algoritmo de problema inverso, pesquisou-se um tamanho de malha que produzisse resultados suficientemente precisos no menor tempo possível. A precisão foi determinada com o cálculo da temperatura em uma linha com $0 < r < R$ e $z = H/2$ para malhas com diferentes números de células (n) nas direções r e z ; esta análise mostrou que para malhas com $n \geq 12$ e se mantendo o mesmo $\Delta t = 1$ s, as diferenças entre as curvas serão mínimas. O tempo de execução do programa do Problema Direto com $n = 12$ foi menor que 1 s, executado em um Pentium 4, evidenciando que o programa pode ser usado com eficiência na solução do problema inverso. Este método de verificação da precisão dispensa a comparação com uma solução analítica, visto que as soluções para malhas com $n = 4, 6, 8$, e 12 são convergentes, como mostra a Figura 2.

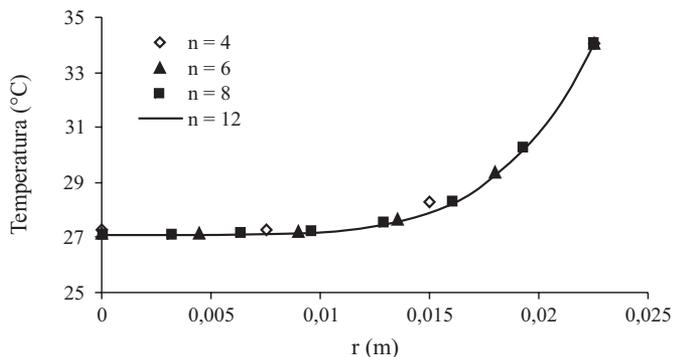


Figura 2. Análise de convergência dos valores de temperaturas para malhas com 4,6,8,10 e 12 células

Cálculo da difusividade térmica (problema inverso)

O problema inverso consiste em um algoritmo de procura do valor da difusividade térmica que minimiza a soma do quadrado das diferenças (Eq. 7) entre as temperaturas calculadas pelo problema direto e as temperaturas obtidas experimentalmente nos pontos T4, T5 e T6, indicados na Figura 1.

$$\varepsilon = \sum_{j=4}^6 \sum_{i=1}^n (T_{c_j}^i - T_{c_j}^i)^2 \quad (7)$$

onde ε é a soma do quadrado das diferenças entre os dados calculados e os experimentais, para os três termopares, $T_{c_j}^i$ é a temperatura medida no i -ésimo instante de tempo, pelo termopar j , $T_{c_j}^i$ é a temperatura calculada no i -ésimo instante de tempo, pelo termopar j e n é número de dados experimentais em função do tempo.

Elaborou-se um programa computacional formado de cinco blocos, para calcular a difusividade térmica: Bloco 1: Entrada de dados experimentais; Bloco 2: Ajuste não linear de curvas dos dados experimentais; Bloco 3: Definição das malhas temporal e espacial; Bloco 4: Resolução dos problemas direto e inverso; Bloco 5: Saída de dados. O algoritmo de procura do valor ótimo da difusividade (Bloco 4) é chamado, em Silva Neto & Moura Neto (2005) método de procura em rede. Os resultados do cálculo da difusividade para os três níveis de compactação estão apresentados na Figura 3.

Difusividade térmica em função da densidade do grão

Para estimar a difusividade térmica do grão de soja com base na variação da difusividade da massa de grãos, de acordo com a 1ª hipótese do método da compactação já descrita anteriormente neste trabalho, foi necessário calcular a densidade de vários grãos individualmente; mediram-se a massa e os diâmetros médios de 20 grãos, sendo que o volume foi calculado considerando-se o grão como um elipsóide; a densidade média calculada foi de $\rho_g = 1333 \text{ kg m}^{-3}$ que é maior que a maior densidade da massa de grãos compactada (Figura 3). Este resultado era previsto uma vez que ao se reduzir os espaços entre os grãos, pode ocorrer perda de massa na forma de óleo. Devido à impossibilidade de se obter dados experimentais próximos da densidade do grão, foi preciso extrapolar os dados de difusividade para as densidades obtidas por compactação, através de uma função hiperbólica (Eq. 8).

$$\alpha(\rho) = \frac{q}{\rho} \quad (8)$$

em que α é a difusividade ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), ρ é a densidade da massa de grãos (kg m^{-3}) e q é um parâmetro de ajuste (adimensional). O ajuste apresentou coeficiente de correlação de $R^2 = 0,993$, para $q = 1,6327 \times 10^{-4}$ (adimensional) e difusividade projetada para $\rho_g = 1333 \text{ kg m}^{-3}$, de $1,2249 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$. A difusividade térmica do grão, medida pelo método direto, foi de $1,023 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$.

Os valores de difusividade térmica do grão de soja diferem na literatura. Em Oliveira & Haghghi (1998) encontra-se referência aos dados experimentais de Kreith & Bohn (1986) que apresentam difusividade de $1,165 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ (provavelmente referente à massa de grãos sem compactação) enquanto Andrade et al. (2001) utilizam dados de Mohsenin (1980) cuja difusividade é $1,345 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$. O método direto usado em Borges et al. (2004, 2005) apresenta valores entre 10^{-7} e $10^{-8} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$; esta variação se deve à influência da temperatura. Com essas considerações, conclui-se que o valor obtido pelo método da compactação está na mesma ordem de grandeza dos dados da literatura (entre 10^{-7} e $10^{-8} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$) e também está muito próximo do valor encontrado pelo método direto.

A Figura 3 mostra os resultados obtidos pelos métodos direto e de compactação. A precisão do cálculo da difusividade pelo método de compactação depende de três tipos de incertezas e suas inter-relações: incerteza das medidas de temperatura, massa e volume; incerteza da estimativa da difusividade térmica e incerteza da projeção da difusividade da massa de grãos para a difusividade do grão.

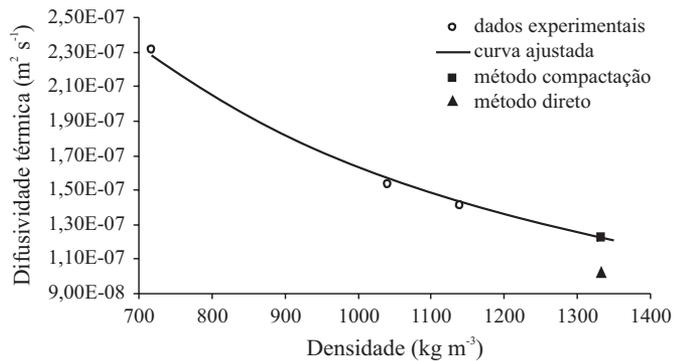


Figura 3. Difusividade em função da densidade. (o) difusividade obtida a partir dos dados experimentais de temperatura da massa de grãos; (—) função $\alpha(\rho)$ com os parâmetros ajustados; (■) difusividade calculada pelo método da compactação e (▲) difusividade calculada pelo método direto

O reflexo das incertezas das medidas de temperatura e massa na estimativa da difusividade térmica foi obtido acrescentando-se e subtraindo-se essas incertezas nos dados utilizados na resolução do problema inverso e na medida da densidade do grão; obteve-se, assim, uma diferença máxima nos valores de difusividade, na ordem de $\pm 2\%$.

A incerteza de projeção da difusividade da massa de grãos para a difusividade do grão depende da escolha do tipo de função usada para o ajuste de $\alpha(\rho)$ e da diferença entre a densidade do grão (ρ_g) e a densidade do último nível de compactação. Tal incerteza pode ser bem maior que as incertezas de medida (U_m e U_T), para a estimativa da difusividade, mesmo que o coeficiente de correlação seja próximo de 1. Os erros de projeção podem, eventualmente, ser minimizados, aumentando o número de dados e, se possível, produzindo dados da densidade da massa bem próximos da densidade do grão; enquanto os erros de medida são claramente determinados, os erros de projeção não têm esta propriedade visto que a única referência da projeção é a densidade do grão que, sem a correspondente difusividade, não pode ser considerada no ajuste de $\alpha(\rho)$.

A incerteza da medida da difusividade pelo método da compactação não pode ser calculada a partir do tipo de ajuste, pelos motivos descritos acima nem, tampouco, se pode afirmar que o método direto apresenta o valor correto pois existem a incerteza das medidas e as dificuldades experimentais descritas na revisão bibliográfica deste trabalho. Observando-se os valores da difusividade obtidos pelos métodos direto e de compactação, constata-se que são bem próximos e, por isso, os dois são aceitáveis como valores estimados. Adotando-se como incerteza apenas as incertezas de medidas, a difusividade térmica do grão de soja, de acordo com os dados produzidos neste trabalho e com a aplicação do método da compactação, é de $1,22 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \pm 2\%$ ou $1,22 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \pm 2,44 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

CONCLUSÕES

1. Os valores obtidos por este método estão na mesma ordem de grandeza (entre 10^{-7} e $10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) dos dados de

difusividade do grão de soja encontrados na literatura.

2. A precisão do método da compactação depende das incertezas das medidas de temperatura e massa, além da incerteza de projeção da difusividade da massa de grãos para a difusividade do grão.

3. Adotando-se o modelo hiperbólico e se assumindo que a incerteza do método passa a ser a incerteza das medidas (2% sobre o valor da difusividade térmica estimada) a difusividade térmica do grão de soja, de acordo com os dados produzidos neste trabalho e com a aplicação do método da compactação, é de $1,22 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \pm 2\%$ ou $1,22 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \pm 2,44 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

LITERATURA CITADA

- Andrade, E. T.; Molin, L.; Couto, S. M. Distribuição de temperatura em grãos armazenados em silos: Modelagem por elementos finitos. *Revista Brasileira de Armazenamento*, v.26. p.28-35. 2001.
- Borges, P. A. P.; Cervi, A.; Silva, G. L. Estimation of the thermal diffusivity in soy grains in function of grains moisture content. In: *International Congress of Mechanical Engineerin*, 18, 2005, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto: ABMEC. CD Rom
- Borges, P. A. P.; Oliveira, J. F. S.; Klamt, V. Estimación do coeficiente de transferência de calor por convecção de grãos de soja. In: *Iberian Latin American Congress in Computational Methods in Engineering*, 25, 2004, Recife. Anais... Recife: UFPE, 2004. CD Rom
- Brooker, D. B.; Bakker-Arkema, F. W.; Hall, C. W. *Drying cereal grains*. Westport: The Avi Publishing Company, 1982, 264p.
- Courtois, F.; Lebert, A.; Duquenoy, A.; Lasseran, J. C.; Bimbenet, J. J. Modelling of drying in order to improve precessing quality of maize. *Drying Technology*, v.9, n. 4, p.927-945, 1991.
- Fengler, C. Estimación da difusividade térmica de grãos de soja. Ijuí: UNIJUI, 2006, 84p. Dissertação Mestrado
- Incropera, F. P.; Witt, D. P de. *Fundamentos de transferência de calor e massa*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992. 455p.
- Kreith, F.; Bohn, M. S. *Principles of heat transfer*, 4.ed. New York: Harper & Row, 1986. 560p.
- Mohsenin, N. N. *Thermal properties of foods and agricultural materials*. New York: Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1980. 407p.
- Oliveira, L. S.; Haghghi, K. Conjugate heat and mass transfer in convective drying of multiparticle systems: Part I: Theoretical considerations. *Drying Technology*, v.16, n.3/5, p.433-461, 1998.
- Özisik, M. N. *Heat conduction*. New York: Taylor & Francis, 1993, 691p.
- Silva Neto, A. J.; Moura Neto, F. D. *Problemas inversos: Conceitos fundamentais e aplicações*. Rio de Janeiro: UERJ, 2005. 172p.
- Smith, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods*. 3.ed. New York: Clarendon Press Oxford, 1985. 338p.