O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO NA HISTÓRIA E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

The false position method in History and in Mathematics Education

Cleide Farias de Medeiros[1]
Alexandre Medeiros[2]

Resumo: Este texto coloca em uma perspectiva histórica o tratamento algébrico precoce que, costumeiramente, é dedicado ao ensino elementar da Aritmética. Defendendo que um tal tratamento algébrico precoce carrega vários pontos negativos para a formação do educando, o texto discute o "método da falsa posição" como uma alternativa viável para um tal ensino introdutório. Apontando as raízes históricas de tal método, o texto procura evidenciar as origens, aplicações e várias formas de visualizar este procedimento iterativo, desde a manipulação de materiais concretos, passando por aplicações geométricas, até atingir o Cálculo Numérico, como um dos procedimentos iterativos na resolução de equações lineares. Uma das conclusões é que, embora não seja o referido método, em sua forma mais simples, nenhum substitutivo para a resolução algébrica simbólica e moderna de equações e de sistemas de equações, ele se constitui certamente em um precioso trampolim para iniciarmos o salto em direção a um estudo mais formalizado. Particularmente, o método da falsa posição revela-se uma utilíssima ferramenta pedagógica na Educação Matemática, principalmente quando vinculado às suas origens históricas, suas abordagens concretas iniciais e suas associações com a Geometria e a Geometria Analítica.

Unitermos: História e Educação Matemática, Aritmética, Método da Falsa Posição, Processos Iterativos Elementares.

Abstract: *This text is a historical perspective on the early algebraic approach that is usually applied to the elementary teaching of Arithmetic. By arguing that such an initial algebraic treatment contains several drawbacks for elementary education, the 'false position method' is discussed and is presented as a viable alternative for such introductory teaching. By pointing out the historical roots of the method, the text tries to make clear several ways of visualising this iterative procedure. This is done by incorporating the use of manipulatives and geometrical applications as well as the use of numerical calculus as an iterative procedure for solving linear equations. Although one conclusion is that in its simpler form this method does not constitute any substitute for the modern symbolic algebraic resolution of equations and linear systems, it certainly represents a valuable springboard to reach a more formalised study. Particularly, the false position method is a very useful pedagogical tool in mathematics education, mainly when it is interwoven with its initial concrete approaches and its associations with geometry and analytical geometry.*

Keywords: *History and Mathematics Education, Arithmetic, Method of False Position, Elementary Iterative Processes.*

Introdução

O método da falsa posição, da falsa suposição ou, ainda, do falso pressuposto, é uma forma muito antiga de resolver problemas que atualmente podemos interpretar como relacionados a equações e sistemas de equações lineares. O ensino elementar da Aritmética tem sido substituído nos últimos anos pelo ensino de uma Álgebra disfarçada. Isso é particularmente observado na resolução de problemas que podem ser modelados por equações lineares. Tais

[1] *PhD (Centre for Studies in Science and Mathematics Education – University of Leeds). Mestre em Psicologia da Educação (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco*
[2] *PhD (Centre for Studies in Science and Mathematics Education – University of Leeds). MSc (Feusp). Consultor científico da Scienco. Instituto Scienco de Pesquisas Educacionais*

problemas são costumeiramente resolvidos de uma forma exclusivamente simbólica, quer com a adoção imediata de letras na representação das quantidades desconhecidas, quer com uma Álgebra disfarçada na utilização de quadradinhos ou outras figurinhas que tomam o lugar da incógnita e são operadas seguindo as regras da Álgebra. Esta simbolização precoce traz sérios danos para a formação do pensamento especulativo, da exploração das relações numéricas porventura existentes na situação em causa e da própria intuição matemática a ser necessariamente desenvolvida. Por outro lado, investigando a história do ensino da Matemática, podemos encontrar que em um passado ainda recente, métodos mais intuitivos e exercitadores do raciocínio (e não apenas de procedimentos mecânicos) eram utilizados na escola. Dentre tais abordagens aritméticas destaca-se o antigo "método da falsa posição". Em sua gênese histórica, o método da falsa posição é um procedimento iterativo de resolução de problemas lineares já bastante antigo. Suas origens remontam ao antigo Egito e aos primórdios da civilização chinesa, tendo sido largamente utilizado, desde então, por matemáticos de várias civilizações. Em sua essência, o método da falsa posição consiste em um procedimento de tentativas e erros. Entretanto, como veremos, há algo mais consistente por trás dessa postura aparentemente tão simples. Suas origens perdem-se no tempo, tendo surgido independentemente em vários locais e em várias civilizações da Antiguidade, como uma tentativa de resolver problemas práticos ligados ao comércio, à cobrança de impostos, ao armazenamento de animais e à agrimensura (LUMPKIN, 1992). Esta multiplicidade de formas e locais independentes de surgimento fortalece a convicção de ser tal método uma abordagem naturalmente convidativa ao pensamento, ou intuitiva. Observe que seus usos iniciais eram, além disso, desprovidos de qualquer justificativa e, portanto, dotados de uma característica realmente intuitiva, parecendo sensato afirmar que esta seria uma forma natural que leigos tenderiam espontaneamente a usar (EVES, 1958). Crianças que não foram ainda introduzidas nos meandros da Álgebra simbólica, quando confrontadas com problemas relacionados com equações e sistemas de equações lineares nem sempre conseguem resolvê-los. Entretanto, quando o fazem de forma bem sucedida, agem, quase sempre, por tentativas e erros, seguidos de correções apropriadas e, portanto, de um modo semelhante ao método da falsa posição.

Embora o método da falsa posição seja um assunto muito antigo, algumas variações do mesmo têm aplicações bem mais recentes. A idéia, por exemplo, de proceder-se, no Cálculo Numérico, por tentativas e erros, seguidos de repetidas correções na solução de equações não-lineares é inspirada no antigo método da falsa posição, recebendo, assim, a mesma denominação e sendo conteúdo usual em cursos de fundamentos da computação.

Alguns Exemplos de Aplicação do Método da Falsa Posição

A História da Matemática no antigo Egito pode ser investigada através dos registros deixados por escribas em alguns documentos preciosos como os papiros Rhind, de Berlim e de Moscou. O papiro Rhind, compilado por Ahmes, por volta de 1650 a.C., traz 85 problemas. Os problemas de 24 a 27 do papiro Rhind tratam de situações que interpretaríamos, atualmente, como típicas de serem modeladas por equações lineares (COLLETE, 1986). O problema de número 26, por exemplo (JOSEPH, 1991), diz o seguinte:

Uma quantidade e o seu quarto adicionado torna-se 15. Qual é esta quantidade?

A solução deste problema em termos algébricos modernos e, portanto simbólicos, pode parecer-nos simples e direta. Com efeito, simbolizando por x a quantidade desconhecida, podemos encontrar a solução resolvendo a equação:

$$x + \frac{x}{4} = 15 \therefore 4x + x = 60 \therefore 5x = 60 \therefore x = \frac{60}{5} \therefore x = 60$$

Notemos, entretanto, que, embora tal solução pareça, efetivamente, muito simples, ela já requer que o estudante compreenda que os símbolos podem ser operados semelhantemente aos números. A inocente soma dos monômios $4x + x$ para dar $5x$ só faz sentido dentro de um contexto algébrico já desenvolvido. De modo análogo, a passagem, aparentemente trivial, de fazermos $5x = 60$ resultar em $x = 12$, só pode ser compreendida baseando-se na aceitação prévia de que a divisão de ambos os membros de uma equação algébrica por uma quantidade diferente de zero não altera a igualdade. Operar diretamente com números, como no caso aritmético, não é nem cognitivamente nem matematicamente a mesma coisa que operar diretamente com símbolos. A simples transferência das propriedades operatórias dos números para os símbolos corresponde a um enorme salto conceitual que deu origem à Álgebra e não deve jamais ter sua complexidade trivializada, sob pena de introduzirmos as crianças em um jogo sem sentido. Também pouco adianta o subterfúgio de utilizarmos outros símbolos em lugar de letras. Assim, fazemos como é comum:

$$\square + \frac{\square}{4} = 15 \therefore 4\square + \square = 60 \therefore 5\square = 60 \therefore \square = \frac{60}{5} \therefore \square = 12$$

equivale a não entendermos a complexidade da verdadeira natureza da dimensão simbólica. A questão da dificuldade matemática e cognitiva não está no simples uso de uma letra para simbolizarmos uma quantidade desconhecida, mas sim no fato de operarmos um tal símbolo como operamos um número, seja esse símbolo um quadradinho, um triângulo ou uma outra coisa qualquer, inclusive uma simples palavra. Eis porque uma Álgebra, ainda que totalmente retórica, é ainda uma Álgebra. Mesmo sem usarmos símbolos explícitos, o simples fato de operarmos mentalmente com a incógnita, como se estivéssemos operando, de uma maneira geral, com números, é que confere a dimensão algébrica ao problema.

Esta não era, entretanto, a forma como os antigos egípcios resolviam o problema. Sem possuírem uma Álgebra simbólica, utilizavam recursos retóricos para enquadrar a situação e um procedimento de tentativas e erros, conhecido como cálculo de “aha”, nome dado à quantidade desconhecida. Esse procedimento viria a ser conhecido, posteriormente, como o método da falsa posição. Tal método tinha seu ponto de partida com o levantamento inicial de uma hipótese, ou posição inicial, sobre o valor da quantidade a ser determinada. Esta posição, ou suposição inicial, não era, entretanto, totalmente aleatória, mas sim, algo conveniente que obedecia a um propósito bem claro: o de simplificar os cálculos pela iniciativa de evitar as frações presentes na formulação do problema (BUNT, JONES & BEDIENT, 1988).

No caso do exemplo acima, o escriba egípcio escolhia um valor para a quantidade desconhecida (aha) que evitasse a fração $\frac{1}{4}$. Uma boa escolha seria o próprio número 4. É preciso perceber, entretanto, que este valor 4 atribuído inicialmente à quantidade desconhecida não tinha a pretensão de ser algo como um palpite verdadeiro; era, realmente, uma mera tentativa a ser apropriadamente corrigida logo em seguida. Aplicando a esta posição inicial as condições do enunciado do problema, o escriba raciocinava da seguinte forma: se a resposta fosse 4, então $4 + \frac{1}{4}$ de $4 = 5$. Como o resultado esperado era igual a 15, a posição inicial assumida para a incógnita (4) era evidentemente falsa. Entretanto, tendo em vista que o resultado obtido (5) precisava ser multiplicado por 3 para se chegar ao valor da soma correta (15), na mesma proporção deveria ser multiplicada a falsa posição inicial (4) para se obter o valor correto da incógnita. Assim, o método da falsa posição apontava para um valor de "aha" igual a 4 x 3 = 12.

É importante notarmos que o método da falsa posição adotava, portanto, duas linhas mestras. Em primeiro lugar, a adoção inicial de uma falsa posição quanto ao valor da incógnita, adoção esta baseada na conveniência da eliminação das frações. Em segundo lugar, a correção do valor atribuído inicialmente à incógnita por uma proporção entre os valores resultantes das somas (o correto e o obtido com a posição inicial) e os valores das incógnitas (o correto e a própria falsa posição inicial).

Para sermos mais fiéis com a história, seria conveniente assinalarmos que os antigos egípcios, ao utilizarem o cálculo de "aha", expressavam as frações sempre reduzidas a somas das chamadas "frações unitárias", onde estas significavam frações de numeradores iguais a 1. Elas eram indicadas por um símbolo sobre os números, mas neste artigo adotaremos, por simplificação, a representação moderna de separar os números por um traço (STRUIK, 1989). Assim, por exemplo, frações, como $\frac{2}{5}$, eram escritas como $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{3}{4}$ era escrita como $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ e assim por diante. Por simplicidade e para dirigir a nossa atenção para o método da falsa posição em si mesmo, descrevemos o raciocínio seguido pelos antigos egípcios evitando sua complicada notação de frações.

De modo análogo ao problema acima discutido, o problema de número 24 do papiro Rhind, afirmava que: "Uma quantidade desconhecida acrescida de seu sétimo, vale 19. Qual é esta quantidade?"

A solução pelo método da falsa posição é semelhante à do problema anterior. O escriba assume para o cálculo de "aha" a falsa posição 7. Tal escolha deve-se, como no caso anterior, à tentativa de evitar as frações. Uma vez operados os cálculos indicados no enunciado, o escriba obtém: $7 + \frac{7}{7} = 8$. Como o resultado deveria dar 19, a escolha teria sido evidentemente errada. A razão $\frac{19}{8}$, entre o resultado correto e o calculado deve ser a mesma que aquela existente entre o valor correto de "aha" e a falsa posição assumida. Logo, seria preciso multiplicar 7 por $\frac{19}{8}$ para obter-se o valor esperado da quantidade desejada (RESNIKOFF & WELLS, 1984).

Justificativa e Generalidade do Método da Falsa Posição

Acostumados que estamos com procedimentos simbólicos gerais, ficamos, por vezes, sentindo-nos meio que ludibriados pela marcante simplicidade do método da falsa posição na solução de problemas do primeiro grau. Por isso, esboçamos aqui uma forma simbólica mais geral de discutir as razões de um tal procedimento dar certo, de ser algo geral a ser aplicado a problemas daquele tipo. É interessante observarmos, entretanto, que os antigos egípcios não trabalhavam com esse tipo de justificativa, nem tinham clareza da generalidade do método. Em algumas outras situações em que o método poderia ser igualmente aplicado, eles adotavam formas alternativas de operar. É preciso, portanto, explicitar porque o método funciona e a extensão em que ele pode ser tido como funcionando para todas as equações lineares ou apenas para o tipo mais simples $ax = b$.

Equações como $x + \frac{x}{4} = 15$ e $x + \frac{x}{7} = 19$ relativas, respectivamente, aos problemas 26 e 24 do papiro Rhind podem ser escritas modernamente como $ax = b$. Suponhamos, portanto, que a falsa posição escolhida x_0, não funcione. Logo: $ax_0 = c$. O método indica que se multiplicarmos a falsa posição x_0 pela razão $\frac{b}{c}$, obteremos a resposta correta, ou seja, que: $(\frac{b}{c})\, x_0$ é a resposta correta. Em verdade, quando multiplicamos a equação por $\frac{b}{c}$, obtemos:

$\left(\frac{b}{c}\right) ax_0 = \left(\frac{b}{c}\right)$ c, ou seja: $a \left(\frac{b}{c}\right) x_0 = b$

Portanto, se: $x = \left(\frac{b}{c}\right) x_0$, então: $ax = b$, ou seja: $x = \left(\frac{b}{c}\right) x_0$ é a raiz da equação.

Em outras palavras, se:

$ax = b$ e $ax_0 = c$, temos que $\frac{ax}{ax_0} = \frac{b}{c}$, logo: $x = x_0\ {}^{b}/_{c}$

Este método é sempre válido para equações lineares escritas na forma $ax = b$. Entretanto, se tivermos: $ax + d = c$, poderemos subtrair d de ambos os lados da igualdade, tal que: $ax = c - d$ e fazendo $c - d = b$, teremos: $ax = b$.

As Origens Históricas do Método da Falsa Posição

Um ponto que por muito tempo caracterizou um certo eurocentrismo na História da Matemática foi o de creditar a criação do método da falsa posição a Leonardo de Pisa, por volta do século XIII. Entretanto, os estudos da História Antiga, realizados ainda no século XIX, demonstraram o desacerto de uma tal perspectiva, fazendo remontar as origens de um tal método a fontes bem mais antigas e não européias.

É muito difícil traçar a origem exata do método da falsa posição. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito quanto na China, o referido método era há muito conhecido, ainda que com denominações diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade. Como já afirmamos acima, um dos documentos mais antigos que faz referência ao método da falsa posição é o papiro Rhind, compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. Esse texto, entretanto, é um relato de conhecimentos bem mais antigos e não da exata autoria de Ahmes. Fica, portanto, difícil precisar os verdadeiros autores das idéias ali expostas, assim como a época dos seus surgimentos.

Por outro lado, sendo o método da falsa posição, historicamente, um tipo de procedimento originalmente retórico, como de resto a própria Matemática egípcia, alguns têm relutado em aceitá-lo como parte integrante da Álgebra, vendo-o, apenas, como um pequeno caso de Aritmética aplicada. Essa postura, entretanto, carrega também um viés ideológico eurocentrista defasado no tempo. Ela consiste em tomar como Álgebra apenas aqueles raciocínios expressos de uma forma completamente simbólica. Uma postura radicalmente oposta e bem mais aberta, do ponto de vista antropológico e cultural, é a de aceitar-se a história da Álgebra como dividida em três períodos: o retórico, o sincopado e o simbólico. Nesta perspectiva, o método da falsa posição pode ser encarado como um legítimo representante da primeira fase da história da Álgebra: a da Álgebra retórica, no qual, apesar da existência de símbolos utilizados para denotar quantidades e operações, o raciocínio utilizado, o desenvolvimento do processo de solução do problema, era completamente expresso em forma de prosa. A questão da aceitação ou não de raciocínios expressos de forma retórica como sendo uma Álgebra é marcadamente ideológica. Como assinala Joseph (1991) a transformação da Álgebra retórica para a simbólica, que marca um dos mais importantes avanços na Matemática, requereu duas importantes condições. A primeira foi o desenvolvimento de um sistema numérico posicional que permitiu escrever os números de forma concisa, trazendo, com isso, o desenvolvimento eficiente das operações. A segunda foi o aparecimento das práticas comerciais e administrativas que auxiliaram na adoção, não apenas de um sistema numérico, mas também de símbolos para representar os operadores.

Entretanto, se apesar de não possuir um caráter simbólico, podemos pensar na existência de uma Álgebra egípcia, há ainda uma outra questão a ser devidamente considerada, ligada à consciência da justificativa e da generalidade dos raciocínios utilizados. Analisando as soluções de problemas, contidos nos papiros, envolvendo quantidades desconhecidas, observamos que elas eram, em princípio, comparáveis com as nossas equações lineares. Contudo, os processos ali descritos são puramente aritméticos, não tendo se constituído, nas mentes dos egípcios, em um assunto distinto, em uma verdadeira solução de equações. Os problemas eram enunciados verbalmente, com indicações vagas para a obtenção das soluções e sem explicações do porque os métodos eram usados ou do porque eles funcionavam (KLINE, 1990). O método da falsa posição, na forma utilizada pelos antigos egípcios, ou seja, contido de forma não explícita no cálculo de “aha”, não chega, portanto, a se constituir exatamente em uma Álgebra. Isso se dá não pela simples falta de símbolos em seus raciocínios, mas pelo fato dos egípcios não terem estado em alerta para a justificativa e a generalidade daquele método adotado. Caso tivesse havido essa consciência acerca da justificativa e da generalidade de seu método, poderiam ter sido os egípcios, efetivamente, os primeiros usuários de uma Álgebra retórica. Entretanto, a ausência dessa consciência no cálculo de “aha” para problemas tidos hoje como relativos às equações lineares, coloca os antigos egípcios apenas como legítimos precursores da Álgebra retórica. A versão egípcia do método da falsa posição, implícito no cálculo de “aha”, tem uma validade geral para a solução de equações lineares, mas isso não parece ter sido percebido pelos escribas, pois, tal método nem sempre era usado. Parece claro que eles não sabiam que o método sempre funcionaria ou, talvez acreditassem que outros métodos usados no papiro Rhind também fossem métodos gerais. De uma forma ou de outra, não pode ser dito que eles, realmente, compreendiam as equações lineares.

O simbolismo aparece, usualmente, como a única linha demarcatória existente na história da Álgebra, mas o estado de alerta quanto à justificativa e à generalidade dos processos matemáticos utilizados é tão importante quanto a forma adotada para representar a matematização dos problemas. Desta forma, faltou aos egípcios um sistema metódico geral para resolver equações lineares com uma incógnita, no mesmo sentido que lhes faltou, também, um sistema alfabético escrito. Apesar de possuírem um desajeitado sistema de escrita, este incluía todos os ingredientes para que um método de representação alfabética bem sucedido pudesse vir a ser desenvolvido. Da mesma forma, suas coleções de técnicas matemáticas particulares incluíam procedimentos que em sua essência, não percebida, eram gerais, para resolver equações lineares em uma incógnita. Embora tais procedimentos fossem efetivamente gerais, eles realmente nunca tiveram consciência de tal fato. Em nenhum dos casos, portanto, nem na escrita nem na Matemática, eles reconheceram que os seus sistemas incluíam, além de técnicas especiais ou supérfluas, uma generalidade latente (RESNIKOFF & WELLS, 1984).

A proto-Álgebra egípcia, se assim podemos conceituar parte de sua Matemática, foi também indubitavelmente retardada pelos seus métodos desajeitados de lidar com as frações. Os cálculos extensos e complicados com frações, fora do escopo de análise do presente trabalho, foram, assim, igualmente, uma das razões pelas quais os antigos egípcios nunca desenvolveram uma Aritmética ou uma Álgebra em um nível avançado (KLINE, 1990). Este ponto, porém, está fora do escopo de análise do presente trabalho.

Mesmo considerando que maior parte da Matemática egípcia tenha se constituído de uma Aritmética pouco cômoda, de uma proto-Álgebra ligada a problemas práticos e com aplicações às medidas de figuras geométricas (STRUIK, 1989), devemos, ainda assim, encará-los como os legítimos precursores de vários tópicos agora incluídos como assuntos da Álgebra escolar. Isso, certamente, é totalmente verdadeiro em relação aos problemas de “aha” (BUNT, JONES & BEDIENT, 1988).

Incertezas quanto a autores e datas de importantes documentos matemáticos, existem, também, relacionadas com os antigos registros chineses a respeito do método da falsa posição. Este método aparece, por exemplo, na clássica obra chinesa intitulada "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática", de autoria e data desconhecidas. Sabemos apenas que, por volta de 213 a.C., um matemático de nome Ch'ang Ts'ang coletou os antigos escritos matemáticos chineses existentes àquela época e parece haver editado os "Nove Capítulos...". Há, contudo, uma tradição, sem evidências históricas muito consistentes, que admite ter sido esse texto originalmente preparado sob a direção de Chóu-Kung, que morreu em 1105 a.C. Tem sido ainda conjecturado que tal trabalho seria ainda mais antigo, datando do século 27 a.C. De toda forma, as evidências parecem efetivamente apontar para a existência dos conhecimentos contidos nos "Nove Capítulos..." em épocas bem anteriores ao ano 1000 a.C. (SMITH, 1958). O capítulo 7 desse importante documento matemático chinês é dedicado ao método da falsa posição, denominado, então, de "método do excesso e da deficiência". Os chineses referiam-se ao método, também, como a abordagem do: "assumindo que". Parece-nos relevante observarmos que com tais denominações, os matemáticos chineses em lugar de colocarem o foco de suas atenções no resultado final, na quantidade a ser calculada, como no caso da denominação egípcia do "cálculo de aha", estavam enfocando o próprio processo envolvido na solução do problema. Ainda que retórico, um tal procedimento chinês, centrado no processo do cálculo a ser efetuado e não apenas no resultado final, indica uma marcante diferença conceitual a ser devidamente considerada. Longe de constituir-se em uma mera questão semântica, a denominação chinesa do método da falsa posição sugere uma reflexão sobre a existência de uma tensão dialética entre os processos e os conteúdos envolvidos. A abordagem chinesa deste método, com foco no processo, mesmo que desprovida de um simbolismo nos raciocínios, aproxima-se mais de um tratamento algébrico do que a abordagem egípcia. Em uma seqüência cronológica, o método da falsa posição pode ser encontrado nos trabalhos do grande matemático grego Diofanto de Alexandria, por volta do ano 250 da nossa Era, já então envolvido em procedimentos algébricos sincopados, mesclando retórica com simbolizações. Entretanto, mais importante do que o simbolismo adotado é o fato de encontrarmos presente em Diofanto, como de resto na Matemática grega em geral, a idéia da necessidade da justificativa e da generalização. Ainda entre os gregos, encontramos, também, referência ao método da falsa posição em alguns problemas contidos na influente "Antologia Grega", elaborada por Metrodorus, por volta do ano 500. Na seqüência histórica, vamos encontrar esse método exposto nos trabalhos de notáveis matemáticos árabes como Al-Khowarizm (c. 810) e Abu Kamil (c. 850), assim como entre matemáticos hindus, como o grande Bhaskaracharya (1114-1185), sucessor do não menos famoso Bramagupta (BOYER & MERZBACH, 1989).

A Matemática hindu tem uma história bastante antiga, comparável à egípcia e à chinesa. Entretanto, o contato com a atitude grega diante da Matemática, na era Alexandrina, inaugura uma nova fase do pensamento matemático hindu. Por volta do ano 300, logo após a época de Diofanto, vamos encontrar na Índia um livro intitulado "Vaychali Ganit", de autoria de Sarvesh Srivasta, no qual cálculos matemáticos básicos já aparecem em notação decimal. Nele encontramos, também, referências às frações e ao método da falsa posição aplicado a questões envolvendo compras e vendas. Na primeira metade do século VII, Bhaskara I (600 – 680) já introduzia vários elementos simbólicos na construção de uma Álgebra capaz de lidar com grande número de problemas relacionados não apenas com equações lineares, mas, também, com algumas equações quadráticas e cúbicas.

Os séculos VII e VIII marcam o início da Matemática árabe. Por volta do ano 810, Al-Khowarizm escreve importantes trabalhos matemáticos sobre Aritmética, Álgebra, Geografia e Astronomia. Sua Álgebra, em particular, mesmo sendo essencialmente retórica, constitui um marco decisivo na história da Matemática. A própria palavra Álgebra deriva do nome do seu texto *Hisab al-jabr wál-muqabala*, que significa, literalmente, cálculos por completamento e balanceamento (ou restauração). O seu próprio nome é a fonte de origem da palavra algoritmo. As novas técnicas são utilizadas por Al-Khowarizm comparativamente com a utilização do método da falsa posição, então denominado de *elchatayn*, em problemas lineares. Problemas concretos, que poderiam ser tidos como envolvendo equações lineares, haviam sido resolvidos, até então, por falsa posição, sem clareza, entretanto, da formulação de uma equação. A partir de Al-Khowarizm, esses problemas passam a ser efetivamente expressos e resolvidos, ainda que de forma retórica, em termos da idéia de equações lineares. Entretanto, é conveniente notarmos que a denominação de “equação” só viria a ser adotada muito posteriormente. É importante assinalarmos que Al-Khowarizm propiciou um enorme avanço à Álgebra, principalmente com a introdução valorosa das técnicas de “complemento” e de “restauração”. No tocante, porém, à utilização do simbolismo, o seu trabalho situa-se a um passo atrás dos trabalhos de matemáticos anteriores hindus e mesmo do de Diofanto. Este é um caso típico que ilustra a “não-linearidade” do desenvolvimento da Matemática.

Por volta do ano 900, Abu-Kamil, legítimo sucessor de Al-Khowarizm, escreve o “Livro sobre a Álgebra”, no qual estuda aplicações deste campo da Matemática a problemas geométricos. Foi através desse livro que o Ocidente veio, muito tempo depois, a tomar conhecimento inicial da Álgebra e em especial do método da falsa posição. Com efeito, Leonardo de Pisa, introdutor principal da Álgebra na Europa, viria a basear sua obra sobre o referido livro de Abu-Kamil.

Antes que a Álgebra chegasse à Europa, podemos observar os avanços da mesma entre os matemáticos hindus. Bhaskara II, também conhecido como Bhaskaracharya (1114 – 1185) ou Bhaskara, o professor sucessor de Bramagupta como astrônomo em Ujuin, escreveu sobre Aritmética, Álgebra e Trigonometria esférica. Sua Álgebra é sincopada, não apenas retórica. Ela é quase simbólica, devido ao alto nível de uso do simbolismo assinalando um avanço sobre as obras de Bramagupta e dos matemáticos árabes. Entretanto, a versão árabe da Álgebra é que viria a ser transmitida inicialmente ao Ocidente, fazendo com que a história da Matemática apresente assim avanços e retrocessos em seu curso, naquilo que por vezes é denominado de um percurso dialético, não-linear. Em sua Álgebra, contida no seu livro intitulado *Lilavati*, o grande Bhaskara utiliza ainda o método da falsa posição conjuntamente com as novas técnicas introduzidas pelos árabes (Ball, 1960). Sua utilização, entretanto, já é de uma natureza crescentemente simbolizada.

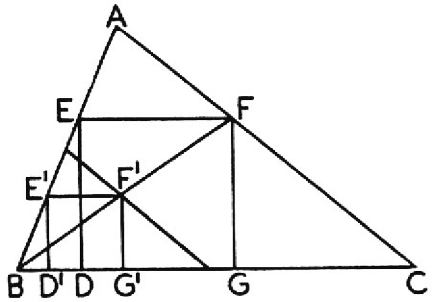
A Álgebra só chegaria à Europa após a morte de Bhaskara II, já no ano de 1202, através do célebre livro de Leonardo Fibonacci (1170 – 1240), também conhecido como Leonardo de Pisa, o *Liber Abacci*, ou *Livro dos Cálculos*. Traduzido, algumas vezes, de forma equivocada, como o *Livro do Ábaco*, é comum que se seja tentado a pensar tratar-se tal obra de um compêndio de regras de utilização do “ábaco”, antigo instrumento oriental utilizado também nos cálculos. A mensagem, porém, do texto de Leonardo de Pisa é realmente a missão de introduzir o sistema decimal, os algarismos arábicos e as novas técnicas da Álgebra entre os comerciantes da Europa. O impacto deste importante livro no pensamento matemático europeu foi tremendo, ainda que não tenha ele se tratado de uma obra verdadeiramente original, mas da compilação de ensinamento dos árabes, dentre eles, o método da falsa posição. Aliás, é preciso que seja destacado que o método da falsa posição não é apresentado apenas como um pequeno conteúdo matemático a mais a ser conhecido. Todo o capítulo 13 do *Líber Abacci* é dedicado ao referido método, à forma como o mesmo havia sido usado desde a Antiguidade bem como à sua extensão da “dupla falsa posição” a qual não está sendo abordada neste presente artigo. Fibonacci, latinizando a denominação dada pelos árabes, intitula o método como: *De regulis elchatayn*. A apresentação da

Álgebra no Líber Abacci é, contudo, ainda nitidamente retórica. Ela não incorpora, neste sentido, os enormes avanços conferidos na segunda metade do século anterior por Bhaskara. Deve-se, entretanto, a Fibonacci uma contribuição semântica no simbolismo algébrico: a introdução, em latim, da corrutela da expressão árabe "el chatayn" de onde se originam os termos correspondentes nas várias línguas ocidentais da palavra "equação" (não da idéia de equação, que é bem anterior). Esta palavra, no entanto, que muito depois viria a ser incorporada até os dias atuais na Matemática, passou uns 250 anos até tornar-se de uso generalizado entre os matemáticos. Também no campo semântico, a história da Matemática apresenta seus avanços e retrocessos, acima comentados (RESNIKOFF & WELLS, 1984).

Já em pleno Renascimento, Luca Pacioli (1494 - 1514), viria a dar seqüência neste percurso histórico, através da escrita, em 1494, da sua famosa *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*. Este foi o primeiro livro impresso sobre Aritmética e Álgebra em todo o mundo. A multiplicidade de cópias tiradas deu a ele uma influência até então nunca vista em outra obra de Matemática. O livro está fortemente baseado nos trabalhos de Leonardo de Pisa e sua importância deve-se, em grande parte, à sua ampla circulação e à conseqüente influência exercida. Muitas das soluções de problemas apresentadas por Pacioli são produzidas utilizando o método da falsa posição onde ele, encurtando a denominação dada por Fibonacci, intitula-o, simplesmente de *el cataym*. Este método ganhou, com o passar do tempo, várias denominações diferentes, até estabelecer-se, efetivamente, como o "método da falsa posição" nos trabalhos de Peletier (1549), Trenchant (1566), Baker (1568) e Suevus (1593).

O Método da Falsa Posição e a Semelhança Geométrica

Como vimos acima, o método da falsa posição consiste, basicamente, em uma tentativa de resolver um problema matemático através da adoção inicial de uma solução provisória e conveniente a ser, posteriormente, modificada através de um raciocínio envolvendo proporções. Essa característica faz com que possamos, também, encontrar similaridades com certas soluções adotadas em alguns problemas geométricos envolvendo relações de semelhança. Esse tipo de abordagem utilizada na construção inicial de certas figuras geométricas recebe o nome de "método da similitude". Ele consiste na construção de uma figura, semelhante àquela desejada e de obtenção mais simples. Uma vez obtida tal figura inicial, o raciocínio em termos proporcionais é estabelecido para aumentar a figura obtida na tentativa inicial, de forma a atender os requisitos da figura pretendida.



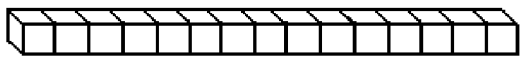
Tome-se como exemplo a tentativa de inscrever um quadrado DEFG em um dado triângulo ABC, conforme a figura ao lado, tal que o lado DG do quadrado repouse ao longo da base BC do triângulo.

Tomemos, inicialmente, um ponto qualquer D' sobre a base BC e tracemos o quadrado D'E'F'G', no qual E' está sobre BA e G'está sobre BC. O quadrado, assim obtido, é evidentemente menor do que aquele pretendido. Utilizando, entretanto, relações de proporção, podemos ampliar um tal quadrado proporcionalmente em direção à figura pretendida. Para isso, utilizamos o ponto B como um centro de similitude e ampliamos o quadrado D'E'F'G' até que o mesmo atinja o tamanho apropriado pela projeção de F'em F sobre AC etc. (EVES, 1958).

Visualizando o Método da Falsa Posição com Materiais Concretos

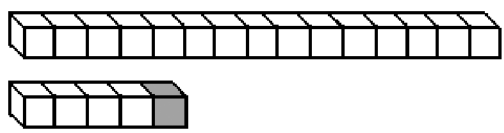
O método da falsa posição pode ser visualizado, no ensino da Matemática, com o uso de materiais concretos. Para ilustrar esta possibilidade, tomemos como exemplo o problema 26 do papiro Rhind, já discutido anteriormente. Em termos simbólicos, ele equivale a resolver a equação: $x + \frac{1}{4}x = 15$. Vejamos como proceder, por exemplo, utilizando barrinhas Cuisenaire para expor a solução de tal problema por falsa posição:

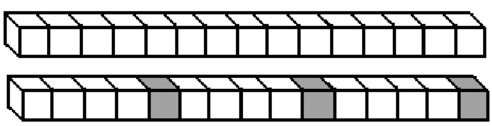
Tomamos, de início, uma disposição de 15 cubos alinhados, para representarmos o valor da soma total.



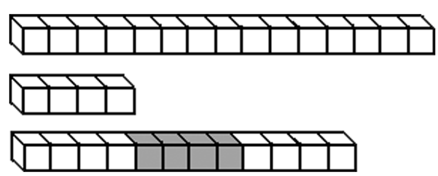
Em seguida, tomamos uma seqüência de quatro cubos alinhados, para representar a quantidade desconhecida e acrescentamos a tal sequência $\frac{1}{4}$ desta mesma seqüência para representar a soma $x + \frac{x}{4}$.

Colocamos, agora, lado a lado, as duas seqüências de barrinhas: a solução tentativa obtida por falsa posição (barra menor) e a solução correta (barra maior). Um simples exame visual deixa transparecer o desacerto da quantidade escolhida.





A comparação das barras mostra, também, que a soma obtida por falsa posição (barra pequena) é 3 vezes menor do que o valor correto desta soma (barra maior).



Deste modo, a falsa posição escolhida (seqüência inicial de quatro cubinhos) deve ser igualmente três vezes maior para obtermos a solução desejada. Tal solução desejada (12) é representada na figura acima, em termos do mesmo material concreto até então utilizado. Certamente, este exemplo não se constitui em uma demonstração da generalidade do método em causa. Além disso, a "visualização" do processo possibilitada pelas barrinhas, no exemplo tratado, é uma decorrência do fato da razão entre a falsa posição e a resposta correta ser um número inteiro. Em casos mais complicados, este artifício não seria aplicável. Ainda assim, entretanto, como um caso ilustrativo particular, uma visualização deste tipo pode ter o seu valor pedagógico: o de ser algo análogo a um trampolim para que um salto heurístico possa ser efetuado com maior segurança, posteriormente.

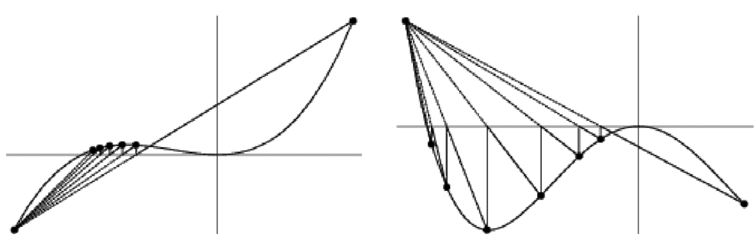
O Método da Falsa Posição e a Geometria Analítica: As Aproximações Iterativas

Não apenas nas apresentações mais elementares podemos encontrar boas visualizações do método da falsa posição. Também nos processos iterativos utilizados no Cálculo

Numérico para a resolução de equações podemos encontrar formas de visualizações propiciadas pela Geometria Analítica. A título de ilustração, observemos o princípio subjacente a uma tal abordagem com o auxílio da representação gráfica das funções. Para começarmos, caberia lembrarmos que uma iteração algébrica consiste em um processo de resolução de uma equação baseado em uma repetição de várias tentativas, no qual adotamos uma seqüência de operações em que o objeto de cada uma é o resultado da que a precede.

Os métodos iterativos de resolução de equações não-lineares consistem na construção de uma série de soluções aproximadas, $x_1, x_2,...,x_n, x_{n+1}$, de uma equação dada $f(x) = 0$. Eles são conteúdos usuais em cursos de cálculo numérico e de fundamentos da computação (LOURENÇO, 2002; ABRAMOWITZ & STEGUN, 1972; PRESS, FLANNERY, TEUKOLSKY & VETTERLING, 1992). Cabe salientarmos que é impossível prever, logo de início, se o método converge para uma solução aproximada da equação não-linear. A situação fica mais simples se conhecermos um intervalo no qual a função mude de sinal, pois isso é uma indicação de que a mesma cruza o eixo das abscissas, ou seja, uma indicação de que tal função apresenta raízes naquele intervalo. Deste modo, se conhecermos dois pontos a e b que satisfaçam a condição de que $f(a).f(b) < 0$, será possível garantir a convergência assim como também o número máximo de iterações requeridas para estimar a precisão desejada. Como não há nenhum algoritmo geral capaz de determinar a solução num tempo finito, devemos freqüentemente aceitar soluções aproximadas como substituição aos métodos algébricos clássicos. Apesar de fixarmos nossa atenção no método da falsa posição, é preciso assinalarmos que há várias formas de procedermos por iteração na busca das soluções de equações não-lineares e que elas podem ser agrupadas, de um modo geral, em métodos de intervalo e em métodos abertos. A abordagem mais simples baseada no método da falsa posição enquadra-se dentro dos métodos de intervalo assim como outras, tais como o método da bissecação, o método da falsa posição modificada e o método de Muller. Métodos abertos, mais complexos, por seu lado, incluem abordagens como o método da secante, o método de Newton, o método de Richmond, o método das substituições sucessivas e o método de Steffensen, todos fora do escopo de análise do presente trabalho.

O método iterativo da falsa posição consiste em um algoritmo para encontrar raízes que utiliza o ponto onde uma aproximação linear da função dada cruza o eixo das abscissas como partida para a próxima iteração, mantendo o mesmo ponto inicial para cada iteração a ser procedida, conforme ilustra a figura abaixo.



Expressando a aproximação linear da função dada em termos da equação de uma reta que passa por dois pontos, podemos escrever:

$$y - y_1 = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_1)}{x_{n-1} - x_1}(x_n - x_1)$$

com $y = 0$. Usando $y_1 = f(x_1)$ e resolvendo para x_n, temos a seguinte forma para a iteração pretendida:

$$x_n = x_1 - \frac{x_{n-1} - x_1}{f(x_{n-1}) - f(x_1)} f(x_1)$$

A junção, portanto, da Geometria Analítica ao método da falsa posição dá ao mesmo um novo contexto de validade, ampliando a sua capacidade de utilização na resolução de equações.

Conclusões

Ainda que o espectro de visualizações do método da falsa posição, coberto neste artigo, seja amplo o suficiente para abarcar desde as apresentações mais elementares àquelas envolvendo processos iterativos mais complexos, o verdadeiro foco da nossa atenção concentrou-se na utilização do referido método, em sua forma mais elementar, como um potente recurso pedagógico no ensino introdutório da Matemática. Dessa forma, podemos concluir que embora não seja o referido método, em sua forma mais simples, nenhum substitutivo para a resolução algébrica simbólica e moderna de equações e de sistemas de equações, ele se constitui, certamente, em um precioso trampolim para iniciarmos o salto em direção a um estudo mais formalizado. A grande vantagem da abordagem conferida pelo método da falsa posição como elemento inicial do processo de ensino das equações consiste no seu potencial exploratório, na porta que deixa aberta para o desenvolvimento da intuição. Dentro deste quadro, de tomar o método da falsa posição como um elemento introdutório no ensino das equações, impõe-se a necessidade de trabalharmos com os estudantes as imagens do mesmo, provenientes de suas associações com materiais concretos e com figuras geométricas.

A idéia de assumir um valor tentativo para uma quantidade desconhecida para em seguida corrigi-lo com o auxílio de uma simples proporção, como em uma regra de três, tornar-se-ia, desde o século XVI, um conhecimento obrigatório a ser ensinado nos cursos elementares de Matemática. Esta tradição de ensinar o método da falsa posição carregava, implicitamente, boa parte da história da construção do conhecimento algébrico e durou até muito recentemente. Reformas pedagógicas, de orientações questionáveis, entretanto, retiraram dos currículos elementares de Matemática o ensino do referido método. Mesmo boa parte dos professores atuais parece simplesmente ignorar, por completo, a existência do mesmo.

Esquecendo todo o passado do referido método, preferiram alguns educadores ignorar essa tradição, encarando-o, talvez, como uma mera técnica matemática totalmente superada e cujo ensino não levaria a lugar nenhum. Ainda que aceitássemos tão esdrúxula assertiva, precisaríamos assinalar que mesmo se fosse verdade que o método da falsa posição não pudesse nos levar mais a lugar nenhum, restaria, ainda assim, o reconhecimento de que ele, no campo da Matemática, já nos trouxe de muito longe.

O significado histórico do papel desempenhado pelo método da falsa posição na construção da Álgebra está ligado ao exercício de um pensamento intuitivo que sempre antecede as formalizações. Entretanto, a exclusão de um tal estudo do ensino elementar pode contribuir para uma certa atrofia do desenvolvimento do raciocínio exploratório. Tendo em mente uma perspectiva histórica da produção do conhecimento, só depois de explorar as intuições é que deveriam ser feitas mecanizações de procedimentos via uma simbolização mais rigorosa das abordagens matemáticas. Resgatar, portanto, o potencial heurístico contido no estudo do método da falsa posição parece um desafio a ser encarado por todos aqueles educadores que vêem no ensino da Matemática algo bem maior e mais prazeroso que um mero repassar de técnicas e procedimentos mecânicos.

Referências

ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, C. A. (Ed.). **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. New York: Dover Publications, 1972.

BALL, R. W. **A short account of the history of mathematics**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1960.

BOYER, C. B. & MERZBACH, U. C. **A history of mathematics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BUNT, L.; JONES, P.; BEDIENT, J. **The historical roots of elementary mathematics**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1988.

COLLETE, J. P. **Historia de las matematicas**. 2. ed. Ciudad de México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.

EVES, H. On the practicality of the rule of false position. **Mathematics Teacher**, Syracuse, v. 51, p. 606-608, 1958.

JOSEPH, G. **The crest of the peacock**: non-European roots of mathematics, I. B. London: Tauris & Co Ltd. Publishers, 1991.

KLINE, M. **Mathematical thought from ancient to modern times**. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1990. v. 1.

LOURENÇO, V. **Resolução de equações não lineares**. Coimbra: Departamento de Engenharia Química da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra. Disponível em: http://www.eq.uc.pt/~bufig3/equnaolineares.htm. Acesso em: 2 mar. 2002.

LUMPKIN, B. From Egypt to Benjamin Banneker: African Origins of False Position Solutions. **Vita Mathematica**, Toronto, ON, 1992.

MEDEIROS, A. & MEDEIROS, C. Materiais manipulativos na compreensão do algoritmo russo da multiplicação. In: ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 1999, Recife. **Atas**… Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1999.

PRESS, W. O. *et al.* **Secant method, false position method, and Ridders' Method. §9.2 in numerical recipes in FORTRAN**: the art of scientific computing. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. p. 347-352.

RESNIKOFF, H. L. & WELLS JR, R. O. **Mathematics in civilization**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1984.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover Publications, 1958.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.