

Simulação Numérica do Comportamento Mecânico de Tubos Poliméricos de Parede Fina submetidos à Pressão Interna

Peter Faluhelyi, Flaminio Levy Neto

Laboratório de Metalurgia - FT/ENM/UnB
CEP 70910-900, Asa Norte, Brasília, Distrito Federal
e-mail: pyi@uol.com.br, flaminio@unb.br

RESUMO

Neste trabalho, são apresentadas simulações numéricas de tubos de PVC de parede fina submetidos à pressão hidrostática interna, íntegros, desbastados e reparados, com uma razão entre o diâmetro (D) e a espessura (t) superior ou igual a 20, i.e. $D/t \geq 20$. Foram realizadas simulações numéricas com o programa de elementos finitos, chamado Compshell, utilizando tubos de PVC, desde o regime elástico até a ruptura, com a condição de contorno engastado numa extremidade e com liberdade de deslocamento axial na outra. São analisados os resultados dos deslocamentos longitudinal e radial, resultantes de momentos fletores e de tensões normais para tubos. As pressões máximas foram estimadas com o critério de falha de Tsai-Hill. O melhor resultado para tubos reparados foi obtido com o laminado de matriz epóxi (E) e carga de enchimento de algodão (A) com módulos de Young do compósito, $E_{E/A} = 3,5$ GPa, e do tubo de PVC, $E_{PVC} = 3,0$ GPa. O reparo compósito ideal é aquele que restitui a rigidez estrutural da região afetada, de forma que não ocorra estrangulamento ou estufamento na mesma. O objetivo do trabalho é comparar os resultados obtidos com dois tipos de reparos compósitos para tubos poliméricos: (i) matriz epóxi reforçado com fibra de vidro-E e (ii) matriz epóxi com carga de enchimento de algodão, indicando as características geométricas e propriedades mecânicas do reparo compósito que apresentou o melhor comportamento.

Palavras chaves: Tubo de PVC de parede fina, reparos compósitos.

Numerical Simulation of the Mechanical Behavior of Thin Wall Polymeric Pipes Subjected to Internal Pressure

ABSTRACT

This work presents the numerical simulation of thin perfect, machined and repaired PVC pipes subjected to internally hydrostatic pressure, with ratio between the diameter (D) and the thickness (t), above or equal 20, $D/t \geq 20$. The numerical simulations were carried out with a finite element program, called Compshell, using PVC tubes, from elastic behavior to the failure. The boundary conditions were: clamped in one end and simple supported in the other, with freedom along the axial direction. The longitudinal and radial displacements, the bending moments and normal stresses resultants for pipes were evaluated. The maximum pressure was estimated using the Tsai-Hill failure criterion. The best result for repaired pipes was obtained with a laminate of epoxy matrix (E) filled with cotton cloth (C), since this composite and PVC Young's modulus are close to each other. The ideal composite repairing is the one that restores the structural stiffness of the affected region, in the way that it does not strangle nor bulge out the tube. The purpose of the work is to compare the results obtained with two types of composite repairing for polymeric pipes: (i) epoxy matrix reinforced with E-glass fiber and (ii) epoxy matrix filled with cotton cloth, indicating the geometrical characteristics and mechanical proprieties of composite repairing that presented the best behavior.

Keywords: Thin PVC pipes, composite repairing.

1 INTRODUÇÃO

É importante ressaltar que a tecnologia de reparo compósito em instalações industriais e na construção civil apresenta vantagens para uma situação de dano em tubulações metálicas e poliméricas onde se tornaria oneroso parar o processo de transporte de fluidos gasosos ou líquidos. O reparo compósito pode ser realizado para qualquer diâmetro, e a metodologia permite ser instalado em local, onde há falta de energia

elétrica e pouco espaço operacional para a instalação do reparo. A relevância do estudo de reparos compósitos para tubos poliméricos torna-se necessário antes de se colocá-los como solução tecnológica de mercado. A razão pela qual se iniciou este estudo teórico com tubos de PVC, é que as pressões de ruptura, em geral, destes tubos são bem inferiores que às de tubos metálicos.

Inicialmente, se apresentará uma breve revisão do programa de elementos finitos, chamado Compshell, aplicado a tubos de parede fina. A seguir, se mostrará a modelagem matemática necessária para a simulação numérica de tubos: íntegro, desbastado e reparado. A apresentação de resultados dos deslocamentos e esforços será para depois comparar tubo íntegro com o reparado com laminados de matriz epóxi: (i) reforçado com fibra de vidro-E e (ii) com enchimento de tecido de algodão. Na análise, se confrontará os resultados do programa Compshell com a teoria de membrana, para o tubo íntegro. Depois, de acordo com a comparação das curvas de deslocamento radial do tubo reparado com laminados (i) e (ii), é possível prever para cada tipo de reparo, a espessura ideal que melhor recupera a integridade mecânica em relação ao tubo íntegro. Na conclusão, se indicará o reparo compósito de melhor comportamento mecânico, com a espessura ideal.

2 REVISÃO DO PROGRAMA COMPSHELL

O Compshell é um programa de elementos finitos, criado por Mistry [1], baseado na teoria de cascas finas axissimétricas, que possibilita a realização de simulação numérica sob estados de tensões variados. O Compshell é elaborado conforme a teoria geométrica não linear de cascas finas de Novozhilov [2]. O programa permite que o material seja ortotrópico, e assume que a casca seja de parede fina quando a razão entre o diâmetro (D) e a espessura (t), D/t for superior a 20. Neste trabalho, a razão D/t é maior que 20, desta maneira o estado de tensão tridimensional será reduzido para um estado de tensões bidimensional. O programa assume que a casca é axissimétrica e composta por camadas. As camadas, chamadas de lâminas, possuem características próprias e podem ter a princípio qualquer orientação das fibras de reforço.

O elemento básico do programa é um anel axissimétrico com nós nas extremidades. Em relação à superfície média do elemento, cada nó possui quatro graus de liberdade: três de translação e um de rotação. O deslocamento de translação é: axial (u), circunferencial (v) e radial (w). O deslocamento axial está na mesma direção do eixo de simetria da casca cilíndrica. O deslocamento radial está na mesma direção do raio da casca cilíndrica. Entretanto, o deslocamento circunferencial, está na direção tangente à seção circular da casca, portanto perpendicular aos outros dois deslocamentos. A rotação axial (β) indica o ângulo de rotação no plano formado pelas direções axial e radial. A Figura 1 mostra os graus de liberdade comentados.

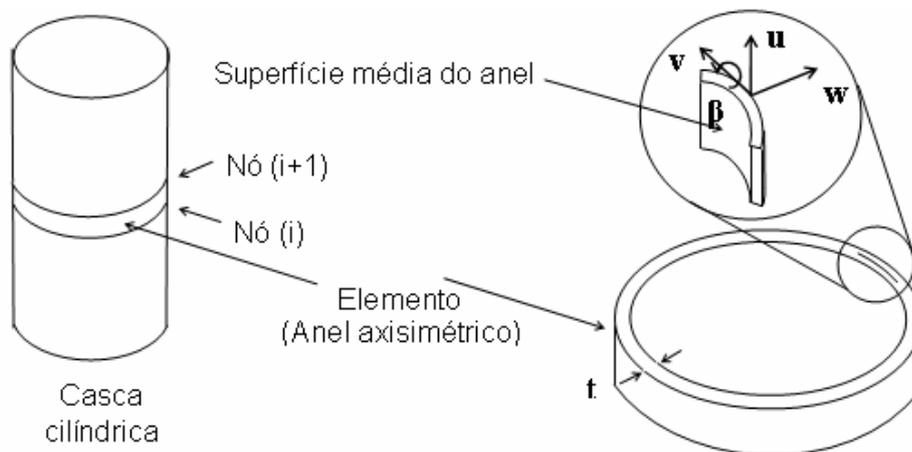


Figura 1: Representação de um elemento de casca axissimétrica.

As funções de interpolação utilizadas pelo programa para o cálculo das tensões nos elementos são cúbicas para w , quadráticas para β e lineares para u e v . O algoritmo de Newton-Raphson é usado para resolver o sistema de equações não lineares, citado por Levy Neto [3].

O Compshell despreza o cisalhamento transversal, bem como a deformação normal na direção da espessura da parede da casca e admite a superposição arbitrária de camadas com espessura constante. As camadas são perfeitamente coladas, homogêneas, elásticas e ortotrópicas ao longo da espessura, representada pela coordenada radial (r). Por outro lado, a coordenada x , está na direção axial da casca cilíndrica, conforme Figura 2. No Compshell, a estrutura é dividida em segmentos, formados por anéis axissimétricos discretizados em elementos, ao longo da direção axial. Os anéis possuem dois nós, um em cada extremidade,

representando os elementos da estrutura, conforme Figura 1. Os segmentos são unidos por junções e a parede da casca é idealizada pela superposição de camadas, ao longo da espessura. Sendo a primeira camada situada à esquerda em relação ao sentido positivo da coordenada s , a qual acompanha a superfície da casca. A Figura 2 mostra os diversos elementos representativos da casca utilizados pelo Compshell, conforme Levy Neto [3], para tubos íntegro, desbastado e reparado.

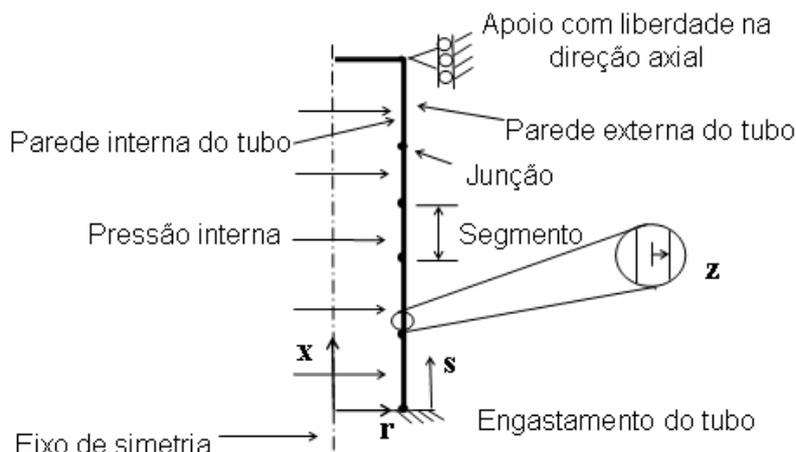


Figura 2: Modelamento geral do Compshell para tubos.

O programa permite que se analise a estrutura quanto à ruptura, sob diversos critérios de falha. Neste trabalho, serão simulados deslocamentos e esforços de cascas cilíndricas em equilíbrio estático, sob pressão hidrostática interna, com o critério de falha de Tsai-Hill.

O arquivo de saída do Compshell fornece os deslocamentos de translação (u , v e w) e de rotação (β), as resultantes de tensão e de momento ao longo da estrutura, calculados em relação à superfície média da casca, para cada nó dos elementos. Portanto, sabendo os valores do deslocamento e do comprimento inicial, chega-se ao valor da deformação desejada.

A escolha do número de elementos de cada segmento é importante, porque quanto maior este for mais rápido os resultados convergirão para os valores esperados, contudo o tempo computacional será maior. Para cada segmento é necessário informar: a quantidade de camadas; as coordenadas, axial ou longitudinal (coordenada x), radial (coordenada r), ao longo do comprimento do tubo (coordenada s) e ao longo da espessura do tubo (coordenada z); as propriedades mecânicas da camada; e a espessura (t).

O programa Compshell foi criado por Mistry (1991), e vem sendo comparado com resultados experimentais [Levy Neto, 1991, Ph.D.; Gonçalves, 1997, Mestrado (ITA); Maia, 2003, Mestrado (UnB); e Faluhelyi, 2006, Mestrado (UnB)], resultados numéricos [Maia, 2003, Mestrado (UnB); e Alencar, 2006, Projeto de Graduação 2 (UnB)] e resultados analíticos [Balduino, 1998, Mestrado (UnB); Maia, 2003, Mestrado (UnB); Thomazi, 2006, Mestrado (UnB); e Faluhelyi, 2006, Mestrado (UnB)]. As correlações do Compshell com resultados experimentais, para domos e cilindros compósitos, tem sido melhores que 80%, quando comparado com análises do ANSYS melhores que 90 % e em relação a tensões de membrana na região central de cilindros melhores que 98 %.

3 MODELAGEM DE CORPOS DE PROVA PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

As simulações no Compshell, em tubos de PVC com comprimento (L) de 500 mm, diâmetro (D) de 100 mm e espessura (t) de 1,8 mm, serão realizadas com três tipos de corpos de prova: tubo íntegro (TI), tubo desbastado (TD) e tubo reparado (TR). Os corpos de prova serão simulados com a condição de contorno, engastado numa extremidade e apoiado com liberdade na direção axial na outra. Na Figura 3, será ilustrado o corpo de prova de tubo TI e na Figura 4, o de tubo TR. O desbaste, realizado nos corpos de prova desbastado (TD) e reparado (TR), tem extensão de 100 mm e espessura de 0,9 mm (50 % de $t = 1,8$ mm) na direção z .

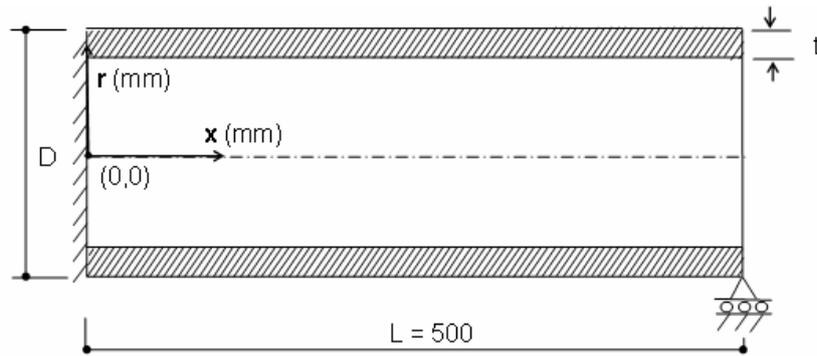


Figura 3: Representação do corpo de prova de tubo íntegro (TI), engastado de um lado e do outro, apoiado com liberdade axial, com tampas nas extremidades.

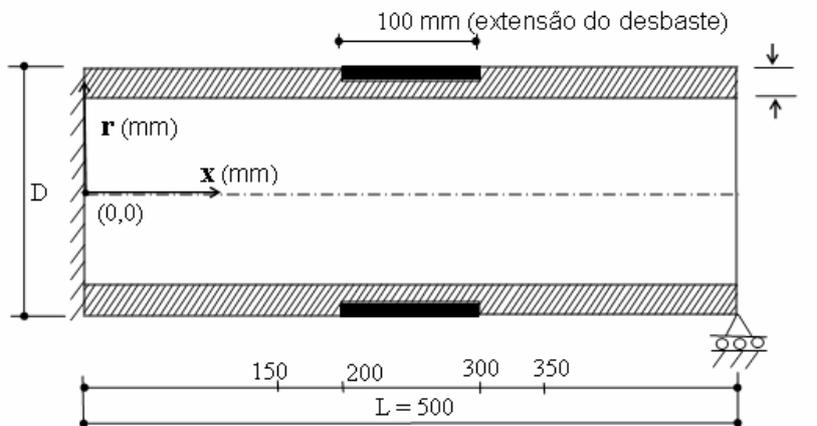


Figura 4: Representação do corpo de prova de tubo reparado (TR), engastado de um lado e do outro, apoiado com liberdade axial, com tampas nas extremidades.

4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NO COMPSHELL

As propriedades mecânicas de tubo de PVC e de materiais compósitos utilizados no Compsshell são mostradas na Tabela 1, como os módulos de Young (E_{11} e E_{22}) e de cisalhamento (G_{12}), o coeficiente de Poisson (ν_{12}), limites de resistência à tração (X_{T1} e X_{T2}), à compressão (X_{C1} e X_{C2}), ao cisalhamento (S_{12}). São utilizados para as simulações de tubos reparados os compósitos (matriz/fibra): Epóxi/VidroE e Epóxi/Algodão. As massas específicas (ρ) em g/cm^3 são: $\rho_{epóxi}=1,2$; $\rho_{vidroE}=2,5$; e $\rho_{PVC}=1,4$. Os valores das frações volumétricas da Tabela 1 de matriz (ν_m) e de fibra (ν_f) são 70% e 30%, respectivamente, para compósitos de Epóxi/VidroE, de tecido balanceado ($0^\circ/90^\circ$), nas direções longitudinal e circunferencial, confeccionado sem vácuo. No caso do reparo com Epóxi/Algodão, o tecido de algodão nos laminados é apenas carga de enchimento, confeccionado sem vácuo.

Tabela 1: Propriedades do PVC por Albuquerque [4] e de reparos por Hull [5] e Levy Neto [6].

Propriedade	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}	X_{T1}	X_{C1}	X_{T2}	X_{C2}	S_{12}
Material	MPa	MPa	MPa	-	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
Resina Epóxi	3500	3500	1296	0,35	35	100	35	100	50
Epóxi/VidroE	16400	16400	2162	0,26	278	295	278	295	53,3
PVC	3000	3000	1071	0,40	42	42	42	42	20

Os dados da Tabela 1 são introduzidos no arquivo de entrada do Compshell para cada tipo de corpos de prova. As tabelas 2 e 3 mostram os resultados retirados dos arquivos de saída quando o Compshell finaliza a simulação para os corpos de prova TI, TD e TR, fornecendo a pressão hidrostática interna de ruptura (p_{rup}), bem como as posições de ruptura, longitudinal (s) e ao longo da espessura (z) nas condições de contorno previamente definidas no modelamento (vide Figura 2). Na Tabela 2, são apresentados no local de ruptura, os valores de deslocamento radial (w) e de deslocamento longitudinal (u), de resultante de tensão circunferencial (N_{θ}) e de resultante de momentos fletor longitudinal (M_x), para s e z, respectivamente, com o critério de falha de Tsai-Hill.

Tabela 2: Resultados obtidos pelo Compshell de tubos TI e TD na ruptura

Esforços e deslocamentos	p_{rup}	N_{θ}	M_x	w	u	s	z
Corpos de prova	MPa	N/mm	N	mm	mm	mm	mm
TI	1,71	83,56	-1,913	0,618	0,810	477,2	0,90
TD	0,88	43,53	-0,035	0,642	0,222	220	0,45

A Tabela 3 apresenta, no local de ruptura, as resultantes de esforços (N_{θ} e M_{θ}) e deslocamentos (u e w) para os corpos de prova de tubo reparado (TR), com laminados de Epóxi/VidroE (V) e Epóxi/Algodão (E). A nomenclatura na Tabela 3, com reparo compósito de Epóxi/VidroE (V), se simboliza como TRV, e no caso do reparo de Epóxi/Algodão (E) como TRE. Nos tubos reparados da Tabela 3, se mostra o número da camada em que eles falharam pelo critério de Tsai-Hill.

Tabela 3: Resultados obtidos pelo Compshell de tubos TRV e TRE na ruptura

Esforços e deslocamentos	p_{rup}	N_{θ}	M_{θ}	w	u	s	z	Camada
Corpos de prova	MPa	N/mm	N	mm	mm	mm	mm	número
TRV	1,51	79,44	13,12	0,598	0,338	201	0,370	1
TRE	1,29	63,86	1,36	0,479	0,397	285	0,835	2

A Tabela 4 fornece a espessura ideal (t_{reparo}), dada por $t_{reparo} = (E_{tubo} / E_{reparo}) \cdot t_{desbaste}$, citado em Maia [7], dos dois reparos utilizadas para as simulações no Compshell. Na tabela 1, são encontrados os valores dos módulos de Young do reparo ($E_{reparo} = E22 = E11$) e do PVC ($E_{tubo} = 3000$ MPa). A espessura de desbaste ($t_{desbaste}$) do corpo de prova reparado é de 0,9 mm ($t_{desbaste} = 50\%$ de t), ilustrada na Figura 4.

Tabela 4: Espessura de reparo compósito ideal (t_{reparo}) para corpos de prova (TR)

Reparo Compósito	E_{reparo} (MPa)	t_{reparo} (mm)
Epóxi/VidroE	16400	0,16
Epóxi/Algodão	3500	0,77

Os gráficos de deslocamentos radial (w) e longitudinal (u) de esforços resultantes de tensão circunferencial (N_{θ}) e de momento longitudinal (M_x), em função da posição longitudinal (x), de tubo íntegro (TI) nas condições de contorno definidas na modelagem (vide Figura 2) para a pressão hidrostática interna (p) de 0,60 MPa, no regime elástico, são mostrados nas Figuras 5, 6, 7 e 8, respectivamente. No arquivo de entrada, foi utilizada como referência de modelo a Figura 2 e para as propriedades mecânicas a Tabela 1, obtendo-se os dados necessários no arquivo de saída do Compshell para a construção destes gráficos.

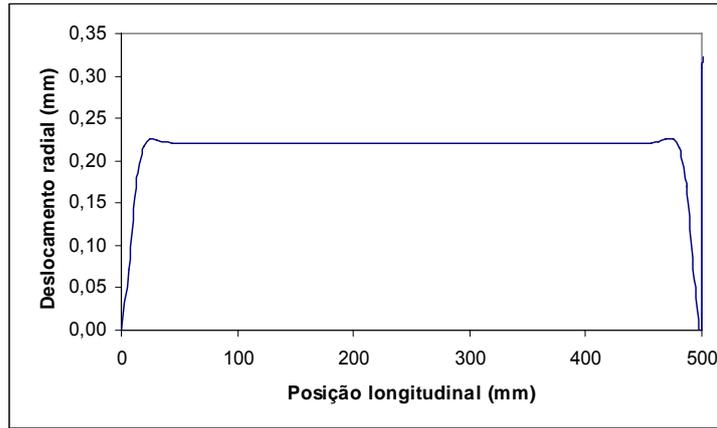


Figura 5: w

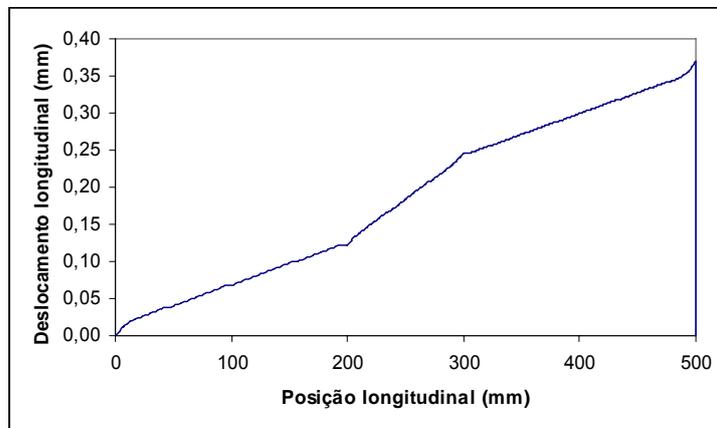


Figura 6: u

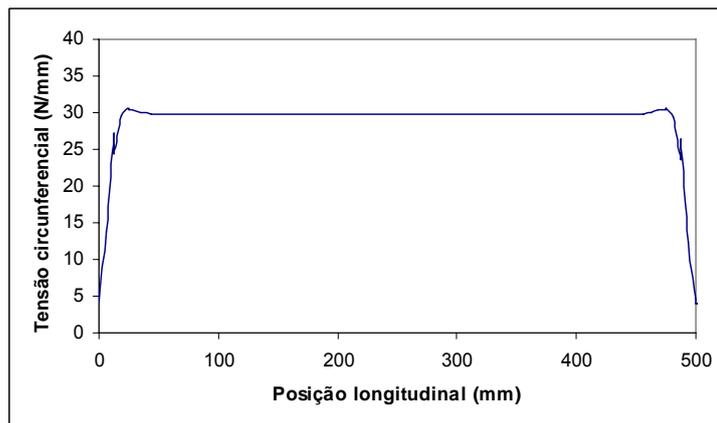


Figura 7: N_0

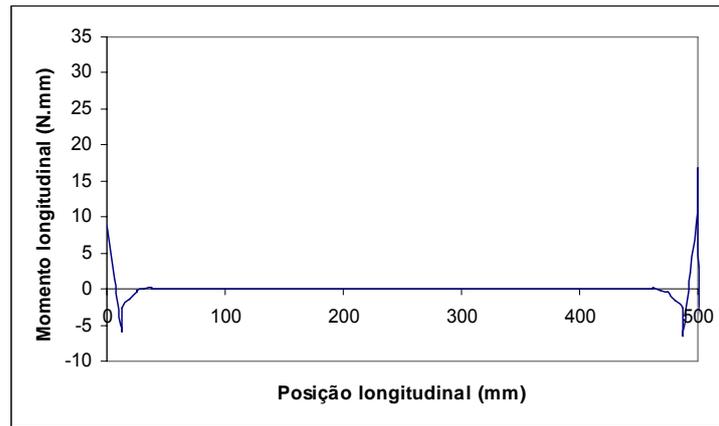


Figura 8: M_x

Os gráficos de deslocamentos radial (w) e longitudinal (u) e de esforços resultantes de tensão circunferencial (N_θ), de momento longitudinal (M_x), em função da posição longitudinal (x), de tubo desbastado (TD) nas mesmas condições de contorno do tubo TI para a pressão hidrostática interna (p), de 0,60 MPa, no regime elástico, são mostrados nas Figuras 9, 10, 11 e 12, respectivamente.

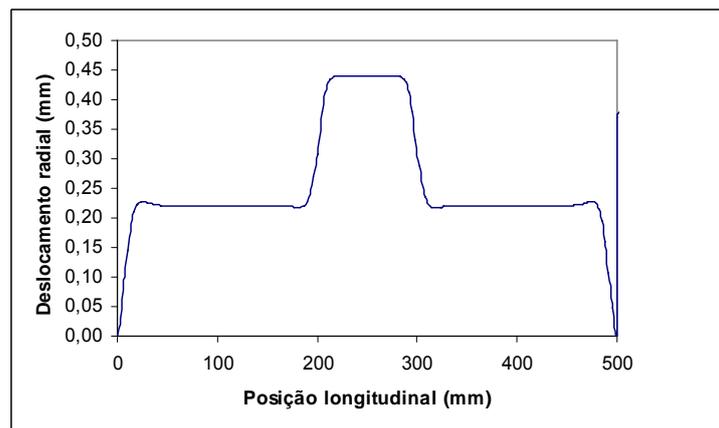


Figura 9: w

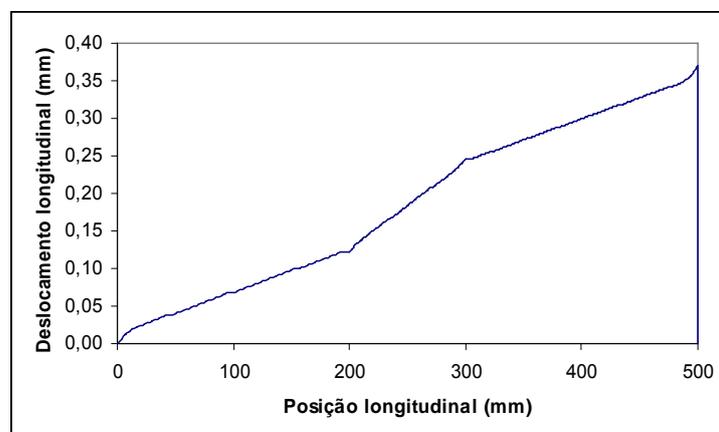


Figura 10: u

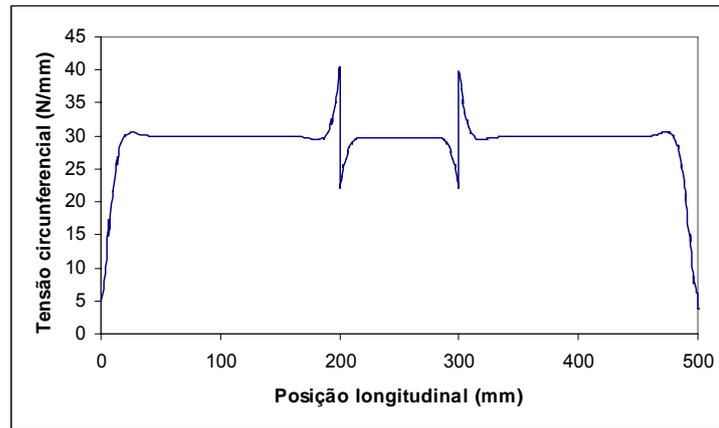


Figura 11: N_{θ}

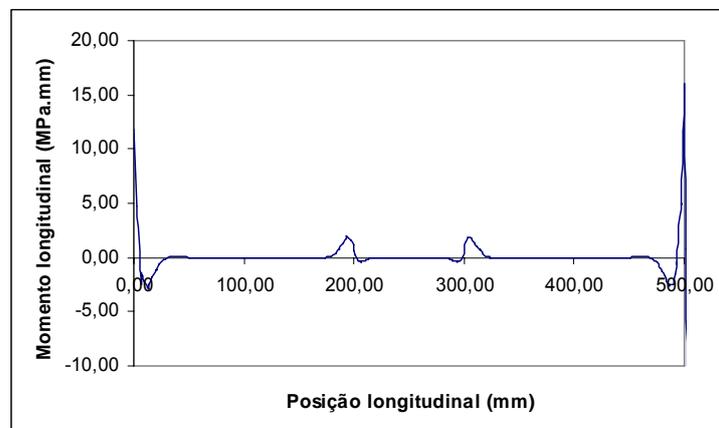


Figura 12: M_x

Os gráficos das Figuras 13 e 14 de deslocamento radial (w), em função da posição longitudinal (x), de tubos reparados TRV e TRE, nas condições de contorno do tubo TI, para pressão hidrostática interna (p), no regime elástico, de 0,60 MPa. As curvas destes gráficos mostram um estufamento na região do reparo para os tubos TRV e TRE. Nestes exemplos, para a confecção destes gráficos, mantiveram-se no Compshell as mesmas propriedades mecânicas da Tabela 1 e de dimensionamento dos corpos de prova da Figura 4, utilizando a espessura de reparos compósitos para o tamanho ideal, que são fornecidos pela Tabela 4.

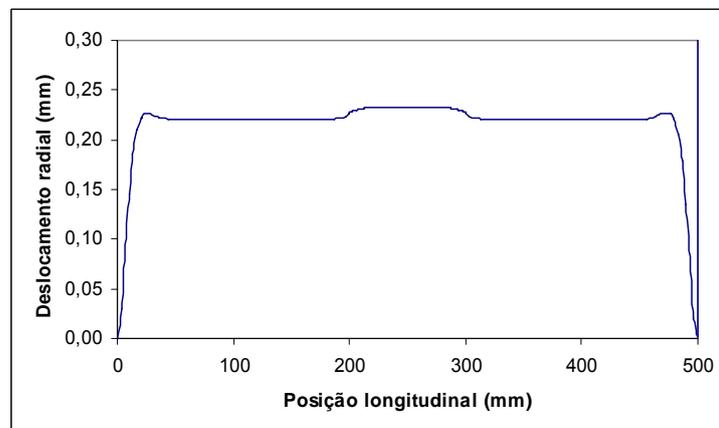


Figura 13: Deslocamento radial de tubo reparado TRV para $p = 0,60$ MPa.

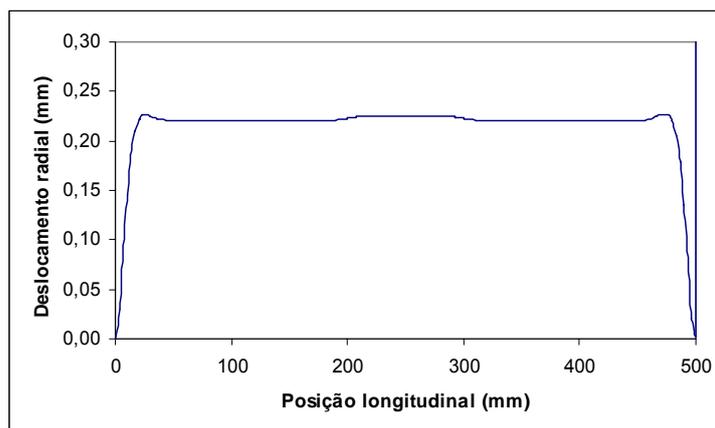


Figura 14: Deslocamento radial de tubo reparado TRE para $p = 0,60$ MPa

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DE SIMULAÇÃO NO COMPSHELL

Neste primeiro momento de análise dos resultados, devem-se tecer alguns comentários sobre a teoria e o modelamento utilizados para a simulação no Compsshell. A pressão interna distribuída (p) com simetria radial faz com que os corpos de prova não sofram torção. Deve-se considerar a hipótese de que estas simulações sirvam para ensaios futuros que podem ser realizados com os corpos de prova, TI, TD e TR, nas condições de contorno já descritas, portanto não serão mais daqui em diante mencionadas. O deslocamento circunferencial (v) é nulo, as resultantes de tensão $N_{x0} = N_{0x}$ são nulas e as resultantes de momentos $M_{x0} = M_{0x}$ são também nulas, para todos os corpos de prova estudados. A tensão radial (σ_r), mencionada por Maia [7], é considerada desprezível para tubos de parede fina, onde a razão entre o raio (R) e espessura (t) é superior a 10, sendo $R = 50$ mm e $t = 1,8$ mm, i.e. $R/t = 27,8$. O programa Compsshell, baseado na Teoria de Cascas Cilíndricas Delgadas, na posição longitudinal, $s = 250$ mm, reforça a afirmação, pois para a pressão de 0,6 MPa, as resultantes de tensão são $N_x = 14,95$ N/mm e $N_\theta = 29,87$ N/mm, obedecendo à relação $N_\theta \approx 2 \cdot N_x$, citado em Maia [7]. Os corpos de prova, em questão, são considerados longos, logo a Teoria de Membranas se aproxima da Teoria de Cascas Cilíndricas de Parede Fina no centro do tubo íntegro, citado por Kraus [8]. A diferença percentual de resultante de tensão circunferencial (N_θ), no centro do tubo, entre a Teoria de Membranas e do Compsshell de tubo TI, é de 0,4 %, neste trabalho. A ruptura do tubo TI ocorre na posição longitudinal, $s = 477,2$ mm (vide Tabela 2), na superfície externa do tubo, $z = 0,90$ mm, isto acontece naquele lugar, devido à razão entre a resultante de tensão circunferencial (N_θ) e a espessura (t), i.e. N_θ/t , ser superior à resistência de tração da parede do tubo (X_{T2}), i.e. $(N_\theta/t) > X_{T2}$ (vide Tabela 1). O tubo desbastado TD, da Tabela 1, apresenta a posição ao longo da espessura do tubo (z), $z = 0,45$ mm, logo a ruptura ocorre na superfície externa, e ainda na posição longitudinal, $s = 220$ mm, porque a resultante de tensão circunferencial (N_θ) dividida pela espessura (t) é superior à resistência de tração da parede do tubo (X_{T2}), i.e. $N_\theta/t > X_{T2}$ (vide Tabela 1). Não se apresentou tabelas e gráficos de resultante de momento circunferencial (M_θ), pois os valores são muito baixos em relação ao momento longitudinal (M_x), localizados na interface da região desbastada com a região íntegra do tubo para os corpos de prova TD e TI e fora destas regiões os valores foram nulos, descontando a região próxima aos apoios. Entretanto, o deslocamento radial (w) é maior do que o longitudinal (u), na região central do tubo, basta notar as figuras 5 e 6 para o tubo TI, e as figuras 9 e 10 para o tubo TD.

Neste segundo momento de análise, após uma breve análise em relação à simulação, se torna claro, como um dos fatores determinantes, que a recuperação da integridade mecânica em relação ao tubo TI nas mesmas condições de contorno e pressão interna, pode ser realizada mudando o tipo de material dos reparos compósitos com suas espessuras ideais, respectivamente. A principal curva de análise destas figuras é a do deslocamento radial, a Figura 5, que fornece, na região central, $w = 0,221$ mm para $p = 0,60$ MPa. A curva de deslocamento radial (w), na Figura 9, para tubo TD, indica estufamento em relação à região íntegra para pressão de 0,60 MPa, que fornece na região central $w = 0,440$ mm. Para reduzir o deslocamento radial, é necessário um reparo na região central, foco deste trabalho. As curvas de deslocamento radial (w) nas figuras 13 e 14, de tubo reparado (TR) para pressão de 0,60 MPa, com reparos de Epóxi/Vidro-E e Epóxi/Algodão, foram apresentadas para se notar que os valores de deslocamento radial (w) na região central ficam próximos do tubo íntegro (TI). Os tubos reparados TRV e TRE em valores percentuais de deslocamento radial (w), em relação ao tubo íntegro (TI), na posição longitudinal, $s = 250$ mm, são de 4,98% e 1,36%, respectivamente.

6 CONCLUSÃO

A melhor escolha para ensaios de tubo reparado (TR), de acordo com a análise de resultados, é do reparo Epóxi/Algodão com espessura de 0,77 mm na região do desbaste, entre as posições de 200 mm e 300 mm. O tubo reparado (TR) deve ser comparado ao tubo íntegro (TI) quanto ao deslocamento radial (w) na região central. No caso de futuros ensaios, os corpos de prova TI, TD e TR terão as configurações deste trabalho e os resultados experimentais confrontados com os do Compshell.

7 AGRADECIMENTOS

Agradeço à Eletronorte pela parceria com a UnB/FT/ENM na realização do projeto “Aplicação de Materiais Compósitos para Reparo de Tubulações Industriais”.

8 BIBLIOGRAFIA

- [1] MISTRY, J., LEVY NETO, F., “A Procedure For Analyzing the Strength of Composite Domes by Axisymmetric Shell Finite Elements”, *Composites Engineering*, v. 3, n. 1, pp. 169-180, 1994.
- [2] NOVOZHILOV, V.V., *The Theory of Thin Shells*, Groningen: P.Noordhoff, 1959.
- [3] LEVY NETO, F., “The Behaviour of Externally-Pressurized Composite Domes”, *Tese de Ph.D.*, cap. 4, pp. 122-134, University of Liverpool, 1991.
- [4] ALBUQUERQUE, J.A.C., *O Plástico na Prática*, cap.7, pp.91-94, Sagra Ltda, Porto Alegre, 1990.
- [5] HULL D., *An Introduction to Composite Materials*, cap.10, pp. 231-135, Cambridge, 1981.
- [6] LEVY NETO, F., *Estudo da Falha ao Impacto de uma Estrutura de Material Conjugado usada em Aeronaves*, Dissertação de M.Sc., cap. 3, pp. 47, Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), São Paulo, 1983.
- [7] MAIA, G.C., *Comportamento Elástico de Cilindros com e sem Reparo Circunferencial de Carbono/Epóxi*, Dissertação de M.Sc., Programa de pós-graduação de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, pp. 51-77, 2003.
- [8] KRAUS, H., *Thin Elastic Shells: An Introduction to the Theoretical Foundations and the Analysis of their Static and Dynamic Behavior*, cap. 5, pp. 121-139, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.