

Análise de tensões e deslocamentos em peças cilíndricas de madeira devido à retração

Analysis of stresses and displacements in cylindrical wood parts due to shrinkage

Nilson Tadeu Mascia¹

¹ Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Unicamp CP: 6143 – CEP 13083-889, Campinas, SP
e-mail: nilson@fec.unicamp.br

RESUMO

A retração na madeira pode ser analisada sob o ponto de vista de sua influência em tensões, deformações e deslocamentos, presentes nas estruturas. Essa retração pode ser computada como parcela nas relações tensão-deformação, considerando-se nessa análise uma peça de madeira em forma de tronco cilíndrico sem forças externas, num sistema de coordenadas cilíndricas. Devido à simetria radial o campo de deslocamentos é função do raio e o deslocamento na direção angular é nulo. Considerando-se também que a deformação longitudinal seja constante, as deformações são escritas em função dos coeficientes de deformação reduzida e de um coeficiente associado denominado de k , apresentados por Lekhnitskii, os quais dependem das propriedades de elasticidade do material. Com isso a equação diferencial que rege esse problema é função dos coeficientes de deformação e conseqüentemente da retração. Para exemplificar o uso da equação regente do problema e conseqüente determinação de tensões nas direções radial e tangencial e deslocamentos radiais foram utilizados os coeficientes de elasticidade da espécie de madeira *Pinus caribaea* obtidos em procedimento experimental auxiliar. De um modo geral, os resultados mostraram a importância de se verificar a influência da retração no estado de tensão radial e tangencial e nos deslocamentos radiais em peças de madeira.

Palavras-chave: Retração, Madeira, Tensões, Módulos de Elasticidade, Coeficientes de Redução de Lekhnitskii.

ABSTRACT

The shrinkage in wood can be analyzed under the point of view of the influence on stresses, strains and displacements present in the structures. Thus, the shrinkage can be computed as parcel in the stress-strain relationship, considering in this analysis a piece of wood in form of cylindrical stem without external forces, in a system of cylindrical coordinates. Due to the radial symmetry, the field of displacements is function of radius and the angular displacement is null. Considering also the longitudinal strain is constant, the strains are written in function of the reduced strain coefficients and an associate coefficient denominated by k , presented by Lekhnitskii, which depend on the material elastic properties. With this, the differential equation that conducts this problem is function of the coefficients of strain and consequently of the shrinkage. As example of the use of the regent equation and consequently determination of stresses in the radial and tangential directions it was used the elastic coefficients of the wood species *Pinus caribaea* obtained in auxiliary experimental procedure. In general, the results indicated the importance of verifying the influence of the shrinkage in the of radial and tangential stress state and also in displacements of the wood pieces.

Keywords: Shrinkage, Wood, Stresses, Elastic Properties, Lekhnitskii's Reduced Elastic Coefficients.

1. INTRODUÇÃO

Esse artigo tem por objetivo apresentar uma visão geral dos conceitos de anisotropia aplicados à madeira, sendo analisadas as tensões e também as deformações e os deslocamentos, destacando a influência da retração nessa análise. Esses conceitos têm base em estudos de LEKHNITSKII [1] sobre os conceitos gerais de anisotropia e HSU e TANG [2] sobre a aplicação desses conceitos no estudo da retração da madeira.

A retração na madeira analisada sob o ponto de vista de tensões e de deformações pode ser feita considerando-se nessa análise uma peça de madeira em forma de tronco com configuração cilíndrica, sem forças externas. Desse modo, a retração devido à variação de umidade pode ser computada como parcelas de deformações e daí a partir das relações constitutivas pode-se calcular tensões e deslocamentos associados.

Devido à simetria radial associada à forma cilíndrica da peça de madeira, como mostrado na Figura 1, o campo de deslocamentos é função da posição radial, direção r , e o deslocamento na direção θ é nulo e ainda a deformação longitudinal z é constante. Desse modo, as deformações podem ser escritas em função dos coeficientes de deformação reduzidos de LEKHNISTKII [1]. Observa-se que esses coeficientes e um coeficiente associado, denominado de k , são dependentes das propriedades de elasticidade do material constituinte da estrutura ou da peça estrutural analisada.

Colocando-se a retração nessas deformações como parcelas e conseqüentemente nesses coeficientes, torna-se possível analisar a influência da retração nas tensões e deslocamentos através da análise da solução da equação diferencial envolvendo os coeficientes de deformação.

Nesse contexto, são discutidos, nesse artigo, os conceitos gerais da teoria da elasticidade anisotrópica de Lekhnistkii, associados com tensões, deformações e deslocamentos, a seguir aplicações desses conceitos na retração segundo Hsu e Tang, e um exemplo de aplicação dessa influência, sendo considerada uma peça cilíndrica da espécie de madeira nacional *Pinus caribaea*. Um procedimento experimental auxiliar é também incluído com o objetivo da determinação das propriedades de elasticidade e de retração da madeira necessários para o desenvolvimento desse estudo.

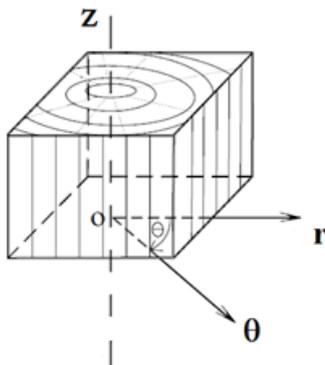


Figura 1: Coordenadas cilíndricas num bloco de madeira.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Nesse item, o qual é fundamentado em estudos de MALVERN [3], GOPU [4], SALIKLIS [5], e, em particular, em LEKHNISTKII [1], é apresentada a conceituação teórica a respeito do cálculo de deformações, deslocamentos e tensões no caso de um cilindro. A aplicação de carga axial (constante) aplicada em suas extremidades bem como de momentos fletor ou de torção também é possível.

2.1 Conceituações teórica segundo Lekhnitskii

Considere-se um tronco de madeira com a aproximação de um cilindro retirado do bloco de madeira apresentado na Figura 1. Para obter a distribuição de tensões e de deformações é necessário determinar seis componentes de tensões e três projeções de deslocamentos satisfazendo as equações de equilíbrio e as condições de contorno. Se considerar o caso de anisotropia cilíndrica com o eixo z de anisotropia pode-se escrever que a tensão e a deformação na direção axial são consideradas constantes. Sejam R e Θ as forças de volume e $U^*(\theta, r)$ um potencial elástico por volume associado, conforme LEKHNISTKII [1], podendo-se escrever que:

$$R = \frac{\partial U^*}{\partial r}; \Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U^*}{\partial \theta} \quad (1)$$

As equações de equilíbrio, sem as forças de volume, se restringem, conforme LEKHNISTKII [1], a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_r - U^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_\theta - U^*)}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

o qual $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ representam as tensões segundo as coordenadas cilíndricas adotadas, ou seja, r e θ .

As relações constitutivas entre tensões, normais σ e tangenciais τ , e deformações, normais ε e tangenciais γ , escritas em notação indicial expandida valem (LEKHNISTKII [1]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= S_{11}\sigma_r + S_{12}\sigma_\theta + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{\theta z} + S_{15}\tau_{rz} + S_{16}\tau_{r\theta} \\ \varepsilon_\theta &= S_{12}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{\theta z} + S_{25}\tau_{rz} + S_{26}\tau_{r\theta} \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{\theta z} + S_{35}\tau_{rz} + S_{36}\tau_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} &= S_{14}\sigma_r + S_{24}\sigma_\theta + S_{34}\sigma_z + S_{44}\tau_{\theta z} + S_{45}\tau_{rz} + S_{46}\tau_{r\theta} \\ \gamma_{rz} &= S_{15}\sigma_r + S_{25}\sigma_\theta + S_{35}\sigma_z + S_{45}\tau_{\theta z} + S_{55}\tau_{rz} + S_{56}\tau_{r\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= S_{16}\sigma_r + S_{26}\sigma_\theta + S_{36}\sigma_z + S_{46}\tau_{\theta z} + S_{56}\tau_{rz} + S_{66}\tau_{r\theta} \end{aligned} \tag{3}$$

Observa-se que os termos S_{ij} , com $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, representam os coeficientes nos quais há a presença dos coeficientes de Poisson e dos módulos de elasticidade do material em análise.

Considerando-se a deformação normal em z igual a D e isolando-se a tensão normal em z tem-se:

$$\sigma_z = \frac{D}{S_{33}} - \frac{1}{S_{33}} (S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + \dots + S_{36}\tau_{r\theta}) \tag{4}$$

Introduzindo-se os coeficientes de deformação reduzidos, escritos em notação indicial através da Equação 5:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \tag{5}$$

com $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Nota-se que esse tensor é simétrico e que $\beta_{i3} = \beta_{3i} = 0$, para $i = 1$ a 6.

Os deslocamentos são escritos de acordo com LEKHNISTKII [1] de forma idêntica a um sólido homogêneo:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{z^2}{2} (A \cos\theta + B \sin\theta) + U(\theta, r) + u'_r; \\ u_\theta &= -\frac{z^2}{2} (-A \sin\theta + B \cos\theta) + V(\theta, r) + r z + u'_\theta; \end{aligned} \tag{6}$$

$$w = z(A r \cos\theta + B r \sin\theta + C) + W(\theta, r) + w'$$

Nessas equações estão incluídos os deslocamentos de corpo rígido u'_r, u'_θ, w' , aos quais no caso desse trabalho são nulos pois não há forças externas. Nessas funções estão três novas funções, $U(r, \theta), V(r, \theta), W(r, \theta)$ escritas simplesmente por U, V e W , que satisfazem diferenciais entre os termos β_{ij} e as tensões. A, B e C são constantes determinadas através de condições de contorno.

Quando as funções U, V, W são determinados os deslocamentos também os são.

Colocando-se, agora, as deformações como função dos deslocamentos radial (u_r), tangencial (u_θ) e longitudinal (w), pode-se escrever as seis seguintes equações, de acordo com LEKHNISTKII [1], por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta + \dots + \beta_{16}\tau_{r\theta} + \frac{S_{13}}{S_{33}} D; \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} &= \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta + \dots + \beta_{26}\tau_{r\theta} + \frac{S_{23}}{S_{33}} D; \\
 \frac{\partial w}{\partial z} &= D; \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= \beta_{14}\sigma_r + \beta_{24}\sigma_\theta + \dots + \beta_{46}\tau_{r\theta} + \frac{S_{34}}{S_{33}} D \\
 \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} &= \beta_{15}\sigma_r + \beta_{25}\sigma_\theta + \dots + \beta_{56}\tau_{r\theta} + \frac{S_{35}}{S_{33}} D; \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= \beta_{16}\sigma_r + \beta_{62}\sigma_\theta + \dots + \beta_{56}\tau_{r\theta} + \frac{S_{36}}{S_{33}} D
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Através da integração das quarta, quinta e sexta equações do bloco de equações anterior (Equação 7) pode-se obter os deslocamentos. Além disso, para satisfazer as equações primeira, segunda e sexta desse bloco, D será função linear na paramétrica forma de $x=r \cos\theta$ e $y=r \sen\theta$, do tipo:

$$D = A r \cos\theta + B r \sen\theta + C$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, LEKHNITSKII [1] apresenta dois sistemas, um para U e V (correspondente à primeira, segunda e sexta equações do bloco anterior (7) e considerando a Equação 6 em sua forma diferencial e com os deslocamentos de corpo rígido u'_r, u'_θ, w' nulos tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^0 &= \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
 \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r}; \\
 \gamma_{r\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r};
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

e outro para W (corresponde à quinta e quarta equações):

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}
 \tag{9}$$

Pela eliminação das funções U, V, W desses sistemas, pode-se ficar com um sistema de duas equações, somente em função das tensões. Para eliminar U e V do primeiro sistema é utilizada a identidade:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \varepsilon_r^0 + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_\theta^0) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \gamma_{r\theta}^0) = 0
 \tag{10}$$

apresentada por HSU e TANG [2] para determinar a constante A_1 da Equação 36 escrita posteriormente. Em MASCIA [6] são apresentadas informações sobre essas manipulações algébricas.

2. 2 Função de Airy e de Tensão

Quando se tem o caso das tensões e das deformações serem independentes de z ou x_3 as equações de equilíbrio podem ser escritas agora em relação a um sistema de coordenadas x_1, x_2 e x_3 como TING [7]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Colocando-se que existam potenciais Φ_1 e Φ_2 , conforme TING [7], então se tem que:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} ; \sigma_{22} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} ; \tau_{21} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = \tau_{12} \\ \tau_{31} &= -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_2} ; \tau_{32} = -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (12)$$

sendo a tensão σ_{33} (igual a σ_z) é determinada via Equação 4.

De acordo com TING [7] com a existência de uma função potencial χ tal que:

$$\Phi_1 = -\frac{\partial \chi}{\partial x_2} ; \Phi_2 = \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \quad (13)$$

Colocando, também, que $\Phi_3 = -\psi$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} ; \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} ; \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} = \tau_{21} \\ \tau_{32} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} ; \tau_{31} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (14)$$

A função é denominada função de Airy χ e a função ψ é a função de tensão e essas funções satisfazem as equações de equilíbrio.

Colocando-se agora as equações constitutivas, com notação reduzida de TING [7], e inserindo os coeficientes de deformação reduzida β_{ij} , com i e j variando de 1 a 3, tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \beta_{11}\sigma_1 + \beta_{12}\sigma_2 \dots + \beta_{16}\tau_{12} + \frac{S_{13}}{S_{33}}\epsilon_3 \\ \epsilon_2 &= \beta_{12}\sigma_1 + \beta_{22}\sigma_2 \dots + \beta_{26}\tau_{12} + \frac{S_{23}}{S_{33}}\epsilon_3 \\ \gamma_{12} &= \beta_{14}\sigma_1 + \beta_{24}\sigma_2 \dots + \beta_{46}\tau_{12} + \frac{S_{43}}{S_{33}}\epsilon_3 \\ \gamma_{31} &= \beta_{15}\sigma_1 + \beta_{25}\sigma_2 \dots + \beta_{56}\tau_{12} + \frac{S_{53}}{S_{33}}\epsilon_3 \\ \gamma_{23} &= \beta_{11}\sigma_1 + \beta_{26}\sigma_2 \dots + \beta_{66}\tau_{12} + \frac{S_{63}}{S_{33}}\epsilon_3 \end{aligned} \quad (15)$$

nas quais os coeficientes de deformação reduzida β_{ij} , com i e j variando de 1 a 3, são definidos por:

$$\beta_{ij} = S_{ij} + \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}}\epsilon_3 \quad (16)$$

Substituindo-se nas tensões as funções de tensão e de Airy, com $\epsilon_3 = Ax_1 + Bx_2 + C$, a qual A , B e C são coeficientes arbitrários definidos por LEKHNISTKII [1], tem-se:

$$\epsilon_i = \beta_{i1}\chi_{,22} + \beta_{i2}\chi_{,11} - \beta_{i4}\psi_{,1} + \beta_{i5}\psi_{,2} - \beta_{i6}\chi_{,1} + \frac{S_{i3}}{S_{33}}\epsilon_3 \quad (17)$$

Considerando-se as equações de compatibilidade de deformações, em notação reduzida (TING [7]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} &= -\omega; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

e inserindo a equação anterior chega-se a:

$$\begin{aligned} L_3\chi + L_2\psi &= \Delta; \\ L_4\chi + L_3 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Com: $\Delta = -2\kappa + \frac{1}{S_{33}}(S_{43}A - S_{53}B)$ e A, B e κ são constantes e onde os operadores diferenciais L_4, L_3, L_2 de quarta, terceira e segunda ordem são iguais à:

$$\begin{aligned} L_2 &= \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \\ L_3 &= \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x_2^2 \partial x_1} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}; \\ L_4 &= \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_2^3 \partial x_1} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_2 \partial x_1^3} + \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \end{aligned} \tag{20}$$

Com isso TING [7] apresenta equações que resultam nas equações diferenciais de quarta ordem que darão a solução das funções de tensão e de Airy. Nesse sentido, HASHIN [8] utiliza as funções de Airy χ para se chegar a equação diferencial de quarta ordem, num caso plano de tensões, com procedimento análogo ao de TING [7], chegando à:

$$S_{22} \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_1^4} - 4S_{26} \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 2(S_{12} + 2S_{66}) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + S_{16} \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_1 \partial x_2^3} + S_{11} \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{21}$$

Os deslocamentos são dados por:

$$\begin{aligned} u_1 &= S_{11} \int \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} dx_1 + S_{12} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - 2S_{16} \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + f(x_2); \\ u_2 &= S_{12} \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + S_{22} \int \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} dx_2 - 2S_{26} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} + g(x_1) \end{aligned} \tag{22}$$

com f e g sendo funções arbitrárias.

LEKHNITSKII [1] considerando o caso da assimetria que existe no caso do cilindro com carga axial, carga transversal externa e interna (caso da pressão), momento de torção apresenta as seguintes funções de Airy χ e a função de tensão ψ , função apenas da variável r :

$$\chi = \chi(r); \psi = \psi(r) \tag{23}$$

As tensões, em coordenadas polares, são relacionadas a essas funções por:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\chi'}{r}; \sigma_\theta = \chi''; \tau_{r\theta} = 0; \\ \tau_{rz} &= 0; \tau_{\theta z} = -\psi''; \\ \sigma_z &= C - \frac{1}{S_{33}}(S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta + S_{34}\tau_{\theta z}) \end{aligned} \tag{24}$$

Na Equação 24 o superescrito indica derivada e C é uma constante.

O sistema de equações para as funções de Airy é escrito por (LEKHNITSKII [1]):

$$\begin{aligned} \beta_{22}(\chi^{IV} + \frac{2\chi'''}{r}) + \beta_{11}(\frac{\chi''}{r^2} + \frac{\chi'}{r^3}) - \beta_{24}\psi''' + (\beta_{14} - 2\beta_{24})\frac{\psi'''}{r} &= 0; \\ -\beta_{24}\chi''' - (\beta_{14} + \beta_{24})\frac{\chi''}{r} + \beta_{44}(\psi'' + \frac{\psi'''}{r}) &= \frac{CS_{34}}{r} - 2K \end{aligned} \tag{25}$$

Através do uso das Equações 19 e 20, e com a transformação em coordenadas cilíndricas. C e K são constantes.

A solução geral para as equações diferenciais das funções de Airy e de tensão, de acordo com o software MATLAB® (HALSENMAN e LITTLEFIELD, B. [9]), são as seguintes:

$$\begin{aligned} \chi &= C_0 \frac{\beta_{14}}{\beta_{11}} r + \frac{C_1}{2} r^2 + \frac{C_2}{1+k} r^{1+k} + \frac{C_3}{1-k} r^{1-k} + C_4 + \frac{\mu_1}{3} r^3; \\ \psi &= C_0 \ln r + C \frac{S_{34}}{\beta_{44}} r + C_1 g_1 r + \frac{C_2}{k} g_k r^k - \frac{C_3}{k} g_{-k} r^{-k} + C_5 - \frac{\mu_2}{2} r^2 \end{aligned} \quad (26)$$

com os termos: $\mu_1; \mu_2; k; g_1; g_k; g_{-k}$ são funções dos β_{ij} , onde k vale aqui: $k = \sqrt{\frac{\beta_{11}\beta_{44} - \beta_{14}^2}{\beta_{22}\beta_{44} - \beta_{24}^2}}$.

Observa-se que o coeficiente k é função β_{ij} que por sua vez é função das propriedades de elasticidade da madeira, as quais são determinadas experimentalmente para cada espécie de madeira. A título de ilustração apresenta-se a Tabela 1 com alguns valores de k (HSU e TANG [2]) para um teor de umidade 12%:

Tabela 1: Valores de k para algumas espécies de madeira.

ESPÉCIES DE MADEIRA	VALORES DE k
Yellow-poplar	0,678
Green ash	0,761
Engelmann spruce	0,745

Observa-se que para a espécie *Pinus caribaea* o valor de k obtido experimentalmente nesse estudo é de cerca de 0,865.

Das constantes que aparecem nas Equações 25 e 26, C_4 e C_5 são nulas desde que as tensões sejam nulas. As tensões são finalmente calculadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_0 \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}} \frac{1}{r} + C_1 + C_2 r^{k-1} + C_3 r^{-k-1} + \mu_1 r; \\ \sigma_\theta &= C_1 + C_2 k r^{k-1} - C_3 k r^{-k-1} + 2 \mu_1 r; \\ \tau_{\theta z} &= -C_0 \frac{1}{r} - C \frac{S_{34}}{\beta_{44}} - C_1 g_1 - C_2 g_k r^{k-1} - C_3 g_{-k} r^{-k-1} + \mu_2 r \end{aligned} \quad (27)$$

Para se determinar os deslocamentos a partir das tensões usa-se, então, as equações constitutivas para calcular as deformações e daí, por integração, os deslocamentos.

2.3 Análise da retração considerando-se os coeficientes de redução de deformação

HSU e TANG [2] com base nos trabalhos de LEKHNITSKII [1] fizeram um estudo a respeito da retração na madeira, considerando uma peça em forma de tronco sem forças externas. A retração é analisada sob a ótica que gera tensões no tronco de madeira. Também FRIDLEY E TANG [10] fizeram análises tridimensionais com base nas diretrizes discutidas a seguir. Nesse contexto, a retração (α_r , α_z e α_θ) é computada como parcelas das relações tensões-deformações, em coordenadas cilíndricas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= S_{rr} \sigma_r + S_{r\theta} \sigma_\theta + S_{rz} \sigma_z - \alpha_r; \\ \varepsilon_\theta &= S_{r\theta} \sigma_r + S_{\theta\theta} \sigma_\theta + S_{\theta z} \sigma_z - \alpha_\theta; \\ \varepsilon_z &= S_{rz} \sigma_r + S_{\theta z} \sigma_\theta + S_{zz} \sigma_z - \alpha_z; \end{aligned} \quad (28)$$

Observa-se que valores de retrações expressas em porcentagens podem ser encontrados nas referências: ZENID *et al.* [11] para espécies de madeira nacional e em BODIG e JAYNE [12] para espécies estrangeiras. A Norma Brasileira – ABNT-NBR 7190 [13] estabelece através do item B.7 procedimentos para avaliação da estabilidade dimensional nas direções de ortotropia da madeira.

Devido à simetria radial o campo de deslocamentos é função de r e o deslocamento na direção θ é nulo. Assim as deformações valem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = c\end{aligned}\tag{29}$$

na qual c é uma constante. Desde a deformação em z é constante pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \beta_{rr}\sigma_r + \beta_{r\theta}\sigma_\theta + \beta_r; \\ \varepsilon_\theta &= \beta_{r\theta}\sigma_r + \beta_{\theta\theta}\sigma_\theta + \beta_\theta\end{aligned}\tag{30}$$

Utilizando-se a Equação 16 na Equação 30 pode-se escrever os termos β_{ij} através de:

$$\begin{aligned}\beta_{rr} &= S_{rr} - \frac{S_{rz}S_{rz}}{S_{zz}}; \beta_{\theta\theta} = S_{\theta\theta} - \frac{S_{\theta z}S_{\theta z}}{S_{zz}}; \beta_{r\theta} = S_{r\theta} - \frac{S_{rz}S_{\theta z}}{S_{zz}}; \\ \beta_\theta &= \frac{S_{\theta z}}{S_{zz}}(c + \alpha_z) - \alpha_\theta; \beta_r = \frac{S_{rz}}{S_{zz}}(c + \alpha_z) - \alpha_r\end{aligned}$$

A equação de equilíbrio requer que (HSU e TANG [2]):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0\tag{31}$$

Com isso o problema a ser resolvido direciona-se a determinação da solução dessa equação conjuntamente com as equações constitutivas, considerando também a equação de compatibilidade das deformações. Assume-se, então, uma função $\chi(r)$, diferenciável em r , tal que:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\chi'}{r}; \\ \sigma_\theta &= \chi''\end{aligned}\tag{32}$$

Verifica-se que isso satisfaz a equação de equilíbrio. As equações constitutivas ficam sendo dadas por (HSU e TANG [2]):

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \beta_{rr}\frac{\chi'}{r} + \beta_{r\theta}\chi'' + \beta_r; \\ \varepsilon_\theta &= \beta_{r\theta}\frac{\chi'}{r} + \beta_{\theta\theta}\chi'' + \beta_\theta\end{aligned}\tag{33}$$

Substituindo-se estas deformações na equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - 2 \frac{\partial^2 (r\varepsilon_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = 0\tag{34}$$

obtem-se que: $r \frac{d^2 \varepsilon_\theta}{dr^2} + 2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} - \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0$. Consequentemente tem-se:

$$\beta_{\theta\theta} \left(\frac{d^4 \chi}{dr^4} + \frac{2d^3 \chi}{r dr^3} \right) + \beta_{rr} \left(- \frac{1d^2 \chi}{r^2 dr^2} + \frac{1d\chi}{r^3 dr} \right) = 0\tag{35}$$

E a forma geral da solução dessa equação diferencial é a seguinte:

$$\chi = \frac{A_1}{2} r^2 + \frac{A_2}{1+k} r^{1+k} + \frac{A_3}{1-k} r^{1-k} + A_4\tag{36}$$

As tensões são agora determinadas e valem:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_1 + A_2 r^{k-1} + A_3 r^{-k-1}; \\ \sigma_\theta &= A_1 + A_2 k r^{k-1} - A_3 k r^{-k-1} \end{aligned} \quad (37)$$

com três constantes desconhecidas.

HSU e TANG [2] ao analisarem essas tensões para determinar essas três constantes, assumiram que a parte interna do tronco da árvore é constituída de um material pouco denso. Desprezando-se essa parte o tronco da árvore se torna um cilindro com uma cavidade interna. Assim o deslocamento deveria ser zero no centro do cilindro. Desde que k é, de um modo geral, maior que zero e u_r para r igual zero chega-se A_3 a igual a zero. Além disso, por serem as deformações contínuas (em r igual a zero), tem-se:

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0.$$

Com isso pode-se determinar A_1 por:

$$A_1 = \frac{\beta_r - \beta_\theta}{\beta_{\theta\theta} - \beta_{rr}} \quad (38)$$

Como não há carga externa, em r igual a R , a tensão é nula implicando que $A_2 = -\frac{A_1}{R^{k-1}}$. Assim, as tensões normais radial e tangencial e o deslocamento radial, respectivamente, ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_1 \left(1 - \frac{r^{k-1}}{R^{k-1}} \right); \\ \sigma_\theta &= A_1 \left(1 - \frac{k r^{k-1}}{R^{k-1}} \right); \\ u_r &= \varepsilon_\theta r = [\beta_{r\theta} \sigma_r + \beta_{\theta\theta} \sigma_\theta + \beta_\theta] r \end{aligned} \quad (39)$$

Finalmente, a constante c que aparece na Equação 29 é determinada considerando que não exista carga externa, e daí: $2\pi \int_0^R \sigma_z r dr = 0$, na qual σ_z correspondente a tensão, no topo ou base do cilindro.

Com o uso da última das Equações 28 ou seja: $\varepsilon_z = S_{rz} \sigma_r + S_{\theta z} \sigma_\theta + S_{zz} \sigma_z - \alpha_z$.

Na expressão anterior obtém que:

$$c = \frac{\beta_r - \beta_\theta}{\beta_{\theta\theta} - \beta_{rr}} \left[(S_{rz} + S_{\theta z}) - \frac{2(S_{rz} + k S_{\theta z})}{k+1} \right] - \alpha_z. \quad (40)$$

HSU e TANG [2] determinam o valor de c por:

$$c = \frac{(G\hat{D} - \alpha_z)}{1 - \frac{(S_{rz} - S_{\theta z})\hat{D}}{(\beta_{\theta\theta} - \beta_{rr})S_{zz}}} \quad (41)$$

com:

$$\hat{D} = 2 \left[\frac{(S_{rz} + S_{\theta z})}{\alpha_z} - \frac{S_{rz} + k S_{\theta z}}{k+1} \right] \quad (42)$$

e:

$$G = \frac{\alpha_\theta - \alpha_r + \frac{S_{rz} - S_{\theta z}}{S_{zz}} \alpha_z}{\beta_{\theta\theta} - \beta_{rr}} \quad (43)$$

No caso de isotropia tem-se que $\alpha = \alpha_\theta = \alpha_z$ e com que $k = 1$ chega-se à $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$.

3. RESULTADOS

3.1 Análise experimental auxiliar para determinação de k

A partir de um bloco de madeira, esquematizado na Figura 2, com os anéis de crescimento aproximando de superfícies cilíndricas de acordo com a Figura 1 pode-se retirar corpos-de-prova para determinar as propriedades de elasticidade da madeira e posteriormente determinar o coeficiente k .

Foram então ensaiadas segundo o esquema aqui apresentado 3 corpos de prova, em cada direção considerada, com as seguintes dimensões: 4 cm x 4 cm x 10cm, da espécie *Pinus caribaea*, obtidas em madeira da região de Campinas-SP. Utilizou-se extensômetros elétricos KYOWA, denominação KFC-5-C1-11, com 5 mm de comprimento, fator gage 2,10, resistência elétrica 120 W, para se obter as deformações e de uma máquina universal de ensaios, AMSLER, com capacidade de 250 KN, para se ter os carregamentos. Procedimentos sobre esse assunto podem ser encontrados em MASCIA [14].

Considera-se então seis peças menores, no interior desse bloco, seguindo as direções dos eixos r , θ e z e nos respectivos planos $r\theta$, zr e $z\theta$.

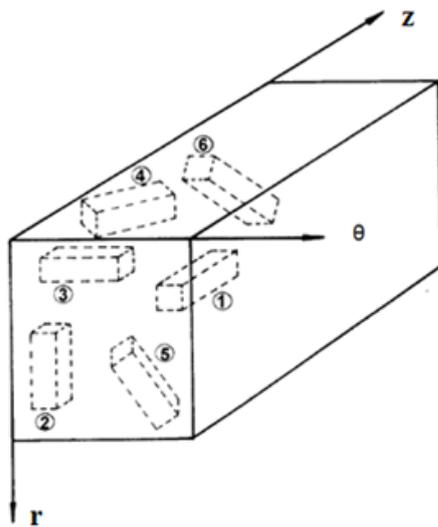


Figura 2: Bloco de madeira com os corpos-de-prova.

Observa-se que devido a dimensão da peça de madeira, em torno de 50 cm de diâmetro, os corpos-de-prova tem dimensões menores que os adotados nos ensaios de compressão simples da NBR 7190 [13].

Então com uso da peça situada segundo a direção z (CP 1) é possível obter os seguintes coeficientes de Poisson e o módulo de elasticidade nessa direção:

$$v_{zr} = -\frac{\epsilon_r}{\epsilon_z}; v_{z\theta} = -\frac{\epsilon_\theta}{\epsilon_z}; E_z = \frac{\sigma_z}{\epsilon_z}. \quad (44)$$

Da mesma forma, da peça na direção r (CP 2) obtém:

$$v_{r\theta} = -\frac{\epsilon_\theta}{\epsilon_r}; v_{rz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_r}; E_r = \frac{\sigma_r}{\epsilon_r}. \quad (45)$$

Finalmente, da peça na direção θ (CP 3), pode-se tirar que:

$$v_{\theta r} = -\frac{\epsilon_r}{\epsilon_\theta}; v_{\theta z} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_\theta}; E_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\epsilon_\theta}. \quad (46)$$

Das condições de simetria que existe no tensor que contém as propriedades elásticas pode-se obter que:

$$\frac{\nu_{\theta r}}{E_{\theta}} = \frac{\nu_{r\theta}}{E_r}; \frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{\nu_{rz}}{E_r}; \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} = \frac{\nu_{\theta z}}{E_{\theta}}.$$

As determinações dos módulos de elasticidade transversais (G_{ij}) foram realizadas através dos nove CPs nas direções adotadas 4,5 e 6. Dessa maneira, na determinação de G_{ij} através das relações entre tensões e deformações, com uso do ensaio de compressão simples, deve-se preparar um corpo de prova com as direções principais de elasticidade sempre não coincidentes com a direção de aplicação da carga, no caso um ângulo ao redor de 45°, e utilizar das transformações de coordenadas para tensões e deformações e dessas relações para determinar esses módulos, para plano requerido. MASCIA [14].

Os resultados obtidos estão na Tabela 2. Observa-se que os coeficientes de Poisson na Tabela 2 são adimensionais.

Tabela 2: Valores médios das propriedades elásticas (MPa).

E_{θ}	781	E_z	5100
E_r	1019	$G_{r\theta}$	120
G_{zr}	540	$G_{z\theta}$	310
$\nu_{r\theta}$	0,639	$\nu_{\theta r}$	0,409
$\nu_{\theta z}$	0,047	$\nu_{z\theta}$	0,334
ν_{rz}	0,085	ν_{zr}	0,370

A partir desses dados determina-se o valor de $k = \sqrt{\frac{\beta_{11}\beta_{44} - \beta_{14}^2}{\beta_{22}\beta_{44} - \beta_{24}^2}}$.

Considerando o sistema cilíndrico de coordenadas e a condição de serem direções principais de elasticidade. Desse modo, β_{14} e β_{24} são nulos (LEKHNITSKII [1]) e o valor de k será dado por: $k = \sqrt{\frac{\beta_{rr}}{\beta_{\theta\theta}}}$, e os termos participantes de k por:

$$\beta_{rr} = S_{rr} - \frac{S_{rz}S_{rz}}{S_{zz}} = \frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{rz}^2}{E_r} \tag{47}$$

$$\beta_{\theta\theta} = S_{\theta\theta} - \frac{S_{\theta z}S_{\theta z}}{S_{zz}} = \frac{1}{E_{\theta}} - \frac{\nu_{\theta z}^2}{E_{\theta}}$$

Finalmente, as propriedades de retração são avaliadas de acordo com procedimento da ABNT-NBR 7190 [13] para uma variação de umidade de madeira de cerca de 18%, ou seja partindo-se da peça saturada a 30% de umidade para madeira com umidade de 12%, cujos valores médios foram os seguintes:

$$\alpha_{\theta} = 0,03; \alpha_r = 0,06 \text{ e } \alpha_z = 0,001$$

4. DISCUSSÃO

4.1 Cálculos das tensões e deslocamentos radiais

A partir da Equação 39 e dos valores determinados via resultados da parte experimental do trabalho podem ser confeccionados gráficos das tensões nas direções radial e tangencial e de deslocamentos. Nesse contexto, a retração (α) é computada como parcelas das relações tensões, deformações e deslocamentos.

A seguir colocam-se os parâmetros utilizados para a construção das Figuras 3 e 4, nas quais são mostradas as variações das tensões em r , na direção radial e em θ , na direção tangencial, partindo-se do centro de uma peça de madeira até a borda, ou seja, a coordenada r variando de 0 a R e os deslocamentos na direção radial:

$$A_1 = \frac{\beta_r - \beta_\theta}{\beta_{\theta\theta} - \beta_{rr}} \cong 90$$

$$\beta_{rr} = S_{rr} - \frac{S_{zz}S_{zz}}{S_{zz}} = \frac{1}{E_r} - \frac{v_{rz}^2}{E_r} \cong 8,98 \times 10^{-4}$$

$$\beta_{\theta\theta} = S_{\theta\theta} - \frac{S_{\theta z}S_{\theta z}}{S_{zz}} = \frac{1}{E_\theta} - \frac{v_{\theta z}^2}{E_\theta} \cong 12,20 \times 10^{-4}$$

$$\beta_\theta = \frac{S_{\theta z}}{S_{zz}}(c + \alpha_z) - \alpha_\theta = -v_{z\theta}(c + \alpha_z) - \alpha_\theta \cong -0,06$$

$$\beta_r = \frac{S_{rz}}{S_{zz}}(c + \alpha_z) - \alpha_r = -v_{rz}(c + \alpha_z) - \alpha_r \cong -0,03$$

Observa-se que, como os coeficientes de Poisson $v_{\theta z}$ e v_{rz} tem valores próximos à constante c os mesmos não aparecem nos cálculos.

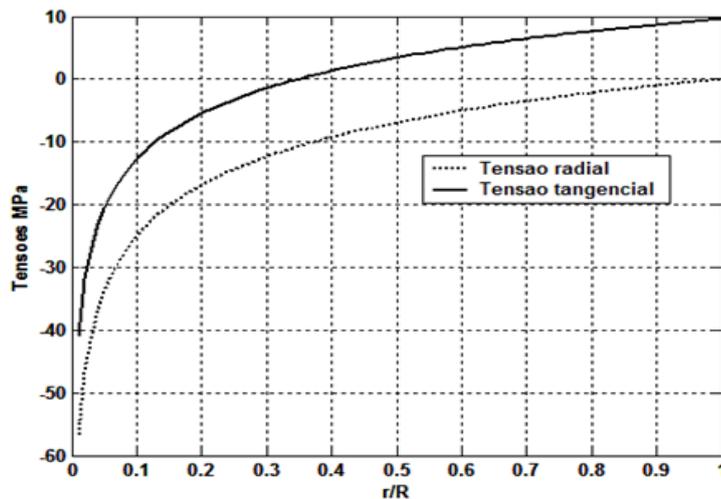


Figura 3: Tensões radial e tangencial do centro a borda peça de madeira.

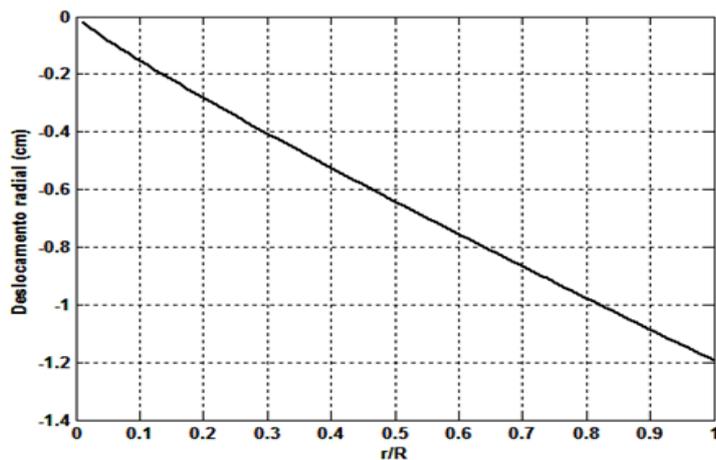


Figura 4: Deslocamento radial do centro a borda peça de madeira.

Pode-se observar que a tensão radial cresce da borda para o centro da peça, atingindo o valor máximo por volta de 60 MPa, de compressão, e as tensões nas direções tangenciais tem uma tensão de tração nas bordas de 10 MPa e no centro atinge a compressão máxima de 40 MPa. O deslocamento radial máximo atinge -1,2 cm na borda em relação ao centro da peça. Observa-se que o uso na prática construtiva de chapas metálicas, tipo dentadas, gangnail, ou anéis metálicos para reduzir tais tensões e consequentes deformações e deslocamentos em vista dos resultados obtidos nesse estudo pode ser considerado importante (<http://www.gangnail.com.br> [15]).

5. CONCLUSÕES

Esse artigo apresentou um estudo geral da análise de tensões e de deformações numa peça de madeira segundo os conceitos de anisotropia cilíndrica, introduzindo a influência da retração nessas tensões. Para tanto foi necessário se avaliar um parâmetro k que depende de resultados de propriedades de elasticidade. Essas propriedades foram avaliadas via em ensaios de compressão em corpos de prova da espécie de madeira *Pinus caribaea*.

Os conceitos gerais foram baseados nos principais autores e pesquisadores do assunto, tais como LEKHNITSKII [1], HSU e TANG [2] e TING [7].

Observa-se que o conhecimento de tensões e deslocamentos quando associadas com a retração ou de um modo geral com variação dimensional e suas interferências em peças de madeira podem ter contribuir as questões construtivas de prevenção de ruptura ou fissuras, ou seja, estados limites de últimos e de serviço, buscando-se com isto se ter um adequado uso da madeira em projetos estruturais.

A importância de se analisar a influência da retração tendo em vista a suscetibilidade da madeira à variação do teor de umidade, e as suas associações com os valores de ruptura, de trincas sendo isso um motivador de investigação científica, em situações nas quais a variação dimensional, a retração ou inchamento for importante, principalmente, quando se utiliza peças roliças de madeira em projetos estruturais.

Especificamente foi possível observar na retração há tensões de compressão na direção radial a peça, mas há tensões na direção tangencial de tração que podem conduzir a rupturas de tração ocasionando fissuras na peça, situação inconveniente para as estruturas de madeira.

Pode-se constatar que a tensão radial apresenta um aumento da borda para o centro da peça, atingindo o valor máximo por volta de 60 MPa, de compressão, e ainda as tensões nas direções tangenciais tem uma tensão de tração nas bordas de 10 MPa e no centro atinge a compressão máxima de 40 MPa.

Essas tensões podem ser em muitos casos maiores que a própria resistência à compressão ou à tração da madeira da espécie estudada de *Pinus caribaea* e de um modo geral nos *Pinus* (em geral de 40 a 60MPa) ou de ainda mais crítico quando associadas com a tração normal (valores entre 2 e 8 MPa), conforme se pode observar em valores tabelados de resistência da ABNT-NBR 7190 [13] e em estudos desenvolvidos por BORTOLETTO [16].__

6. AGRADECIMENTOS

O autor agradece à FAPESP (Processo n.97/02710-0) pelo apoio financeiro nessa pesquisa.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] LEKHNITSKII, S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Moscou, Mir, 430 p., 1981.
- [2] HSU, N.N., TANG, R.C., “Internal Stresses in Wood Logs Due to Anisotropic Shrinkage”, *Wood Science*, v.7., n.1. pp.43-51, 1974.
- [3] MALVERN, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Media*, Prentice-Hall International, London, 713 p, 1969.
- [4] GOPU, V.K.A., GOODMAN, J.R. “Analysis of Double-Tapered Pitched and Curved Laminated Beam Section”, *Wood Science*, v 7, n.1, pp. 52-60, 1974.
- [5] SALIKLIS, E. (1992). A Nonlinear Constitutive Model of Paperboard. Madison, 213p. PhD- Dissertation. University of Wisconsin.
- [6] MASCIA, N. T. *Transformações de Coordenadas e Anisotropia*, Apostila de FEC-Unicamp, 2009.
- [7] TING, T.C.T. *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*, Oxford University Press, New York. 570p, 1996.
- [8] HASHIN, Z. “Plane Anisotropic Beams”, *Journal of Applied Mechanics*, pp.257-62, 1964.

- [9] HALSENMAN, D., LITTLEFIELD, B., MATLAB 5 – Versão do estudante – Guia do Usuário, São Paulo, Makron Books, 1999.
- [10] FRIDLEY, K.J. e TANG, R.C. “Modelling three-dimensional distortion of Wood due to anisotropic shrinkage”, *Math. Compu. Modelling*, v. 17, n. 9, pp. 23-30, 1993
- [11] ZENID G. J., NAHUZ M. A., RABELO, MIRANDA M. J. de A. C., et al., *Madeira: uso sustentável na construção civil*, IPT, São Paulo, Brasil, 2003.
- [12] BODIG J., JAYNE B. A. *Mechanics of wood and wood composites*, Krieger Publishing Company, Florida, 1982.
- [13] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Projeto de Estruturas de Madeira. NBR 7190, Rio de Janeiro, 1997.
- [14] MASCIA, N.T. *Considerações a respeito da Anisotropia na Madeira*. 293p. Tese de D.Sc., Engenharia civil-EESC-USP, São Carlos, 1991.
- [15] GANG NAIL DO BRASIL IND.E COM.LTDA. <http://www.gangnail.com.br>
- [16] BORTOLETTO Jr, G. “Estudo de algumas propriedades físicas e mecânicas da madeira de *Pinus merkusii*”, *Sci. For.*,v. 36, n. 79, pp. 237-243, set. 2008.